MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

ERICH HECKE
IN HAMBURG

103. BAND

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1930

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN
VON

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

ERICH HECKE
IN HAMBURG

103. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

Inhalt des einhundertunddritten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Über analytische fastperiodische Funktionen.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Problem aus der Theorie der analytischen fastperiodischen Funktionen behandelt, welches für die genannte Theorie ein gewisses prinzipielles Interesse darbietet. Bevor ich dazu übergehe, die Fragestellung näher zu erörtern, werde ich mir zunächst erlauben, in aller Kürze an einige bekannte Resultate aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen[1]) zu erinnern, welche wir für das Folgende benötigen.

Zunächst einige Worte über fastperiodische Funktionen einer reellen Veränderlichen t. Von einer auf der Zahlenachse liegenden Punktmenge soll gesagt werden, daß sie daselbst „relativ dicht" liegt, falls sie in jedem Intervall einer gewissen Länge L mit mindestens einem Punkt vertreten ist. Eine für $-\infty < t < \infty$ stetige Funktion $F(t) = U(t) + iV(t)$ heißt fastperiodisch, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dicht liegende Menge von Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ gibt, d. h. Zahlen τ, welche für alle t die Ungleichung

$$|F(t+\tau) - F(t)| \leqq \varepsilon$$

befriedigen. Jeder fastperiodischen Funktion $F(t)$ ist eine Fourierreihe

$$F(t) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n t}$$

zugeordnet, welche ihrerseits die Funktion $F(t)$ eindeutig bestimmt. Im Spezialfall einer reinperiodischen (stetigen) Funktion $F(t)$ der Periode p

[1]) H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I, II, III, Acta Mathematica 45, 46, 47. Für die vorliegende Arbeit kommt jedoch nur die dritte Abhandlung in Betracht.

stimmt diese Fourierreihe mit der gewöhnlichen Fourierreihe der Funktion

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{i m \frac{2\pi}{p} t}$$

überein.

Im Folgenden werden wir es mit analytischen fastperiodischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$ zu tun haben. Eine im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ $(-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty)$ reguläre analytische Funktion $f(s)$ heißt fastperiodisch in $\alpha < \sigma < \beta$ oder kürzer in (α, β), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dicht liegende Menge von Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ gibt; hierbei soll eine (reelle) Zahl τ nur dann als eine zu der gegebenen Funktion $f(s)$ und dem gegebenen Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ gehörige Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon)$ bezeichnet werden, falls sie für alle s des ganzen Streifens der Ungleichung

$$|f(s + i\tau) - f(s)| \leqq \varepsilon$$

genügt. Mit anderen Worten: bei jedem festen σ des Intervalles $\alpha < \sigma < \beta$ soll die Funktion $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen t sein, und die Fastperiodizität in t soll „gleichartig" in bezug auf den Parameter σ stattfinden. Ferner soll eine in $\alpha < \sigma < \beta$ reguläre Funktion als fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$ bezeichnet werden, wenn sie in jedem beschnittenen Streifen $(\alpha <)\, \alpha_1 < \sigma < \beta_1\, (< \beta)$ fastperiodisch ist, und sie heiße fastperiodisch in $[\alpha, \beta)$ bzw. in $(\alpha, \beta]$, wenn sie in jedem einseitig beschnittenen Streifen $(\alpha <)\, \alpha_1 < \sigma < \beta$ bzw. $\alpha < \sigma < \beta_1\, (< \beta)$ fastperiodisch ist. Überhaupt werden wir eckige Klammern in diesem Sinne gebrauchen; so soll der Ausdruck „eine Funktion $f(s)$ ist beschränkt in $[\alpha, \beta]$" bedeuten, daß in jedem Teilstreifen $(\alpha <)\, \alpha_1 < \sigma < \beta_1\, (< \beta)$ eine Ungleichung der Form $|f(s)| < K(\alpha_1, \beta_1)$ besteht. Es gilt der Satz, daß jede in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist. Zu einer in (α, β) (oder in $[\alpha, \beta]$) fastperiodischen Funktion $f(s)$ gehört eine Dirichletentwicklung

$$\sum A_n e^{\Lambda_n s} = \sum A_n e^{\Lambda_n (\sigma + it)},$$

welche die Fourierreihen aller Funktionen $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ $(\alpha < \sigma < \beta)$ formal zusammenfaßt; d. h. in der Fourierreihe $\sum A_n^{(\sigma)} e^{i \Lambda_n^{(\sigma)} t}$ der fastperiodischen Funktion $F_\sigma(t)$ hängen die Exponenten $\Lambda_n^{(\sigma)}$ nicht von σ ab, und die Koeffizienten $A_n^{(\sigma)}$ haben die Form $A_n e^{\Lambda_n \sigma}$, wo A_n von σ unabhängig ist. Die Dirichletentwicklung einer in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s)$ ist also durch die Kenntnis der Fourierreihe von $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ für ein einziges festes σ des Intervalles $\alpha < \sigma < \beta$ völlig bestimmt. Im Spezialfall einer in $\alpha < \sigma < \beta$ reinperiodischen (regulären) Funktion $f(s)$ der Periode ip stimmt die Dirichletentwicklung $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ der Funktion

mit ihrer Laurentreihe

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{m\frac{2\pi}{p}s}$$

überein. Schließlich bemerke ich, daß die Grenzfunktion $f(s) = \lim f_m(s)$ einer im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen $f_m(s)$, deren einzelne Elemente $f_m(s)$ in (α, β) fastperiodisch (also eo ipso regulär) sind, ebenfalls in (α, β) fastperiodisch ist, und daß die Dirichletentwicklung von $f(s)$ in (α, β) durch formalen Grenzübergang aus den Dirichletentwicklungen der einzelnen Elemente $f_m(s)$ entsteht; speziell ist also das konstante Glied in der Entwicklung von $f(s)$ der Grenzwert des konstanten Gliedes von $f_m(s)$.

Das in dieser Abhandlung zu behandelnde Problem gehört dem allgemeinen Problemkreis an, inwiefern und inwieweit fastperiodische Eigenschaften (darunter auch die Dirichletentwicklung) bei analytischer Fortsetzung erhalten bleiben. In dieser Hinsicht ist eine Reihe von Sätzen bekannt; vor allem sei der folgende Satz genannt, der uns direkt auf unsere Fragestellung hinführt.

Es sei $\alpha < \gamma < \delta < \beta$. Damit eine in dem (beliebig schmalen) Teilstreifen $\gamma < \sigma < \delta$ als fastperiodisch, also a fortiori regulär analytisch, vorausgesetzte Funktion $f(s)$ in dem ganzen Streifen $[\alpha, \beta]$ als fastperiodische Funktion existiert, ist hinreichend, daß $f(s)$ von $\gamma < \sigma < \delta$ in $\alpha < \sigma < \beta$ als eindeutige reguläre Funktion analytisch fortsetzbar sei und in $[\alpha, \beta]$ beschränkt bleibe.

Nach dem oben Erwähnten wissen wir, daß diese Forderung der Regularität und Beschränktheit von $f(s)$ im ganzen Streifen $[\alpha, \beta]$ zugleich auch eine notwendige Bedingung für die Fastperiodizität von $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ darstellt. Es fragt sich aber, ob es nötig ist, die genannte Forderung explizit als Annahme aufzustellen, oder ob sie vielleicht durch andersgeartete Annahmen ersetzt werden kann. Ein wichtiges hierhergehöriges Resultat besagt:

Es sei $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$ und $f_1(s)$ eine in $[\alpha_1, \beta_1]$, $f_2(s)$ eine in $[\alpha_2, \beta_2]$ fastperiodische Funktion, von denen vorausgesetzt wird, daß sie in $[\alpha_1, \beta_1]$ bzw. in $[\alpha_2, \beta_2]$ dieselbe Dirichletentwicklung $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ besitzen. Dann gehen $f_1(s)$ und $f_2(s)$ durch analytische Fortsetzung auseinander hervor, und zwar gibt es eine im ganzen Streifen $\alpha_1 < \sigma < \beta_2$ reguläre Funktion $f(s)$, die in $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ mit $f_1(s)$ und in $\alpha_2 < \sigma < \beta_2$ mit $f_2(s)$ zusammenfällt, und welche im ganzen Streifen $[\alpha_1, \beta_2]$ fastperiodisch (also a fortiori beschränkt) ist und daselbst natürlich die Dirichletentwicklung $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ besitzt.

Jetzt wollen wir aber keinerlei Annahmen über die Dirichletentwicklungen machen, sondern wieder (wie in dem erstgenannten Satze) aus-

drücklich voraussetzen, daß die in einem gewissen Streifen als fastperiodisch angenommene Funktion $f(s)$ über diesen Streifen hinaus als reguläre Funktion analytisch fortsetzbar ist[2]); dagegen wollen wir die Forderung des Beschränktbleibens der Funktion bei der analytischen Fortsetzung fallen lassen und versuchen diese durch die andersartige Forderung zu ersetzen, daß $f(s)$ bei der analytischen Fortsetzung wieder einmal (in einem neuen Streifen) fastperiodisch wird. In genauer Formulierung lautet unsere Frage:

Es sei $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$ und $f(s)$ eine im ganzen Streifen $\alpha_1 < \sigma < \beta_2$ reguläre analytische Funktion, die sowohl in $[\alpha_1, \beta_1]$ wie in $[\alpha_2, \beta_2]$ fastperiodisch ist. Läßt sich dann hieraus folgern, daß $f(s)$ im ganzen Streifen $[\alpha_1, \beta_2]$ fastperiodisch ist?

Wenn nicht, ist es nach dem Obigen klar, 1. daß die Dirichletentwicklungen von $f(s)$ in den beiden Streifen $[\alpha_1, \beta_1]$ und $[\alpha_2, \beta_2]$ voneinander verschieden sein müssen, so daß also eine Änderung der Dirichletentwicklung eintreten kann, ohne daß die Funktion dabei eine Singularität überschreitet, und 2. daß $f(s)$ gewiß nicht im ganzen Streifen $[\alpha_1, \beta_2]$ beschränkt bleiben kann, woraus nach Phragmén-Lindelöfschen Sätzen folgt, daß ihr Verlauf zwischen den beiden Fastperiodizitätsstreifen von sehr komplizierter Art sein muß.

Im Spezialfall der reinperiodischen Funktionen ist die Frage selbstverständlich bejahend zu beantworten; hier handelt es sich ja um eine genaue funktionale Relation $f(s+ip) - f(s) = 0$ und nicht um Funktionalungleichungen $|f(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon$, und falls die Relation $f(s+ip) - f(s) = 0$ in einem Teilbereich eines Regularitätsstreifens von $f(s)$ erfüllt ist, wird sie ja von selbst im ganzen Streifen erfüllt sein.

Im allgemeinen Fall der fastperiodischen Funktionen ist aber unsere Frage mit Nein zu beantworten. Dies nachzuweisen ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Es geschieht durch Angabe eines „Gegenbeispieles", dessen Konstruktion vielleicht auch an und für sich ein gewisses Interesse darbietet. Wir wollen übrigens ein Beispiel angeben, welches in dem uns interessierenden Sinne möglichst vieles leistet, und zwar indem die beiden Streifen $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ und $\alpha_2 < \sigma < \beta_2$ zu Halbebenen ausgeartet sind, die

---

[2]) Daß man aus dieser Voraussetzung allein nicht schließen kann, daß $f(s)$ bei der analytischen Fortsetzung fastperiodisch bleibt, ist schon aus der Theorie der gewöhnlichen Dirichletreihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$ bekannt; so ist z. B. die durch die Reihe $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ definierte ganze transzendente Funktion $\zeta(s)\cdot(1-2^{1-s})$ fastperiodisch in $[1, \infty)$, dagegen gewiß nicht fastperiodisch über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus, weil sie auf der Geraden $\sigma = 1$ nicht einmal beschränkt bleibt.

sogar längs einer vertikalen Geraden (übrigens der imaginären Achse) aneinander stoßen. Das ganze sonderartige Benehmen der Funktion, welches durch das Aufhören und Wiedergewinnen der Fastperiodizität hervorgerufen wird, findet also in der unmittelbaren Nähe einer einzigen Geraden ($\sigma = 0$) statt. Wir formulieren unsere Behauptung in dem folgenden Satz:

Es gibt eine ganze Transzendente $f(s)$, die sowohl in $(-\infty, 0]$, wie auch in $[0, +\infty)$ fastperiodisch ist, welche aber in den beiden genannten Halbebenen verschiedene Dirichletentwicklungen besitzt.

Das Beispiel einer Funktion $f(s)$ mit den erwähnten Eigenschaften wird so konstruiert, daß es aus einfachen Bestandteilen, nämlich reinperiodischen Funktionen (aber mit untereinander verschiedenen Perioden), durch Addition und Grenzübergang aufgebaut wird. Hierbei stellt sich aber zunächst eine prinzipielle Schwierigkeit ein, nämlich die, daß eine in (α_1, β_2) reguläre und in den beiden Teilstreifen (α_1, β_1) und (α_2, β_2) periodische Funktion eo ipso in (α_1, β_1) und (α_2, β_2) dieselbe Dirichletentwicklung (Laurententwicklung) besitzt, und es eine nicht leicht anzugreifende Aufgabe scheint, durch Zusammensetzung von Bausteinen, von denen jeder in (α_1, β_1) und (α_2, β_2) identische Entwicklungen haben, zu einer Funktion zu gelangen, deren Dirichletentwicklungen in (α_1, β_1) und (α_2, β_2) verschieden ausfallen. Diese Schwierigkeit wird bei der Konstruktion dadurch umgangen, daß die reinperiodischen Funktionen, mit denen wir operieren, nicht im ganzen Streifen (α_1, β_2) regulär sind, sondern auf einer gewissen Geraden (äquidistant liegende) Pole besitzen. Solche meromorphe periodische Funktionen haben natürlich verschiedene Laurententwicklungen links und rechts von der betreffenden Geraden. Es wird nun die gesuchte Funktion so aufgebaut, daß die eingeführten Pole wieder zum Verschwinden gebracht werden, indem die von den verschiedenen periodischen Bestandteilen herrührenden Pole einander aufheben. Die tatsächliche Ausführung dieses Gedankens — die eine gewisse Vorsicht verlangt — wird vor allem durch die Heranziehung einer bekannten von Runge herrührenden Methode der „Polverschiebung“ ermöglicht. Um den Gedankengang bei der Konstruktion unseres Beispieles möglichst klar hervortreten zu lassen, schicken wir zunächst eine kleine vorbereitende Hilfsbetrachtung voraus.

Eine funktionentheoretische Hilfsbetrachtung.

Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein, die wir im ganzen Folgenden verwenden werden. Mit $P(x)$ (sowie $P^*(x)$, $P_0(x)$, $P_1(x)$ usw.) werden wir Polynome bezeichnen. Ferner werden wir mit $R(z)$ (sowie $R_0(z)$, $R_1(z)$ usw.) rationale Funktionen einer komplexen Veränderlichen z

bezeichnen, welche die Form haben

$$R(z) = P\left(\frac{1}{z^2+1}\right),$$

die also in der ganzen Ebene einschließlich des unendlich fernen Punktes regulär sind bis auf Pole in den beiden Punkten $z = +i$ und $z = -i$. Für $|z| < 1$ bzw. für $|z| > 1$ gelten somit Potenzreihenentwicklungen

$$R(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \quad \text{bzw.} \quad R(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m z^{-m},$$

wobei speziell $c_0 = R(0)$, $d_0 = R(\infty)$ ist.

Später werden wir, wie oben erwähnt, mit einer Folge von in der ganzen s-Ebene meromorphen periodischen Funktionen (mit untereinander verschiedenen Perioden) operieren. Bei jeder einzelnen dieser Funktionen, sie heiße $\varphi(s)$ und ihre Periode ip, wird es bequem sein, durch die Substitution $z = e^{\lambda s}$ $\left(\lambda = \frac{2\pi}{p}\right)$ von der Ebene der Variablen s zur Ebene der Variablen z überzugehen; hierbei wird eine Folge von äquidistanten Polen $s = s_0 + n \cdot ip$ in einen einzigen Pol $z = z_0$ abgebildet. Die Durchführung gewisser Polverschiebungen, die wir vorzunehmen haben, läßt sich viel leichter in der z-Ebene als in der s-Ebene übersehen. Um dabei das nötige Werkzeug fertig zur Hand zu haben, formulieren wir den folgenden Hilfssatz:

Es seien $r_1 < 1$ und $r_2 > 1$ zwei feste positive Zahlen (die beliebig wenig von 1 abweichen dürfen). Mit $G = G(r_1, r_2)$ bezeichnen wir das offene einfach zusammenhängende Gebiet der $z = re^{i\theta}$-Ebene (vgl. Fig. 1), welches aus

1. dem Kreisinneren $|z| < r_1$,
2. dem Kreisäußeren $|z| > r_2$ (inkl. $z = \infty$),
3. dem Verbindungssektor $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$, $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$

zusammengesetzt ist. Ferner sei $P(x)$ ein beliebig gegebenes Polynom und $R(z) = P\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

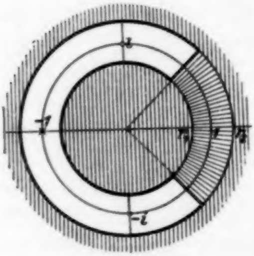


Fig. 1.

Dann gibt es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P^*(x)$ mit der Eigenschaft, daß im ganzen Gebiete G die Ungleichung

$$\left| P^*\left(\frac{1}{z+1}\right) - R(z) \right| < \varepsilon \tag{1}$$

stattfindet.

Diese — beim ersten Blick wohl überraschende — Möglichkeit, die Pole von den beiden Punkten $z = +i$ und $z = -i$ nach dem ganz anderswo

gelegenen Punkte $z=-1$ zu verlegen, ohne das Verhalten der Funktion im Gebiete G merkbar zu ändern, ist eine wohlbekannte Tatsache und wird sofort durch ein ebenso einfaches wie elegantes Verfahren von Runge in Evidenz gesetzt[3]).

Einer späteren Anwendung wegen fügen wir hinzu, daß aus der Ungleichung (1) folgt, daß in den beiden Potenzreihenentwicklungen $\sum_0^\infty a_m z^m$ und $\sum_0^\infty b_m z^{-m}$ der Funktion $P^*\left(\frac{1}{z+1}\right)-R(z)$ die konstanten Glieder a_0 und b_0 beide numerisch kleiner als ε sind; wir brauchen ja nur $z=0$ bzw. $z=\infty$ in (1) zu setzen.

---

[3]) Für den Leser, der das allgemeine Verfahren von Runge nicht kennt, sei es für unseren Fall kurz angegeben: Es genügt offenbar, jeden der beiden Pole $z=+i$ und $z=-i$ für sich nach $z=-1$ zu verlegen, also etwa zu zeigen, daß es zu einem beliebig gegebenen Polynom $Q(x)$ ein neues Polynom $Q^*(x)$ gibt, so daß im ganzen Gebiete G die Ungleichung

$$\left|Q^*\left(\frac{1}{z+1}\right)-Q\left(\frac{1}{z-i}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

besteht. Zu diesem Zwecke teilen wir den Viertelkreis $r=1$, $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$ in N Teile durch die aufeinander folgenden Punkte $z_0=i, z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}, z_N=-1$, die so nahe aneinander gelegen sind, daß der Abstand zweier aufeinander folgenden Punkte kleiner ist als der Abstand des genannten Viertelkreises vom Rande des Gebietes G. Wir führen die Verschiebung des Poles von $z=i$ nach $z=-1$ in N Schritten aus, indem wir ihn zunächst von $z_0=i$ nach z_1, dann von z_1 nach $z_2, \ldots$ und schließlich von z_{N-1} nach $z_N=-1$ verlegen. Führen wir etwa den ersten Schritt aus (die anderen verlaufen wörtlich ebenso), d. h. bestimmen wir ein Polynom $Q_1(x)$ so, daß im Gebiete G die Ungleichung

$$\left|Q_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right)-Q\left(\frac{1}{z-z_0}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2N}$$

besteht. Nach Annahme gibt es einen Kreis $|z-z_1|=\varrho$, welcher z_0 im Innern enthält, dessen Äußeres aber das Gebiet G ganz umfaßt. Weil die gegebene Funktion $Q\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ für $|z-z_1|>\varrho$ einschließlich des unendlich fernen Punktes regulär ist, läßt sie sich für $|z-z_1|>\varrho$ in eine Potenzreihe nach Potenzen von $\frac{1}{z-z_1}$ entwickeln,

$$Q\left(\frac{1}{z-z_0}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{(z-z_1)^\nu} \qquad (|z-z_1|>\varrho).$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig in G, und es läßt sich daher ein M so finden, daß in G die Ungleichung

$$\left|Q\left(\frac{1}{z-z_0}\right)-\sum_{\nu=0}^{M}\frac{c_\nu}{(z-z_1)^\nu}\right|<\frac{\varepsilon}{2N}$$

besteht. Somit ist das Polynom $Q_1(x)=\sum_{\nu=0}^{M}c_\nu x^\nu$ von der gewünschten Art.

Durchführung der Konstruktion.

Wir gehen von einem möglichst einfachen Polynom, etwa $P_0(x) = x$, aus und bilden die Funktion

$$P_0\left(\frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{z+1}$$

mit dem einzigen Pole $z = -1$. Indem wir $z = e^{\pi s}$ setzen, erhalten wir die meromorphe periodische Funktion der Periode $2i$

$$f_0(s) = \frac{1}{e^{\pi s}+1}$$

mit den Polen $s = (2q+1)i$ $(q = 0, \pm 1, \ldots)$. Diese Funktion $f_0(s)$ soll bei unserer Konstruktion die Ausgangsfunktion sein. [Wir haben mit Absicht keinen Pol in den Punkt $s = 0$ gelegt, um bei dem jetzt folgenden sukzessiven Wegräumen der Pole bequem symmetrisch in den beiden Halbebenen $t > 0$ und $t < 0$ vorgehen zu können.] Den Entwicklungen $\sum_0^\infty (-1)^m z^m$ und $\sum_1^\infty (-1)^{m-1} z^{-m}$ von $\frac{1}{z+1}$ für $|z| < 1$ bzw. $|z| > 1$ entsprechend lauten die Dirichletentwicklungen von $f_0(s)$ in den beiden Halbebenen $(-\infty, 0)$ bzw. $(0, +\infty)$

$$f_0(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{m\pi s} \qquad (\sigma < 0)$$

und

$$f_0(s) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-m\pi s} \qquad (\sigma > 0);$$

wir bemerken, daß die erste das konstante Glied 1, die zweite das konstante Glied 0 hat. Wir gehen nun dazu über, die Pole $(2q+1)i$ der Funktion $f_0(s)$ durch Addition weiterer meromorpher periodischer Funktionen (mit größeren und größeren Perioden) wegzuschaffen, wobei wir uns das Ziel vor Augen halten müssen, schließlich zu einer überall regulären, in $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ fastperiodischen Funktion $f(s)$ mit verschiedenen Dirichletentwicklungen in diesen beiden Halbebenen zu gelangen. Bei der Konstruktion benutzen wir eine feste positive Zahlenfolge $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \ldots$ mit

$$\sum_1^\infty \varepsilon_n < \frac{1}{2}.$$

1. Schritt. Die obige Funktion

$$f_0(s) = P_0\left(\frac{1}{e^{\pi s}+1}\right) = \frac{1}{e^{\pi s}+1}$$

ist periodisch mit der Periode $2i$. Wir können sie aber auch als periodisch mit der doppelten Periode $4i$ auffassen und wollen dementsprechend nunmehr durch die Transformation $e^{\frac{\pi}{2}s} = z$ (statt wie oben durch die

Transformation $e^{\pi s} = z$) von der s-Ebene zu einer z-Ebene übergehen. Wir erhalten eine rationale Funktion $R_0(z)$, nämlich die Funktion

$$R_0(z) = P_0\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{z^2+1},$$

die nunmehr zwei Pole in $z = i$ und $z = -i$ (statt nur einen Pol in $z = -1$) aufweist. Wir betrachten speziell die beiden vertikalen Geraden $\sigma = -1$ und $\sigma = +1$ der s-Ebene; sie gehen bei unserer Transformation $z = e^{\frac{\pi}{2}s}$ in die Kreise $|z| = r_1' = e^{-\frac{\pi}{2}}$ (<1) und $|z| = r_2' = e^{\frac{\pi}{2}}$ (>1) über. Mittels des vorausgeschickten Hilfssatzes verlegen wir die beiden Pole $z = \pm i$ nach dem Punkte $z = -1$, genau gesprochen, wir bestimmen ein Polynom $P_1(x)$ so, daß im ganzen Gebiete $G_1 = G(r_1', r_2')$ (siehe Fig. 1) die Ungleichung

$$\left| P_1\left(\frac{1}{z+1}\right) - R_0(z) \right| < \varepsilon_1 \tag{2}$$

besteht. Indem wir nunmehr wieder durch die Transformation $z = e^{\frac{\pi}{2}s}$ zur s-Ebene zurückkehren, erhalten wir aus $P_1\left(\frac{1}{z+1}\right)$ eine mit der Periode $4i$ periodische meromorphe Funktion

$$f_1(s) = P_1\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}s}+1}\right),$$

die überall regulär ist, bis auf Pole in den (dem Punkte $z = -1$ entsprechenden) Punkten $2(2q+1)i$, die doppelt so dünn gesät sind, wie die Pole $(2q+1)i$ von $f_0(s)$. Diese Funktion $f_1(s)$ genügt nach (2) in demjenigen Teil der s-Ebene, welcher bei unserer Transformation $z = e^{\frac{\pi}{2}s}$ Bildbereich des Gebietes G_1 ist, d. h. in den beiden Halbebenen $\sigma < -1$ und $\sigma > 1$ sowie in den periodisch gelegenen Verbindungsrechtecken $-1 \leqq \sigma \leqq 1$, $4q - \frac{1}{2} < t < 4q + \frac{1}{2}$ der Ungleichung

$$|f_1(s) - f_0(s)| < \varepsilon_1; \tag{3}$$

uns interessieren nur die beiden Halbebenen $\sigma < -1$ und $\sigma > 1$ und das eine Verbindungsrechteck ($q = 0$ entsprechend) $-1 \leqq \sigma \leqq 1$, $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$. Wir bezeichnen das aus diesen drei Stücken zusammengesetzte Gebiet (siehe Fig. 2) mit Γ_1.

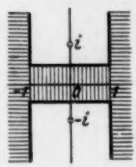


Fig. 2.

Im ganzen Gebiete Γ_1 gilt also gewiß die Ungleichung (3). Schließlich bemerke ich noch, daß sowohl in der Dirichletentwicklung (Laurententwicklung) von $f_1(s) - f_0(s)$ für $\sigma < 0$, wie in der Entwicklung dieser Funktion für $\sigma > 0$ die konstanten Glieder a_0' bzw. b_0' numerisch kleiner als ε_1 sind; in der Tat gehen ja die erwähnten Entwicklungen

aus den Entwicklungen $\sum\limits_0^\infty a'_m z^m$ (um $z=0$) bzw. $\sum\limits_0^\infty b'_m z^{-m}$ (um $z=\infty$) der Funktion $P_1\left(\frac{1}{z+1}\right)-R_0(z)$ hervor, wenn $z=e^{\frac{\pi}{2}s}$ gesetzt wird, und in diesen letzten Entwicklungen sind nach (2) die konstanten Glieder a'_0 und b'_0 gewiß numerisch kleiner als ε_1.

2. Schritt. Die mit der Periode $4i$ periodische, bis auf die Pole in $(4q+2)i$ reguläre Funktion

$$f_1(s)=P_1\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}s}+1}\right)$$

fassen wir nun als eine mit der Periode $8i$ periodische Funktion auf und üben dementsprechend nunmehr die Transformation $e^{\frac{\pi}{4}s}=z$ auf sie aus. Dadurch geht sie in die rationale Funktion

$$R_1(z)=P_1\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$$

mit den beiden Polen $z=\pm i$ über. Wir betrachten in der s-Ebene jetzt die beiden vertikalen Geraden $\sigma=-\frac{1}{2}$ und $\sigma=\frac{1}{2}$ (statt wie beim ersten Schritt die beiden Geraden $\sigma=\pm 1$); sie gehen bei der Transformation $z=e^{\frac{\pi}{4}s}$ in die beiden Kreise $|z|=r_1^{(2)}=e^{-\frac{\pi}{8}}$ (<1) und $|z|=r_2^{(2)}=e^{\frac{\pi}{8}}$ (>1) über. Wir betrachten (siehe Fig. 1) das Gebiet $G(r_1^{(2)},r_2^{(2)})=G_2$ und verlegen die beiden Pole der Funktion $R_1(z)$ von $z=\pm i$ nach $z=-1$, indem wir ein Polynom $P_2(x)$ so bestimmen, daß im ganzen Gebiete G_2 die Ungleichung

$$\left|P_2\left(\frac{1}{z+1}\right)-R_1(z)\right|<\varepsilon_2 \tag{4}$$

besteht. Indem wir mittels der Transformation $z=e^{\frac{\pi}{4}s}$ zur s-Ebene zurückkehren, erhalten wir aus $P_2\left(\frac{1}{z+1}\right)$ eine mit der Periode $8i$ periodische Funktion

$$f_2(s)=P_2\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}s}+1}\right),$$

die bis auf die (dem Punkte $z=-1$ entsprechenden) Punkte $4(2q+1)i$ überall regulär ist, und welche im ganzen Gebiete

$$\Gamma_2: \qquad \sigma<-\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq\frac{1}{2}, \quad -1<t<1; \quad \sigma>\frac{1}{2}$$

(wie oben bei Γ_1 benutzen wir auch bei Γ_2 von den unendlich vielen Verbindungsrechtecken zwischen der linken und der rechten Halbebene

nur das eine, welche den Punkt $s = 0$ enthält) die Ungleichung

$$|f_2(s) - f_1(s)| < \varepsilon_2$$

erfüllt, welche aus (4) durch das Einsetzen von $z = e^{\frac{\pi}{4}s}$ hervorgeht. Und schließlich bemerken wir, daß die konstanten Glieder $a_0^{(2)}$ bzw. $b_0^{(2)}$ der beiden Dirichletentwicklungen der periodischen Funktion $f_2(s) - f_1(s)$ für $\sigma < 0$ bzw. $\sigma > 0$ beide numerisch kleiner als ε_2 sind; denn $a_0^{(2)}$ und $b_0^{(2)}$ sind ja gerade die konstanten Glieder in den Entwicklungen $\sum_0^\infty a_m^{(2)} z^m$ (um $z = 0$) und $\sum_0^\infty b_m^{(2)} z^{-m}$ (um $z = \infty$) der Funktion $P_2\left(\frac{1}{z+1}\right) - R_1(z)$, welche nach (4) in den Punkten $z = 0$ und $z = \infty$ numerisch kleiner als ε_2 ist.

Nach $(n-1)$ Schritten sind wir, von der Funktion $f_0(s)$ mit der Periode $2i$ aus, über die Funktion $f_1(s)$ der Periode $4i$, die Funktion $f_2(s)$ der Periode $8i$ usw. zu einer Funktion $f_{n-1}(s)$ der Periode $2^n i$ mit den folgenden Eigenschaften gelangt: Sie hat die Form

$$f_{n-1}(s) = P_{n-1}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2^{n-1}}s} + 1}\right),$$

ist also in der ganzen s-Ebene regulär bis auf die äquidistant liegenden Pole $2^{n-1}(2q+1)i$ $(q = 0, \pm 1, \ldots)$ und erfüllt im Gebiete

$$\Gamma_{n-1}: \quad \sigma < \frac{-1}{n-1}; \quad \frac{-1}{n-1} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{n-1}, \quad -2^{n-3} < t < 2^{n-3}; \quad \sigma > \frac{1}{n-1}$$

die Ungleichung

$$|f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)| < \varepsilon_{n-1},$$

und die konstanten Glieder $a_0^{(n-1)}$ und $b_0^{(n-1)}$ in den Dirichletentwicklungen von $f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)$ für $\sigma < 0$ bzw. $\sigma > 0$ sind alle beide numerisch kleiner als ε_{n-1}.

n-ter Schritt. Wir fassen

$$f_{n-1}(s) = P_{n-1}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2^{n-1}}s} + 1}\right)$$

als eine mit der Periode $2 \cdot 2^n i = 2^{n+1} i$ periodische Funktion auf und üben dementsprechend die Transformation $z = e^{\frac{\pi}{2^n}s}$ auf sie aus, wodurch wir die rationale Funktion

$$R_{n-1}(z) = P_{n-1}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$$

mit den beiden Polen $z = \pm i$ erhalten. Mit $r_1^{(n)} < 1$ bzw. $r_2^{(n)} > 1$ bezeichnen wir die Radien der Kreise um den Punkt $z = 0$, welche bei der Transformation $z = e^{\frac{\pi}{2^n} s}$ den beiden Geraden $\sigma = -\frac{1}{n}$ bzw. $\sigma = \frac{1}{n}$ der s-Ebene entsprechen, und mit G_n bezeichnen wir das Gebiet $G(r_1^{(n)}, r_2^{(n)})$ (vgl. Fig. 1). Wir bestimmen das Polynom $P_n(x)$ so, daß im ganzen Gebiete G_n die Ungleichung

$$(5) \qquad \left| P_n\left(\frac{1}{z+1}\right) - R_{n-1}(z) \right| < \varepsilon_n$$

besteht. Nunmehr kehren wir durch unsere Transformation $z = e^{\frac{\pi}{2^n} s}$ zur s-Ebene zurück und erhalten aus $P_n\left(\frac{1}{z+1}\right)$ die mit der Periode $2^{n+1} i$ periodische Funktion

$$f_n(s) = P_n\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2^n} s} + 1}\right),$$

die überall regulär ist bis auf die Pole $2^n(2q+1)i$ $(q = 0, \pm 1, \ldots)$. Die Differenz $f_n(s) - f_{n-1}(s)$ erfüllt wegen (5) im Gebiete

$$\Gamma_n: \quad \sigma < -\frac{1}{n}; \quad -\frac{1}{n} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{n}, \quad -2^{n-2} < t < 2^{n-2}; \quad \sigma > \frac{1}{n}$$

die Ungleichung

$$(6) \qquad |f_n(s) - f_{n-1}(s)| < \varepsilon_n,$$

und die konstanten Glieder $a_0^{(n)}$ und $b_0^{(n)}$ ihrer Dirichletentwicklungen für $\sigma < 0$ bzw. $\sigma > 0$ $\Big($d. h. die konstanten Glieder der Potenzreihenentwicklungen $\sum a_m^{(n)} z^m$ bzw. $\sum b_m^{(n)} z^{-m}$ der Funktion $P_n\left(\frac{1}{z+1}\right) - R_{n-1}(z)\Big)$ sind wegen (5) beide numerisch kleiner als ε_n.

G r e n z ü b e r g a n g. Ich behaupte, daß der Grenzwert

$$f(s) = \lim_{n \to \infty} f_n(s)$$

für alle s existiert und eine ganze Transzendente mit den sämtlichen Eigenschaften des in der Einleitung aufgestellten Satzes liefert. Bei diesem Nachweis wird es gelegentlich bequem sein, die Funktion $f(s)$ statt als Grenzwert einer Folge lieber als Summe einer Reihe

$$(7) \qquad f(s) = f_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(s) - f_{n-1}(s))$$

aufzufassen.

1. Zunächst ist $f(s)$ eine g a n z e T r a n s z e n d e n t e. Denn bei einem beliebig großen festen ϱ liegt ja der Kreis $|s| < \varrho$ in einem der Gebiete Γ_N

und also a fortiori in allen Gebieten Γ_n mit $n \geqq N$, und wir erhalten somit

$$f(s) = \left\{ f_0(s) + \sum_{n=1}^{N} (f_n(s) - f_{n-1}(s)) \right\} + \sum_{n=N+1}^{\infty} (f_n(s) - f_{n-1}(s))$$

$$= f_N(s) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (f_n(s) - f_{n-1}(s)),$$

wo die sämtlichen rechts auftretenden Funktionen $f_n(s)$ $(n \geqq N)$ im Kreise $|s| < \varrho$ regulär sind und die Reihe rechts gleichmäßig in $|s| < \varrho$ konvergiert, weil ja daselbst, nach (6), für jedes $n > N$ die Ungleichung

$$|f_n(s) - f_{n-1}(s)| < \varepsilon_n$$

besteht.

2. $f(s)$ ist fastperiodisch in $(-\infty, 0]$ und in $[0, \infty)$. Denn die einzelnen Funktionen $f_n(s)$ sind fastperiodische Funktionen (sogar reguläre reinperiodische Funktionen) in $(-\infty, 0)$ und in $(0, \infty)$, und bei jedem festen $\eta > 0$ konvergiert die Folge $f_n(s)$ gleichmäßig in $(-\infty, -\eta)$ und in (η, ∞), weil von einer gewissen Stelle N an die beiden letztgenannten Halbebenen dem Gebiete Γ_n $(n \geqq N)$ angehören und daher für jedes $n \geqq N$ die Ungleichung

$$|f_n(s) - f_{n-1}(s)| < \varepsilon_n \begin{cases} \text{für } \sigma < -\eta \\ \text{für } \sigma > \eta \end{cases}$$

besteht.

3. Schließlich sind die Dirichletentwickelungen von $f(s)$ in $-\infty, 0]$ und in $[0, \infty)$ voneinander verschieden; wir haben es sogar so eingerichtet, daß schon ihre konstanten Glieder a_0 und b_0 voneinander verschieden sind. Diese konstanten Glieder sind nämlich die Grenzwerte der entsprechenden konstanten Glieder der Funktion $f_n(s)$ für $n \to \infty$, d. h. sie werden durch Summation der konstanten Glieder der einzelnen Funktionen $f_0(s)$ und $f_n(s) - f_{n-1}(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ der Reihe (7) gebildet; somit erhalten wir

$$a_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_0^{(n)}, \qquad b_0 = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_0^{(n)}.$$

Wegen $|a_0^{(n)}| < \varepsilon_n$, $|b_0^{(n)}| < \varepsilon_n$ ist daher

$$|a_0| > 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |b_0| < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{2}.$$

Also ist $a_0 \neq b_0$ und der Beweis vollendet.

Schlußbemerkung.

Durch eine leichte Abänderung der im vorangehenden auseinandergesetzten Konstruktionsmethode gelingt es, auch eine andere, sehr naheliegende Frage zu beantworten, welche die Definition der Fastperio-

dizität einer in einem Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ regulär analytischen Funktion $f(s)$ betrifft. Die Frage lautet:

Genügt es, bei der Definition der Fastperiodizität von $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ zu verlangen, daß die Funktion auf jeder einzelnen vertikalen Geraden fastperiodisch ist, d. h. läßt sich hieraus (wie bei den reinperiodischen Funktionen) folgern, daß $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ gleichartig fastperiodisch ist?

Es ergibt sich, daß die Forderung der gleichartigen Fastperiodizität tatsächlich nötig ist, d. h. *es gibt Funktionen, die in einem Streifen* (α, β) *regulär und auf jeder vertikalen Geraden des Streifens fastperiodisch sind, ohne in* $[\alpha, \beta]$ *gleichartig fastperiodisch zu sein.*

Ich werde mich bei dieser Gelegenheit damit begnügen, dieses Ergebnis ohne Beweis anzuführen; in einer weiteren (anderswo erscheinenden) Arbeit werde ich die gesamte Klasse aller Funktionen, die in einem Streifen regulär und auf allen Geraden des Streifens fastperiodisch sind, einem genaueren Studium unterwerfen.

(Eingegangen am 18. 10. 1929.)

Zur Theorie der Überkonvergenz.

Von

Alexander Ostrowski in Basel.

Inhalt.

Einleitung.

1. Hat eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ einen (von 0 verschiedenen) endlichen Konvergenzradius, so können trotzdem gewisse Abschnittfolgen dieser Potenzreihe in einem über das Innere des Konvergenzkreises hinausragenden Gebiete gleichmäßig[1]) konvergieren, wie zuerst M. B. Porter[2]) an Beispielen gezeigt hat.

---

[1]) Dabei sagen wir hier und im folgenden, eine Reihe konvergiere gleichmäßig *in* einer Punktmenge, wenn diese Reihe auf einer geeigneten Umgebung eines jeden *inneren* Punktes der Punktmenge gleichmäßig konvergiert.

[2]) M. B. Porter, On the polynomial convergents of a power series, Annals of math. (2) 8 (1906), pp. 189–192. Die von Porter betrachteten Beispiele haben die Form $\sum c_\nu (z(1+z))^\nu$. Dieselbe Klasse von Reihen wurde gleichzeitig mit Porter in einem anderen Zusammenhang von G. Faber betrachtet (Münchener Berichte, Math.-phys. Klasse, **36** (1906), S. 528). Indessen hat Faber die Eigenschaft der Überkonvergenz nicht besonders hervorgehoben. Später hat R. Jentzsch (Acta mathem. **41** (1918), S. 253–270) die Möglichkeit der Überkonvergenz wieder entdeckt und zwei etwas künstlich konstruierte Beispiele dafür gegeben. Die Portersche Klasse von Beispielen wurde dann von E. Goursat im Cours d'Analyse 2 (4. Aufl., S. 284) wiedergefunden.

In den Jahren 1921—1925 habe ich mich nun wiederholt mit der Erscheinung der Überkonvergenz[3]) beschäftigt, wobei sich namentlich ein wesentlicher Zusammenhang zwischen dem Auftreten der Überkonvergenz und dem Vorkommen von „Lücken“ in der Exponentenfolge der Potenzreihe ergeben hat. Ein spezielles im Rahmen dieser Untersuchungen sich ergebendes Resultat, das wir im folgenden brauchen werden und als „speziellen Lückensatz“ bezeichnen wollen, lautet: *Es sei* $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* 1, *und es möge allgemein* $a_\nu = 0$ *für* $n_k < \nu < n_k'$ *sein, wobei* $n_k \to \infty$, $\frac{n_k'}{n_k} \to \infty$ *ist. Dann konvergiert die Folge der den Lücken* $n_k \ldots n_k'$ *entsprechenden Abschnitte*

$$s_{n_k}(z)=\sum_{\nu=0}^{n_k} a_\nu z^\nu$$

im ganzen Regularitätsgebiet von $f(z)$ *gleichmäßig gegen* $f(z)$. Die prinzipiell interessanteste Folgerung aus diesem Satze, daß nämlich unter den Bedingungen dieses Satzes das Regularitätsgebiet von $f(z)$ einfach zusammenhängend und schlicht ist, brauchen wir allerdings im folgenden nicht; dagegen werden wir von der Tatsache Gebrauch machen, daß sämtliche Randpunkte des vollständigen Konvergenzgebietes der Abschnittsfolge $s_{n_k}(z)$ singuläre Punkte von $f(z)$ sind.

2. In dieser Mitteilung soll nun ein Satz bewiesen werden, der zeigt, inwiefern ein (zusammenhängendes) Gebiet, in dem eine überkonvergente Folge von Abschnitten einer Potenzreihe konvergieren kann, willkürlich gewählt werden kann. Da es sich um eine Folge von *Polynomen* handelt, muß jedes zusammenhängende vollständige Konvergenzgebiet dieser Folge *einfach zusammenhängend* sein. Ferner müssen wir naturgemäß verlangen, daß es mit dem Konvergenzkreis der Potenzreihe zusammenhängt, da nur dann die Summe der Reihe sicher eine analytische Fortsetzung der Potenzreihe ist. Endlich darf natürlich der unendlich ferne Punkt nicht im Innern des betreffenden Gebietes liegen. Wir werden nun beweisen, daß unser Gebiet im übrigen vollständig willkürlich gewählt werden kann, mit anderen Worten:

Ist G ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Nullpunkt, dagegen aber nicht den unendlich fernen Punkt im Innern enthält, so gibt es eine in G reguläre analytische Funktion $f(z)$, *die G zum voll-*

---

[3]) Vgl. meinen Vortrag auf der Leipziger Mathematikertagung 1923, Jahresber. der Deutschen Mathematikervereinigung **32** (1923), S. 286—295, sowie die dort zitierten Abhandlungen; ferner einen Vortrag vor der London Math. Soc., Journal Lond. Math. Soc. **1** (1926), S. 251ff.

ständigen Regularitätsgebiet besitzt und sich durch eine geeignete im ganzen Gebiet G gleichmäßig konvergierende Abschnittsfolge ihrer Nullpunktsentwicklung darstellen läßt[4]).

3. Bekanntlich kann jedes (zusammenhängende) Gebiet ein vollständiges Existenzgebiet einer analytischen Funktion sein. Wenn nun insbesondere das gegebene Gebiet einfach zusammenhängend ist und den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält, so folgt aus unserem Satze, daß man eine solche Funktion sogar so bilden kann, daß sie sich im ganzen Gebiet durch eine geeignete Abschnittsfolge eines geeigneten Funktionselements darstellen läßt.

4. Den Beweis dieses Satzes erbringen wir im § 3 der vorliegenden Mitteilung, der unabhängig von den beiden anderen Paragraphen gelesen werden kann. Im § 1 gebe ich zwei besonders einfache explizite Beispiele, erstens für die Überkonvergenz überhaupt, zweitens für einen Fall, in dem der spezielle Lückensatz direkt anwendbar ist.

Im § 2 beweise ich verschiedene Spezialfälle des obigen allgemeinen Satzes nach einer Methode, die sich zwar nicht ohne weiteres auf den allgemeinsten Fall übertragen läßt, aber vielleicht wegen der dabei zu benutzenden Überlegungen und des Zusammenhangs mit einigen Ansätzen von Herrn Kakeya von Interesse ist.

§ 1.

Zwei einfache Beispiele für Überkonvergenz.

5. Wir diskutieren zunächst ein einfaches Beispiel für Überkonvergenz, das einen besonders zugänglichen Spezialfall der Beispiele von Porter-Goursat darstellt. Es sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z(1-z))^{4^n}}{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z), \qquad \varphi_n(z) = \frac{(z(1-z))^{4^n}}{p_n},$$

wo p_n der absolut größte Koeffizient der Binomialentwicklung von $(z(1-z))^{4^n}$ ist, so daß alle Koeffizienten von $\varphi_n(z)$ absolut $\leqq 1$ sind und wenigstens ein Koeffizient gleich 1 ist. Andererseits schließen sich die Polynome $\varphi_n(z)$ zu einer Potenzreihe zusammen, da der höchste Exponent eines $\varphi_n(z)$ gleich $2 \cdot 4^n$ ist, der niedrigste Exponent von $\varphi_{n+1}(z)$ aber gleich $4 \cdot 4^n$. Da daher der Konvergenzradius von $f(z)$ genau gleich 1 ist, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ für $|z| < 1$ gleichmäßig. Setzt man aber $1 - z = y$, so verwandelt sich $\varphi_n(z)$ wegen $z(1-z) = y(1-y)$ in

[4]) Ich habe diesen Satz ohne Beweis in meinem in der Fußnote [3]) an letzter Stelle zitierten Vortrag angegeben.

$\varphi_n(y) = \varphi_n(1-z)$, so daß die durch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ dargestellte Abschnittsfolge von $f(z)$ auch für $|1-z| < 1$ gleichmäßig konvergiert.

6. Es ist nicht schwer, unser Beispiel, in dem übrigens p_n auch durch 2^{4^n} ersetzt werden könnte, vollständig zu diskutieren. Da $|p_n| = p_n$ zwischen der Summe der Koeffizienten von $(1+z)^{4^n}$ und deren arithmetischem Mittel liegt, folgt:

$$2^{4^n} > p_n > \frac{2^{4^n}}{4^n+1},$$

so daß die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{4^n}}{p_n}$ für $|u| < 2$ gleichmäßig konvergiert, für $|u| \geqq 2$ dagegen überall divergiert und übrigens nach dem Hadamardschen Lückensatz den Kreis $|u| = 2$ zur natürlichen Grenze besitzt. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z(1-z))^{4^n}}{p_n}$ innerhalb des Cassinischen Ovals $|z(1-z)| = 2$ gleichmäßig und divergiert überall auf und außerhalb dieser Kurve. Da der Übergang von $u = z(1-z)$ zu z durch eine algebraische Funktion vermittelt wird, hat zudem $f(z)$ das Cassinische Oval $|z(1-z)| = 2$ zur natürlichen Grenze.

7. Wir wollen zweitens ein von mir bereits früher angegebenes Beispiel[5]) einer Potenzreihe, auf die der spezielle Lückensatz anwendbar ist, diskutieren. Wir setzen allgemein für ein ganzes $k \geqq 2$ $K = K(k) = 10^{10^k}$. Es sei dann

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(K^2)!\, z^K}{K^{2K^2}} \cdot \sum_{\nu=0}^{K^4} \frac{(-K^2 z)^\nu}{\nu!} = \sum_{k=2}^{\infty} \psi_k(z),$$

$$\psi_k(z) = \frac{(K^2)!\, z^K}{K^{2K^2}} \sum_{\nu=0}^{K^4} \frac{(-K^2 z)^\nu}{\nu!} = \frac{(K^2)!}{K^{2K^2}} z^K \cdot \sigma_k(z),$$

$$\sigma_k(z) = \sum_{\nu=0}^{K^4} \frac{(-K^2 z)^\nu}{\nu!}.$$

Da der höchste Exponent von $\psi_k(z)$ gleich $K^4 + K$ ist, dagegen der niedrigste Exponent von $\psi_{k+1}(z)$ gleich $10^{10^{k+1}} = K^{10}$, schließen sich die Polynome $\psi_k(z)$ zu einer Potenzreihe zusammen, und für die zwischen $\psi_k(z)$ und $\psi_{k+1}(z)$ liegenden Lücken konvergieren die Quotienten der beiden „Randexponenten" dieser Lücken $\frac{K^{10}}{K^4+K}$ für $k \to \infty$ gegen ∞.

[5]) Vgl. die in der Fußnote [4]) zitierten Mitteilungen, sowie Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung **34** (1925), S. 183.

Wir behaupten nun, daß die Potenzreihe $f(z)$ den Konvergenzradius 1 hat und eine Funktion darstellt, die in der Halbebene $\Re z > -1$ regulär ist und die Gerade $\Re z = -1$ zur singulären Linie hat, daß ferner, dem obigen Satze entsprechend, die durch die Summe $\sum_{k=1}^{n} \psi_k(z)$ dargestellten Abschnitte von $f(z)$ in der ganzen Halbebene $\Re z > -1$ gleichmäßig konvergieren.

Wir bemerken zuerst, daß die absolut größten Koeffizienten von $\psi_k(z)$ gleich ± 1 sind. Denn die einzelnen Koeffizienten von $\sigma_k(z) = \sum_{\nu=0}^{K^4} \frac{(-K^2 z)^\nu}{\nu!}$ multiplizieren sich beim Übergang von z^ν zu $z^{\nu+1}$ mit $\frac{-K^2}{\nu+1}$ und dieser mit wachsendem ν abnehmende Faktor wird gleich -1 für $\nu + 1 = K^2$ und ist für größere $\nu + 1$ absolut kleiner als 1. Daher sind die beiden absolut größten Koeffizienten von $\sigma_k(z)$ gleich $\pm \frac{K^{2K^2}}{K^2!}$, und die entsprechenden Koeffizienten in $\psi_k(z)$ sind ± 1. Folglich ist der Konvergenzradius von $f(z)$ gleich 1.

Zweitens gilt für $|z| \leqq k$

$$|\sigma_k(z) - e^{-K^2 z}| \leqq e^{-K^4}. \tag{1}$$

Denn der Quotient des $(\nu+1)$-ten Gliedes von $e^{-K^2 z}$ durch das ν-te ist $\frac{-K^2 z}{\nu+1}$, daher für $|z| \leqq k$, $\nu \geqq K^4$ absolut $\leqq \frac{k}{K^2} < \frac{1}{2}$. Daher folgt:

$$|e^{-K^2 z} - \sigma_k(z)| \leqq \frac{K^{2K^4} k^{K^4}}{K^4!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)$$
$$< \frac{(2kK^2)^{K^4} e^{K^4}}{K^{4K^4}} = \left(\frac{2ke}{K^2}\right)^{K^4} < e^{-K^4},$$

da allgemein für ganze $n \geqq 1$ $\frac{1}{n!} < \frac{e^n}{n^n}$ ist.

Drittens folgt aus (1) für $|z| \leqq k$, $\Re z > \frac{1}{k} - 1$, wegen $\frac{n!}{n^n} < 3\sqrt{n}\, e^{-n}$, $K > 3k^2$,

$$\sigma_k(z) \leqq 1 + e^{\left(1-\frac{1}{k}\right)K^2},$$
$$\psi_k(z) < 6k^K K \cdot e^{-K^2} e^{\left(1-\frac{1}{k}\right)K^2} < e^{2kK} e^{-\frac{1}{k}K^2} < e^{-kK},$$

so daß $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z)$ *in einer Umgebung eines jeden* z *mit* $\Re z > -1$ *gleichmäßig konvergiert.*

Viertens folgt für $\Re z \leqq -1$, $|z| \leqq k$, aus (1) wegen $|z| \geqq 1$, $\frac{n^n}{n!} < e^n$

$$|\sigma_k(z)| \geqq |e^{-K^2 z}| - 1 > \frac{1}{2} e^{K^2}, \qquad |\psi_k(z)| \geqq \frac{1}{2} e^{-K^2} e^{K^2} = \frac{1}{2},$$

so daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z)$ für alle z mit $\Re z \leqq -1$ divergiert. Daraus folgt aber nach dem oben zitierten Satz, daß $f(z)$ auf der ganzen Geraden $\Re z = -1$ singulär ist, womit alle unsere Behauptungen bewiesen sind. —

Es lassen sich nun, wie im nächsten Paragraphen gezeigt werden soll, derartige Beispiele für die „größten" in Betracht kommenden Gebiete bilden.

§ 2.

Potenzreihen, deren Abschnittsfolgen in der ganzen längs einer geeigneten Kurve aufgeschnittenen Ebene konvergieren.

8. Es sei ξ ein Punkt des Einheitskreises $|z| = 1$, L eine Jordansche Linie, die ξ mit dem unendlich fernen Punkt verbindet und den Einheitskreis nur im Punkte ξ trifft. Schneidet man die Ebene längs der Kurve L auf, so entsteht ein einfach zusammenhängendes Gebiet G_L. Solche Gebiete wollen wir als L-Gebiete bezeichnen. Wir behaupten nun, daß *zu jedem L-Gebiet eine in ihm reguläre und auf L durchweg singuläre analytische Funktion gehört, die im ganzen Gebiet durch eine geeignete Abschnittsfolge ihrer Nullpunktentwicklung dargestellt wird.*

Zum Beweise schneiden wir G_L noch längs des zum Punkt ξ führenden Radius auf und bezeichnen die um diesen Radius ergänzte Kurve L mit L^* und das durch das Aufschneiden der Ebene längs L^* entstehende einfach zusammenhängende Gebiet mit G^*. Wir lassen ferner für einen beliebigen positiven Bruch $\varrho \leqq \frac{1}{2}$ eine Kreisscheibe vom Radius ϱ mit ihrem Mittelpunkt längs L^* gleiten und entfernen aus G^* alle dabei überstrichenen Punkte, und ebenso alle Punkte, die auf dem Kreise $|z| = \frac{1}{\varrho}$ und außerhalb dieses Kreises liegen. Dann bilden diejenigen Punkte der übrigbleibenden offenen Punktmenge, die sich durch einen in dieser Punktmenge verlaufenden Streckenzug mit dem Punkt $-\frac{\xi}{2}$ des Einheitskreises verbinden lassen, ein Gebiet S_ϱ. S_ϱ ist offenbar einfach zusammenhängend, da die aus der Ebene entfernten Punkte ein einziges Kontinuum bilden. Jeder Punkt von G^* gehört für hinreichend kleine ϱ allen S_ϱ an, und für $0 < \varrho < \varrho' \leqq \frac{1}{2}$ liegt $S_{\varrho'}$ mit dem Rand (bis auf $z = \infty$) ganz in S_ϱ.

Es sei nun $\varphi(z)$ ein in G^* (und damit in allen S_ϱ) eindeutiger Zweig von $\sqrt{z}$, und $a_1 + a_2 + \dots$ sei eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern.

Man bestimme nun zuerst ein Polynom $P_1(z)$, so daß in $S_{\frac{1}{2}}$ durchweg

$$|\varphi(z) - P_1(z)| \leqq a_1$$

ist. Dies ist möglich, da $\varphi(z)$ in $S_{\frac{1}{4}} \succ S_{\frac{1}{2}}$ regulär und eindeutig ist. Ist der Grad von $P_1(z)$ etwa n_1, so bestimme man ein Polynom $P_2(z)$, vom

Grade n_2 etwa, so daß in $S_{\frac{1}{4}}$ durchweg

$$|\varphi(z) - P_1(z) - z^{n_1+1} P_2(z)| \leqq a_2$$

ist. Zu diesem Zwecke genügt es, $P_2(z)$ so zu bestimmen, daß in $S_{\frac{1}{4}}$

$$\left|\frac{\varphi(z) - P_1(z)}{z^{n_1+1}} - P_2(z)\right| \leqq \frac{a_2}{4^{n_1+1}},$$

ist, und dies ist sicher möglich, da $\frac{\varphi(z) - P_1(z)}{z^{n_1+1}}$ in $S_{\frac{1}{8}}$ regulär und eindeutig ist. Auf diese Weise erhalten wir sukzessive eine unendliche Folge von Polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ resp. von den Geraden $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, so daß in $S_{(\frac{1}{2})^k}$ durchweg

(2) $$|\varphi(z) - P_1(z) - z^{n_1+1} P_2(z) - \ldots - z^{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+k-1} P_k(z)| \leqq a_k$$

ist. Setzen wir allgemein $z^{n_1+\ldots+n_{k-1}+k-1} P_k(z) = Q_k(z)$, so ist der niedrigste Exponent in $Q_k(z)$ nicht kleiner als $n_1 + \ldots + n_{k-1} + k - 1$, also größer als der höchste Exponent $n_1 + \ldots + n_{k-1} + k - 2$ von $Q_{k-1}(z)$. Daher stellt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z)$ eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ dar, in der gewisse Aggregate aufeinander folgender Glieder in Polynome $Q_k(z)$ zusammengefaßt erscheinen. Unsere Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z)$ konvergiert im ganzen Gebiet G^* gleichmäßig gegen $\varphi(z)$. Andererseits hat die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ den Konvergenzradius 0. Denn sonst würde $\mathfrak{P}(z)$ in einer Umgebung des Nullpunktes gleichmäßig konvergieren, und die Grenzfunktion müßte eine in $z = 0$ reguläre analytische Fortsetzung von $\varphi(z)$ darstellen, während $\varphi(z) = \sqrt{z}$ in $z = 0$ eine Verzweigungsstelle hat[*]).

9. Die Potenzeihe $\mathfrak{P}(z)$ hat also Koeffizienten von beliebig großem absoluten Betrage, insbesondere also unendlich viele Koeffizienten, die absolut größer als 1 sind. Andererseits konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k(z)|$ in G^* gleichmäßig, da in $S_{(\frac{1}{2})^{k-1}}$ aus (2), für k und $k-1$ geschrieben, $|Q_k(z)| \leqq a_k + a_{k-1}$ folgt und auch die Reihe $a_1 + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \ldots$ konvergiert. Man kann daher in der Reihe $\sum Q_k(z)$ beliebig viele Glieder $Q_k(z)$ weglassen, ohne daß sie aufhört, in G^* gleichmäßig zu konvergieren. Es sei nun μ_k der (oder ein) Koeffizient von $Q_k(z)$ von größtem absolutem Betrage. Dann sind unendlich viele μ_k absolut > 1 und man kann annehmen, indem man eventuell gewisse $Q_k(z)$ wegläßt und die übrigbleibenden umnumeriert, daß durchweg $|\mu_k| > 1$ ist. Allerdings braucht von nun an die Grenzfunktion von $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z)$ in G^* nicht mehr gleich $\varphi(z)$ zu sein.

---

[*]) Vgl. zu dieser Konstruktion Kakeya, Tôhoku Math. Journ. 5 (1914), S. 40 bis 44; ferner R. Jentzsch, Acta mathem. 41 (1918), S. 263—264.

Aus $|\mu_k| > 1$ folgt aber, daß auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k(z)}{\mu_k}$ in G^* gleichmäßig konvergiert. Andererseits stellt sie eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(z)$ mit dem Konvergenzradius 1 dar, da alle Koeffizienten von $\mathfrak{P}_1(z)$ absolut $\leqq 1$ und unendlich viele gleich 1 sind. Beachten wir, daß sogar in *jedem* Polynom $\frac{Q_k(z)}{\mu_k}$ wenigstens ein Koeffizient $= 1$ ist, so folgt, daß man beliebig viele Glieder in der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k(z)}{\mu_k}$ weglassen kann, ohne die gleichmäßige Konvergenz in G^* zu beeinträchtigen oder den Wert 1 des Konvergenzradius zu ändern, solange unendlich viele Glieder übrigbleiben. Es sei m_k' der niedrigste, m_k der höchte Exponent in $Q_k(z)$. Man kann nun annehmen, daß mit $k \to \infty$ auch $\frac{m_k'}{m_{k-1}} \to \infty$ gilt, indem man eventuell gewisse Glieder wegläßt und die übrigbleibenden umnumeriert[7]). Dann ist aber auf $\mathfrak{P}_1(z)$ der im § 1 angegebene Satz anwendbar und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k(z)}{\mu_k}$ konvergiert in jedem regulären Punkt von $\mathfrak{P}_1(z)$. Daraus folgt nun, daß jeder Punkt von L ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}_1(z)$ ist. Denn wäre die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k(z)}{\mu_k}$ in einer Kreisscheibe $\mathfrak{K}$ um einen Punkt ζ von L gleichmäßig konvergent, so würde sich durch den Punkt ζ eine geschlossene Jordansche Kurve (sogar ein gewöhnlicher Streckenzug) legen lassen, die den Anfangspunkt ξ von L im Innern enthält und auf der die Polynomreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k(z)}{\mu_k}$ gleichmäßig konvergierte. Dann würde aber diese Reihe auch in einer Umgebung von ξ gleichmäßig konvergieren, und da dasselbe nach dem früher Bewiesenen in jedem von ξ verschiedenen Punkt der Peripherie des Einheitskreises (der ja sicher in G^* liegt) der Fall ist, wäre die durch $\mathfrak{P}_1(z)$ dargestellte Funktion über die ganze Peripherie des Einheitskreises fortsetzbar, während $\mathfrak{P}_1(z)$ den Konvergenzradius 1 hat. Wir sehen also, daß die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(z)$ den Konvergenzradius 1 hat, ferner auf der ganzen Linie L singulär ist und daß die durch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k(z)}{\mu_k}$ dargestellte

---

[7]) Man kann auch von vornherein die rekurrente Definition der Polynome $P_k(z)$ so ansetzen, daß die Bedingung $\frac{m_k'}{m_k} \to \infty$ erfüllt wird, z. B. dadurch, daß man in der Formel (2) als Faktor bei $P_k(z)$ nicht $z^{n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+k-1}$, sondern $z^{k^2(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+k-1)}$ annimmt. Übrigens würde für unsern Zweck bereits die Annahme $\overline{\lim} \frac{m_k'}{m_k} = \infty$ ausreichen.

Abschnittsfolge von $\mathfrak{P}_1(z)$ in G^* und im Innern des Einheitskreises, also in G_L gleichmäßig konvergiert.

10. Obige Überlegungen lassen eine weitgehende Verallgemeinerung zu, die wir noch kurz besprechen wollen, obgleich diese Verallgemeinerung mit den weiteren Untersuchungen nicht zusammenhängt und wir später allgemeinere Ergebnisse auf anderem Wege erhalten werden, so daß der Schluß dieses Paragraphen auch übergangen werden kann.

Man kann z. B. eine aus dem Unendlichen kommende Jordansche Kurve in der Nähe des Einheitskreises durch eine Zickzacklinie ergänzen, die einen Teil der Peripherie des Einheitskreises (von der Gesamtlänge $< 2\pi$) wellenförmig approximiert, und dann die Ebene längs dieser Kurve (und ihrer Grenzpunkte) aufschneiden. Oder es sei G ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet, das den Einheitskreis ganz im Innern enthält. Man betrachte dann eine von der Peripherie des Einheitskreises ausgehende einfache Kurve, die im übrigen im Äußeren des Einheitskreises und innerhalb G bleibt und die ganze Berandung von G spiralenartig (topologisch gesprochen) approximiert. Auch das längs dieser Kurve aufgeschnittene Innere von G stellt das vollständige Regularitätsgebiet einer analytischen Funktion, die in ihrem gesamten Existenzgebiet durch eine geeignete Abschnittsfolge ihrer Nullpunktentwicklung dargestellt wird.

Allgemeinere und präzisere Formulierungen knüpfen an den Begriff des *irreduziblen Kontinuums zwischen zwei Punkten* an. Man nennt ein Kontinuum C *irreduzibel* zwischen den Punkten A und B, wenn es die Punkte A und B enthält und kein Teilkontinuum von C zugleich die beiden Punkte A und B enthalten kann. Allgemeiner bezeichnen wir ein Kontinuum C als ein *irreduzibles Verbindungskontinuum zwischen zwei fremden abgeschlossenen Punktmengen A und B*, wenn es sowohl Punkte aus A als auch Punkte aus B enthält, während kein Teilkontinuum von C zu gleicher Zeit Punkte aus A und B enthalten kann[8]).

Es sei dann G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Einheitskreis ganz im Innern enthält, dagegen den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält und übrigens zum einzigen Randpunkt haben kann. Es sei ferner C ein irreduzibles Verbindungskontinuum in der funktionentheo-

---

[8]) Ein Satz von Z. Janiszewski und St. Mazurkiewicz besagt, daß jedes Kontinuum, das zwei Punkte a, b enthält, auch ein irreduzibles Kontinuum zwischen a und b als Teilkontinuum enthält. Die Hahnsche Analyse der Primbestandteile eines irreduziblen Kontinuums [vgl. H. Hahn, Über irreduzible Kontinua, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Math.-phys. Klasse, Abt. IIa, 130 (1921), S. 217—250] gestattet, diesen Satz ohne Schwierigkeiten dahin zu verallgemeinern, daß ein jedes Verbindungskontinuum zwischen zwei fremden abgeschlossenen Punktmengen A und B ein irreduzibles Verbindungskontinuum zwischen A und B als Teilkontinuum enthält.

retischen Ebene zwischen der Peripherie des Einheitskreises E und dem Rand R von G, das zugleich diesen Rand *vollständig enthält*, dagegen nicht die ganze Peripherie des Einheitskreises. Entfernt man aus der Ebene alle Punkte von C, so ist dasjenige der übrigbleibenden (eo ipso einfach zusammenhängenden, da sie keine zwei getrennte Randkontinua haben können) Gebiete, das mit dem Innern des Einheitskreises zusammenhängt, das vollständige Existenzgebiet einer analytischen Funktion, die sich in diesem Gebiet G_C durch eine geeignete in G_C gleichmäßig konvergierende Abschnittsfolge ihrer Nullpunktsentwicklung darstellen läßt.

In der Tat können wir wiederum zunächst eine im längs eines geeigneten Radius des Einheitskreises zerschnittenen Gebiets G_C gleichmäßig konvergierende Folge von Abschnitten einer gewissen Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 0 konstruieren, und daraus durch dasselbe Verfahren wie oben eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ mit dem Konvergenzradius 1 bilden, die eine den Bedingungen des speziellen Lückensatzes genügende Folge von Lücken besitzt, und für die die zugehörige Abschnittsfolge sicher in G_C gleichmäßig konvergiert. Wir behaupten, daß $\mathfrak{P}(z)$ alle Punkte von C zu singulären Punkten besitzt und daher das Innere von G_C als vollständiges Regularitätsgebiet hat. Denn im Innern von G können Singularitäten von $\mathfrak{P}(z)$ nur auf C liegen. Bezeichnet etwa $\bar{C}$ die Menge dieser Singularitäten, so hat $\bar{C}$ sicher einen Punkt auf E. Würde nun in der abgeschlossenen Punktmenge $\bar{C}$ wenigstens ein Punkt von C fehlen, so würde $\bar{C}$ sicher kein Verbindungskontinuum zwischen E und R enthalten, da C ein *irreduzibles* Verbindungskontinuum zwischen E und R ist. Dann würde sich aber E von R durch ein Polygon trennen lassen, das keinen Punkt von $\bar{C}$ enthält, auf dem daher nach dem speziellen Lückensatz eine gewisse Abschnittsfolge von $\mathfrak{P}(z)$ gleichmäßig konvergierte, daher wäre $\mathfrak{P}(z)$ auf E durchweg regulär, während $\mathfrak{P}(z)$ den Konvergenzradius 1 hat.

§ 3.

Überkonvergente Potenzreihen in beliebigen einfach zusammenhängenden Gebieten.

Es sei nunmehr G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält, dagegen den Nullpunkt enthält und, wie wir annehmen dürfen, wenigstens zwei Randpunkte besitzt (da für die im unendlich fernen Punkt punktierte Ebene jede ganze transzendente Funktion das Gewünschte leistet). Wir behaupten, daß *es eine in G analytische Funktion $f(z)$ gibt, die G zum vollständigen Regularitätsgebiet besitzt und sich durch eine geeignete im ganzen Gebiet G gleichmäßig konvergente Abschnittsfolge ihrer Nullpunktsentwicklung darstellen läßt.*

Unser Beweis beruht auf einer im wesentlichen von Hilbert herrührenden Approximation eines einfach zusammenhängenden Gebietes G durch Lemniskaten. Dabei verstehen wir unter einer Lemniskate eine (reelle) Kurve $|f(z)| = c$, wo $f(z)$ ein Polynom ist. Das Hilbertsche Ergebnis besagt, daß man im Innern G_C einer beliebigen einfachen geschlossenen Kurve C eine Folge von Gebieten G_n konstruieren kann, deren Begrenzungskurven L_n die Gleichungen haben: $|f_n(z)| = c$, wo $f_n(z)$ Polynome sind, derart, daß $G_n \to G_C$ ist[9]). Dabei ist jede Kurve L_n eine einfache geschlossene Kurve, die alle Nullstellen von $f_n(z)$ im Innern enthält.

Andererseits kann man G durch eine Folge von beschränkten Gebieten approximieren, die von einfachen geschlossenen Kurven begrenzt sind, und auf die daher das Hilbertsche Ergebnis anwendbar ist. Daher können wir zu unserem Gebiet G eine Folge von Polynomen $f_\nu(z)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ von den (genauen) Graden $m_\nu \geq 1$ konstruieren, so daß die Kurven $L_\nu : |f_\nu(z)| = 1$ (man kann offenbar die Konstanten c alle gleich 1 setzen) einfache geschlossene Kurven sind, die einfach zusammenhängende Gebiete G_ν begrenzen, wobei jedes G_ν samt L_ν ganz im Innern von $G_{\nu+1}$ enthalten und $G_\nu \to G$ sowie $m_\nu \to \infty$ ist. Es sei der Rand von G mit R bezeichnet, der Abstand des Nullpunktes von R mit ϱ, der größte Abstand der Punkte von L_ν vom Nullpunkt mit ϱ_ν. Ferner sei $\underset{z \text{ auf } R}{\operatorname{Min}} |f_\nu(z)| = \mu_\nu$, $\underset{z \text{ auf } L_{\nu-1}}{\operatorname{Max}} |f_\nu(z)| = V_\nu$ gesetzt, dann ist $V_\nu < 1 < \mu_\nu$. Es sei endlich $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern. Dann bestimmen wir sukzessive eine Folge ganzer positiver Zahlen e_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ folgendermaßen:

e_1 sei so groß gewählt, daß $V_1^{e_1} < a_1$ ist.

Allgemein wähle man e_{k+1} so, daß

$$e_{k+1} > 2k\,e_k\,m_k, \qquad \varrho_k^{2k e_k m_k} V_{k+1}^{e_{k+1}} < a_{k+1}, \qquad \varrho^{2k e_k m_k} \mu_{k+1}^{e_{k+1}} > 1$$

ist. Bildet man dann die Reihe

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} z^{2(k-1)e_{k-1}m_{k-1}} f_k(z)^{e_k},$$

so sind auf jeder der Kurven L_ν die Glieder dieser Reihe, von einem k an, absolut kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$, so daß die Reihe in G gleichmäßig konvergiert. Andererseits sind auf R (und auch überall außerhalb G) die absoluten Beträge der Glieder dieser Reihe durchweg ≥ 1, so daß G das *vollständige Konvergenzgebiet dieser Reihe* darstellt. Ferner ist der höchste Exponent des k-ten Gliedes der Reihe gleich

[9]) Hilbert, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse (1897), S. 63–70. Vgl. auch die Darstellung im Buche von P. Montel, Leçons sur les séries des polynomes à une variable complexe, Collection Borel, Paris 1910, pp. 45–47.

$2(k-1)e_{k-1}m_{k-1}+e_k m_k < 2e_k m_k$, während der niedrigste Exponent des $(k+1)$-ten Gliedes $\geqq 2k e_k m_k$ ist. Daraus folgt, daß die Glieder der obigen Polynomreihe sich zu einer Potenzreihe zusammenschließen, wobei zwischen den einzelnen Gliederaggregaten, die in der obigen Reihe zusammengefaßt erscheinen, Lücken in der Exponentenfolge bestehen, die den Bedingungen des speziellen Lückensatzes genügen. Daher folgt nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz und dem speziellen Lückensatz, daß die obige Reihe für $f(z)$ die Nullpunktsentwicklung für $f(z)$ liefert, und daß die spezielle Abschnittsfolge dieser Potenzreihe, durch die wir $f(z)$ in G dargestellt haben, $f(z)$ im Innern des ganzen Existenzgebietes darstellen muß, so daß $f(z)$ in allen Punkten von R singulär ist, womit alle unsere Behauptungen bewiesen sind.

12. Dieser Beweis läßt sich noch etwas kürzer führen, wenn man die Hilbertsche Lemniskatenapproximation, von der wir oben Gebrauch gemacht haben, in etwas modifizierter Gestalt zugrunde legt. Man kann nämlich die approximierenden Lemniskaten L_ν so wählen, daß die zugehörigen Polynome $f_\nu(z)$ im Nullpunkt verschwinden, wie man entweder durch eine einfache Abänderung des Hilbertschen Beweises oder ebenso einfach direkt aus dem oben formulierten Hilbertschen Resultat erschließen kann. Übrigens kann man so sogar zeigen, daß man eine mit m_ν ins Unendliche wachsende Anzahl von Nullstellen von $f_\nu(z)$ willkürlich auf einer ganz innerhalb C liegenden abgeschlossenen Punktmenge vorschreiben kann[10]).

---

[10]) Denn ist die Lemniskate $L: |f(z)|=1$ eine einfach geschlossene Kurve und $f(z)$ ein Polynom, so läßt sich L folgendermaßen durch eine einfach geschlossene Kurve L^* mit der Gleichung $|g(z)|=1$ approximieren, wo $g(z)$ ein Polynom ist, das ein gegebenes Polynom $P(z)$ ohne Nullstellen auf L als Teiler enthält:

Man betrachte die beiden Niveaukurven von $|f(z)|=1$:

$$L_+ (|f(z)|=1+\varepsilon) \quad \text{und} \quad L_- (|f(z)|=1-\varepsilon)$$

für ein so kleines $\varepsilon>0$, daß L_+ und L_- noch geschlossene einfache Kurven sind, und im Streifen zwischen L_+ und L_- weder Nullstellen von $P(z)$ noch Nullstellen von $f(z)$ liegen. Nunmehr bestimme man die ganze Zahl $m \geqq 1$ so groß, daß durchweg auf L_+ $|P(z)f(z)^m|>1$ und durchweg auf L_- $|P(z)f(z)^m|<1$ ist. Setzt man nun

$$g(z)=P(z)\cdot f(z)^m,$$

so liegt die Niveaukurve $|g(z)|=1$ ganz im Streifen zwischen L_+ und L_-. Bedenkt man nun, daß jedes beschränkte, von den reellen Zügen von $|g(z)|=1$ begrenzte Gebiet offenbar Nullstellen von $g(z)$ enthalten muß, so sieht man leicht ein, daß die Kurve $|g(z)|=1$ eine einfache geschlossene Kurve ist, die wegen der Willkür in der Wahl von ε die Kurve L beliebig genau approximiert.

Zur Hilbertschen Methode möge man übrigens noch G. Faber, Potentialtheorie und konforme Abbildung, Münchener Berichte, Math.-phys. Klasse (1920), S. 49—64 vergleichen.

13. Wir erwähnen zum Schluß noch den folgenden einfachen

Satz. Ist $P(z)$ ein Polynom vom Grade m, das im Nullpunkt verschwindet und auch von 0 verschiedene Nullstellen hat, und ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k} = f(z)$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r $(0 < r < \infty)$ und ganzen positiven Exponenten n_k, für die allgemein $\frac{n_k}{n_{k-1}} > m$ ist, so stellt $f(P(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P(z)^{n_k}$ eine Potenzreihe in z mit überkonvergenten Abschnittsfolgen dar. —

In der Tat ist es dann klar, daß $\sum_{k=1}^{\infty} a_k P(z)^{n_k}$ für $|P(z)| < r$ gleichmäßig konvergiert und für $|P(z)| > r$ durchweg divergiert. Es genügt daher zu zeigen, daß unter den reellen geschlossenen Kurvenzügen, aus denen die Kurve $|P(z)| = 1$ besteht, kein Kreis vorkommen kann. Wäre nun aber $|P(z)|$ auf einem Kreise $\mathfrak{K}$ mit dem Radius r um z_0 konstant und wäre $P(z)$ innerhalb $\mathfrak{K}$ durchweg von 0 verschieden, so müßte $P(z)$ auf $\mathfrak{K}$ sowohl das Maximum als auch das Minimum des absoluten Betrages innerhalb $\mathfrak{K}$ und auf $\mathfrak{K}$ annehmen, daher eine Konstante sein. Hat aber $P(z)$ innerhalb $\mathfrak{K}$ Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$, mehrfache mehrfach aufgeführt, so dividiere man $P(z)$ durch

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{k} \frac{z - \zeta_k}{1 - \frac{(z - z_0)(\overline{\zeta_k - z_0})}{r^2}}.$$

Dann hat $\frac{P(z)}{\Pi(z)}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ keine Nullstellen und auf der Peripherie von $\mathfrak{K}$ konstanten absoluten Betrag, ist daher konstant, und es folgt $P(z) = \text{Konst.}\, \Pi(z)$. Da aber $P(z)$ ein Polynom ist, muß allgemein $\zeta_k = z_0$ sein und $P(z)$ könnte nicht zwei verschiedene Wurzeln haben, entgegen der Voraussetzung.

(Eingegangen am 8. 7. 1929.)

Über gewisse Verallgemeinerungen des Landauschen und des Schottkyschen Satzes.

Von

M. Fekete in Jerusalem.

1. Herr Valiron[1]) hat den klassischen Landauschen Satz aus dem Picardschen Ideenkreise folgenderweise verallgemeinert:

I. *Es sei* $a \neq 0$ *und* $\neq 1$, $b > 0$, $\lambda > 0$. *Dann gibt es eine nur von* a, b *und* λ *abhängige reelle Zahl* $L = L(a, b, \lambda)$ *mit folgender Eigenschaft: Ist* $F(s) = F(\sigma + it)$ *für* $\sigma \geqq R$ *regulär,* $\neq 0$ *und* $\neq 1$, *ist ferner bei reellem* $s \to \infty$ $\lim F(s) = a$, $\lim e^{\lambda s} |F'(s)| = b$, *so ist*

$$R > L.$$

Neuerdings hat Herr Landau[2]) den Schottkyschen Satz aus dem erwähnten Ideenkreise folgenderweise verallgemeinert:

II. *Es sei* $\lambda > 0$, $\vartheta > 0$, $F(s)$ *für* $\sigma \geqq R$ *regulär,* $\neq 0$ *und* $\neq 1$. *Es sei* $e^{\lambda s} F'(s)$ *für* $s \geqq R$ *beschränkt; der hiernach vorhandene Grenzwert* a *von* $F(s)$ *bei reellem* $s \to \infty$ *sei weder* 0 *noch* 1. *Dann ist*

$$|F(s)| \leqq S(a, \lambda, \vartheta) \quad \text{für} \quad \sigma \geqq R + \vartheta.$$

I und II enthalten zwei Resultate von Herrn Bochner[3]), die ihrerseits

---

[1]) Sur une généralisation d'un théorème de M. Landau, Comptes rendus hebd. des séances de l'Acad. des sciences, Paris, **186** (1928), S. 1815—1817.

[2]) Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante, Zweite Abhandlung, Sitzungsber. d. preuß. Ak. d. Wiss. **33** (1928), S. 339—344. Erster Teil. S. 339—342.

[3]) Remarks on the Theorems of Picard-Landau and Picard-Schottky, The Journal of the London Math. Society **1** (1926), S. 100—103; S. 101. Der Valironsche Satz I ist mit dem Folgenden äquivalent: Ist $R = 0$, $\lambda = 1$, so besitzt b eine obere Schranke $l = l(a)$, die nur von a abhängig ist. In dem von ihm betrachteten speziellen Falle gibt Herr Bochner nun auch die *genauen* oberen Schranken für b (bzw. $|F(s)|$, nach unseren Bezeichnungen) und die Funktionen an, bei denen diese Schranken erreicht werden. Übrigens kann man die Bochnerschen Ergebnisse mit dem Satze II und einer Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas [vgl. Fußnote [6])] kombinieren und auf diese Weise, unter weniger Voraussetzungen als bei Herrn Bochner betreffs der Funktion, zu den genannten Schranken gelangen.

zwei Ergebnisse des Herrn Ritt[4]) enthalten, in welchen er den Landauschen und den Schottkyschen Satz von Potenzreihen auf Dirichletsche Reihen $f(s) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 s} + \ldots$ mit einem absoluten Konvergenzgebiet verallgemeinert hat.

2. In der vorliegenden Arbeit will ich die Sätze I und II verallgemeinern bzw. verschärfen. Zunächst zeige ich, daß in beiden Sätzen die Bedingung: $a \neq 0$ und $\neq 1$ gestrichen werden kann. Hier wie bei allen weiteren Verallgemeinerungen bzw. Verschärfungen werde ich nur den Satz vom Schottkyschen Charakter auf direkte Weise herleiten, da, wie ich zeigen werde, der entsprechende Satz vom Landauschen Charakter darin immer bereits enthalten ist. Diesbezüglich verfahre ich ähnlich wie Herr Landau a. a. O.[2]), wo er aus dem Schottky-Rittschen Satze den Landau-Rittschen Satz gefolgert hat. Doch konnte er sich dabei auf die Existenz des Mittelwertes a_1 von $e^{\lambda_1 s} f(s)$ auf einer geeigneten Geraden $\sigma =$ Konstante berufen, was in den allgemeineren, in I und II (und in deren Verschärfungen) betrachteten Fällen kein Entsprechendes hat. Darum behelfe ich mich mit dem Phragmén-Lindelöfschen Satz[5]) (der übrigens für die Herren Valiron und Landau beim Beweise von I und II das wesentliche Hilfsmittel bot).

3. Bevor ich die oben angedeutete erste Verschärfung von II beweise, will ich zeigen, daß I in II enthalten ist. Meine Beweisführung[6]) gibt die Art der Brücke an, die auch von den Verschärfungen des Satzes II zu den entsprechenden des Satzes I geschlagen werden kann. Ich behaupte, daß

$$(1) \qquad L = L(a, b, \lambda) = -2 + \frac{1}{\lambda} \log \frac{b}{2 S(a, \lambda, 1)}$$

---

[4]) On Certain Points in the Theory of Dirichlet Series, American Journal of Math. 50 (1928), S. 73—86; Teil I (Picard's Theorem), S. 73—77. Die Bochnersche Arbeit ist Herrn Ritt, Valiron und Landau bis zur Veröffentlichung der unter [4]), [1]) und [2]) angeführten Publikationen unbekannt geblieben.

[5]) „*Es sei* $0 < \alpha < \pi$, $0 \leqq \varkappa < \frac{\pi}{2\alpha}$. *Es sei* $g(s)$ *in einem Winkelraum der Öffnung* 2α *regulär; auf den Randstrahlen sei*

$$(^*) \qquad |g(s)| \leqq M.$$

Es sei im Winkelraum gleichmäßig

$$|g(s)| = O(e^{|s|^\varkappa}).$$

Dann gilt (*) *im ganzen Winkelraum.*" [Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propiétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, Acta Math. 31 (1908), S. 381—406; S. 385.]

[6]) Durch ähnliche Beweisführung kann man auch die Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas auf die hier untersuchte Funktionenklasse herleiten: Ist $F(s)$ für $\sigma \geqq R$ regulär und $|F(s)| \leqq M$, $\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0$, ist ferner $e^{\lambda s} F'(s)$ für $s \geqq R$ beschränkt, so ist für $\sigma > R$ $|F(s)| \leqq M e^{-\lambda(\sigma - R)}$. Vgl. die entsprechende Verallgemeinerung auf Dirichletsche Reihen durch Herrn Rogosinski, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Math. Zeitschr. 20 (1924), S. 280—320; S. 290.

sicherlich den Anforderungen des Satzes I entspricht. Denn wäre $F(s)$ für $\sigma \geqq L$ regulär, $\neq 0$ und $\neq 1$, so wäre nach II für $\sigma \geqq L+1$

$$|F(s)| \leqq S(a, \lambda, 1),$$

also würde für $\sigma \geqq L+2$ offenbar

$$|F'(s)| \leqq S(a, \lambda, 1)$$

bestehen. Deshalb wäre, mit Hinsicht auf (1),

$$|e^{\lambda s} F'(s)| \leqq e^{\lambda(L+2)} S(a, \lambda, 1) = \frac{b}{2}, \quad \text{für} \quad \sigma = L+2;$$

$$|e^{\lambda s} F'(s)| \leqq e^{\lambda |s|} S(a, \lambda, 1) = O(e^{|s|^{\varrho}}), \quad 1 < \varrho < 2, \quad \text{für} \quad \sigma \geqq L+2.$$

Andererseits, aus $\lim\limits_{s \to +\infty} e^{\lambda s} |F'(s)| = b$ folgt

$$e^{\lambda s} |F'(s)| \leqq \text{Konstante} = K_F, \quad \text{für} \quad s \geqq L+2.$$

Der Phragmén-Lindelöfsche Satz[6]) gäbe also zunächst mit $g(s) = e^{\lambda s} F'(s)$, $M = \operatorname{Max}\left(\frac{b}{2}, K_F\right)$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\varkappa = \varrho$, daß $e^{\lambda s} F'(s)$ in beiden Viertelebenen $\sigma \geqq L+2$, $t \geqq 0$ und $\sigma \geqq L+2$, $t \leqq 0$ beschränkt ist; alsdann mit $g(s) = e^{\lambda s} F'(s)$, $M = \frac{b}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\varkappa = 0$, daß

$$e^{\lambda s} |F'(s)| \leqq \frac{b}{2} \quad \text{für} \quad \sigma \geqq L+2;$$

das widerspricht der Voraussetzung: $\lim\limits_{s \to +\infty} e^{\lambda s} |F'(s)| = b$, $b > 0$.

4. Nun zur erwähnten Verschärfung des Satzes II.

Ist $a = 1$, so kann man auf die Funktion

$$F_1(s) = \sqrt{F(s)} \quad \text{mit} \quad \lim_{s \to +\infty} F_1(s) = \lim_{s \to +\infty} \sqrt{F(s)} = -1$$

den Satz II anwenden, d. h. es gilt für $\sigma \geqq R + \vartheta$

$$|F_1(s)| \leqq S(-1, \lambda, \vartheta), \qquad |F(s)| \leqq S(-1, \lambda, \vartheta)^2,$$

mit anderen Worten: im Falle $a = 1$ genügt die Wahl

$$S(a, \lambda, \vartheta) = S(-1, \lambda, \vartheta)^2.$$

Daher entspricht im Falle $a = 0$

$$S(a, \lambda, \vartheta) = 1 + S(-1, \lambda, \vartheta)^2$$

den Anforderungen. Damit ist die Existenz der Schranke $S(a, \lambda, \vartheta)$ für jedes a klargelegt[7]). Daraus folgt (wie I aus II) auch das Bestehen[8]) von I für jedes a.

---

[7]) Dieses Resultat enthält einen Satz von Herrn Bloch. (Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité, Théorème XXXIV; Mémorial des sciences math., Fasc. XX, S. 41.)

[8]) Vgl. A. Hurwitz, Über die Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Satz der allgemeinen Funktionentheorie, Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellsch. in Zürich 49 (1904), S. 242—253, Nr. 3.

5. Herr Valiron hat a. a. O.[1]) beim Beweise seines Satzes I nicht nur die Existenz von $L(a, b, \lambda)$ gezeigt, sondern auch eine explizite Formel für diese untere Schranke der Abszissen derjenigen Halbebenen angegeben, wo $F(s)$ regulär und doch $\neq 0$ und $\neq 1$ ist; er hat nämlich nachgewiesen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes I

$$R > -1 + \frac{1}{\lambda} \log \frac{b\mathfrak{B}}{16\,|\,a\sqrt{(\log a - 2\pi i)\log a}\,|} = -1 + \frac{1}{\lambda}\log\frac{b}{\alpha}$$

sein muß, wobei $\mathfrak{B}$ die sogenannte Blochsche Konstante[9]) bedeutet.

Auch Herr Landau hat a. a. O.[3]) beim Beweise seines Satzes II nicht nur die Existenz von $S(a, \lambda, \vartheta)$ gezeigt, sondern auch eine explizite Formel für diese obere Schranke des Maximalbetrages in Teilhalbebenen solcher Halbebenen angegeben, wo $F(s)$ regulär, $\neq 0$ und $\neq 1$ ist; namentlich hat er nachgewiesen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes II

$$|F(s)| \leq e^{\pi e^{2|\beta| + \frac{2p}{\mathfrak{B}\vartheta\lambda}}}$$

ist, wobei p eine absolute, $\mathfrak{B}$ wiederum die Blochsche Konstante bezeichnet, β aber durch die Gleichung

$$\beta = \log\left(\sqrt{\frac{\log a}{2\pi i}} + \sqrt{\frac{\log a}{2\pi i} - 1}\right)$$

definiert ist.

Nun ist bei positivem ε und $\omega > \varepsilon$, im Bereiche

$$(2) \qquad \begin{gathered} |a| \geq \varepsilon, \quad |a-1| \geq \varepsilon, \quad |a| \leq \omega, \\ |\alpha| \leq \varphi(\varepsilon, \omega), \quad |\beta| \leq \psi(\varepsilon, \omega), \end{gathered}$$

folglich hat die Abszisse R des Satzes I eine nur von ε, ω, λ und b abhängige untere Grenze $\Lambda = \Lambda(\varepsilon, \omega, \lambda, b)$, sobald die Voraussetzungen dieses Satzes und außerdem (2) erfüllt sind, und ähnlich hat $|F(s)|$ für $\sigma \geq R + \vartheta$ eine nur von ε, ω, λ und ϑ abhängige obere Grenze $\Sigma = \Sigma(\varepsilon, \omega, \lambda, \vartheta)$, wenn nur die Voraussetzungen des Satzes II und außerdem (2) erfüllt sind.

6. Die letztgenannten Ergebnisse (deren letzteres, wie Satz II den Satz I, das erstere enthält) lassen sich weiter verschärfen. Man kann nämlich leicht zeigen, daß die ε-Beschränkung[10]) fortbleiben kann, d. h. es bestehen die Sätze:

I*. *Es sei $\omega > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$. Dann gibt es eine nur von ω, b und λ abhängige Zahl $L^* = L^*(\omega, b, \lambda)$ mit folgender Eigenschaft: Ist*

---

[9]) E. Landau, Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante, Sitzungsb. d. preuß. Ak. d. Wiss. 32 (1926), S. 467—474; S. 474.

[10]) Vgl. H. Bohr und E. Landau, Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\varkappa(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$ (Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, Jahrg. 1910, S. 303—330).

$F(s)$ für $\sigma \geqq R$ regulär und dort in jedem endlichen Punkte $\neq 0$ und $\neq 1$, ist ferner $\lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = a$ dem Betrage nach $\leqq \omega$, $\lim\limits_{s \to +\infty} e^{\lambda s} |F'(s)| = b$, so ist

$$R > L^*.$$

II*. *Es sei $\omega_1 > 0$, $\lambda > 0$, $\vartheta > 0$, $F(s)$ für $\sigma \geqq R$ regulär und dort in jedem endlichen Punkte $\neq 0$ und $\neq 1$. Es sei $e^{\lambda s} F'(s)$ für $s \geqq R$ beschränkt; $\lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = a$ sei dem Betrage nach $\leqq \omega_1$. Dann ist für $\sigma \geqq R + \vartheta$*

$$|F(s)| \leqq S^*(\omega_1, \lambda, \vartheta).$$

Natürlich ist wiederum I* in II* (wie I in II) enthalten. Was den letzteren Satz betrifft, so kann ich ihn etwa so beweisen[11]):

Genügt a den Ungleichungen $|a| \geqq \frac{1}{2}$, $|a - 1| \geqq \frac{1}{2}$, so entspricht sicherlich

$$S^*(\omega_1, \lambda, \vartheta) = \sum \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \omega_1, \lambda, \vartheta\right)$$

den Anforderungen des Satzes II*.

Ist $|a| < \frac{1}{2}$, so kann man auf $G(s) = \sqrt{1 - F(s)}$ das Endresultat des vorangehenden Paragraphen mit $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\omega = \sqrt{\omega_1 + 1}$ anwenden, sobald von den möglichen Determinationen der Quadratwurzel diejenige festgesetzt ist, für welche

$$\Re\{\lim_{s \to +\infty} G(s)\} = \Re\{\sqrt{1 - a}\}$$

negativ ausfällt. D. h. es gilt für $\sigma \geqq R + \vartheta$

$$|\sqrt{1 - F(s)}| \leqq \sum(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{\omega_1 + 1}, \lambda, \vartheta),$$

$$|F(s)| \leqq 1 + \sum(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{\omega_1 + 1}, \lambda, \vartheta)^2.$$

Ist $|a - 1| < \frac{1}{2}$, so liefert das eben Bewiesene, auf $1 - F(s)$ angewendet, die für $\sigma \geqq R + \vartheta$ geltenden Ungleichungen

$$|1 - F(s)| \leqq 1 + \sum(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{\omega_1 + 1}, \lambda, \vartheta)^2,$$

$$|F(s)| \leqq 2 + \sum(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{\omega_1 + 1}, \lambda, \vartheta)^2.$$

Damit ist die Existenz von $S^*(\omega_1, \lambda, \vartheta)$ für alle a mit $|a| \leqq \omega_1$ bewiesen.

7. Auf Grund des eben bewiesenen Satzes erhält man ohne Schwierigkeit folgende Verschärfung des Satzes II:

---

[11]) Vgl. P. Lévy, Remarques sur le théorème de M. Picard, Bull. de la Soc. math. 40 (1912), S. 25. — Vgl. auch C. Carathéodory und E. Landau, Beiträge zur Konvergenz von Funktionsfolgen, Sitzungsb. d. preuß. Ak. d. Wiss. 26 (1911), S. 587 bis 613; Beitrag von Herrn Bernays, S. 597—598.

II**. *Es sei* $\omega > 0$, $\lambda > 0$, $\vartheta > 0$, $F(s)$ *für* $\sigma \geqq R$ *regulär und dort höchstens in einem einzigen endlichen*[12]) *Punkte* $= 1$ *und überall*[12]) $\neq 0$. *Es sei* $e^{\lambda s} F'(s)$ *für* $s \geqq R$ *beschränkt, der hiernach vorhandene Grenzwert* $\lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = a$ *genüge der Bedingung* $0 < |a| \leqq \omega$. *Dann ist für* $\sigma \geqq R + \vartheta$

$$|F(s)| \leqq S^{**}(\omega, \lambda, \vartheta).$$

In der Tat, gibt es überhaupt in der Halbebene $\sigma \geqq R$ einen endlichen Punkt s_F mit $F(s_F) = 1$, so genügt die Funktion

$$G(s) = \sqrt{F(s)} \quad \text{mit} \quad \sqrt{F(s_F)} = -1$$

leicht ersichtlich den Bedingungen des Satzes II* für das dortige $F(s)$ mit $\omega_1 = \sqrt{\omega}$; daher ist für $\sigma \geqq R + \vartheta$

$$|F(s)| \leqq S^*(\sqrt{\omega}, \lambda, \vartheta)^2,$$

folglich entspricht $S^{**}(\omega, \lambda, \vartheta) = S^*(\sqrt{\omega}, \lambda, \vartheta)^2$ den Anforderungen. Gehört aber $F(s)$ der in II* erledigten Funktionenklasse (d. h. hat keine Einsstelle im Endlichen), so leistet bereits $S^{**}(\omega, \lambda, \vartheta) = S^*(\omega, \lambda, \vartheta)$ das Gewünschte. Jedenfalls genügt es also,

$$S^{**}(\omega, \lambda, \vartheta) = \operatorname{Max}\left\{S^*(\omega, \lambda, \vartheta),\ S^*(\sqrt{\omega}, \lambda, \vartheta)^2\right\}$$

zu setzen[13]).

8. Aus II** (wie I aus II) folgt der Parallelsatz vom Landauschen Charakter:

I**. *Es sei* $\omega > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$. *Dann gibt es eine nur von* ω, b *und* λ *abhängige reelle Zahl* $L^{**} = L^{**}(\omega, b, \lambda)$ *mit folgender Eigenschaft: Ist* $F(s)$ *für* $\sigma \geqq R$ *regulär und dort höchstens in einem einzigen endlichen*[12]) *Punkte* $= 1$ *und überall*[12]) $\neq 0$, *ist ferner* $\lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = a$ *dem Betrage nach* $\leqq \omega$, $\lim\limits_{s \to +\infty} e^{\lambda s} |F(s)| = b$, *so ist*[14])

$$R > L^{**}.$$

---

[12]) Herr Ritt, im von ihm untersuchten Falle, betrachtete den Grenzwert $\lim\limits_{s \to +\infty} f(s) = a_0$ als den Wert der Funktion im Punkte $s = +\infty$. Ähnlich kann $\lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = a$ als $F(+\infty)$ aufgefaßt werden. $a = 1$ heißt dann: $F(s)$ nimmt den Wert Eins im Punkte $s = +\infty$ an; $F(s) \neq 0$ überall heißt: weder ist $a = 0$, noch verschwindet $F(s)$ im Endlichen, usw.

[13]) Ähnlich kann man eine obere Schranke $S^{**}(\omega, \lambda, \vartheta; p)$ für $|F(s)|$ in $\sigma \geqq R + \vartheta$ finden im Falle, wo die Anzahl derjenigen Wurzeln der Gleichung $F(s) = 1$, die in $\sigma \geqq R$ liegen, $\leqq$ einer festen positiven ganzen Zahl $(= p)$ ist. Vgl. E. Landau, Über den Picardschen Satz, Vierteljahrsschr. d. naturforsch. Gesellsch. in Zürich 51 (1916), S. 252—318; Satz XXII, S. 302.

[14]) Ähnlich kann man eine untere Schranke $L^{**}(\omega, \lambda, b; p)$ für R finden im Falle, wo die Anzahl derjenigen Wurzeln der Gleichung $F(s) = 1$, die in $\sigma \geqq R$ liegen, $\leqq$ einer festen positiven ganzen Zahl $(= p)$ ist.

9. Durch zweimalige Anwendung von I^{**} ergibt sich der Satz:

III. *Es sei* $\omega > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$. *Dann gibt es eine nur von* ω, b *und* λ *abhängige reelle Zahl* $\Lambda = \Lambda(\omega, b, \lambda)$ *mit folgender Eigenschaft: Ist die Funktion* $F(s)$ *mit* $\lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = a \neq 0$ *und* $\neq 1$, $\lim\limits_{s \to +\infty} e^{\lambda s} |F'(s)| = b$ *in der Halbebene* $\sigma \geqq \Lambda$ *regulär, so nimmt sie dort beide Werte* 0 *und* 1 *mindestens einmal oder aber einen von ihnen mindestens zweimal an*[15].

Nach I^{**} muß nämlich die Funktion des Satzes III in der Halbebene $\sigma \geqq L^{**}(1 + \omega, b, \lambda)$ entweder eine singuläre Stelle haben oder in einem Punkte verschwinden oder aber mindestens an zwei Stellen den Wert Eins annehmen. Ähnlich muß sie nach I^{**} (angewendet auf $1 - F(s)$) in der Halbebene $\sigma \geqq L^{**}(1 + \omega, b, \lambda)$ entweder eine singuläre Stelle haben oder in einem Punkte den Wert Eins annehmen oder aber mindestens an zwei Stellen verschwinden. Es entspricht also

$$\Lambda = L^{**}(\omega + 1, b, \lambda)$$

sicherlich den Anforderungen des Satzes III.

Mathematisches Institut der hebräischen Universität.

Jerusalem, 14. Februar 1929.

---

[15]) Vgl. M. Fekete, Eine Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Bieberbach, Über die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen, Math. Annalen **88** (1923), S. 166—168; S. 166, Satz B. Vgl. auch A. Bloch, Sur les fonctions prenant plusieurs fois dans un cercle les valeurs 0 et 1, Comptes rendus hebd. des séances de l'Acad. des sciences **179** (1924), S. 954.

(Eingegangen am 22. 3. 1929.)

Über gewisse transzendente Gleichungen.

Von

Th. Molien in Tomsk.

Die Frage nach den algebraischen Wurzeln transzendenter rationalzahliger Gleichungen, die man sich in Gestalt unendlicher Potenzreihen denken mag, ist vielfach erörtert worden. Es handelt sich um die Frage, ob im Falle, daß eine algebraische Zahl Lösung ist, auch alle mit ihr konjugierten algebraischen Zahlen Lösungen sein müssen, wie das in der Algebra des Endlichen der Fall ist. Im folgenden soll an einem sehr einfachen Beispiel gezeigt werden, daß die Frage im allgemeinen zu verneinen ist.

Nehmen wir eine Gleichung zweiten Grades mit rationalen Koeffizienten und ungleichen reellen Wurzeln α und β, von denen α die dem absoluten Betrag nach größere sein soll. Wir schreiben die Gleichung

$$t^2 + at + b = 0,$$

oder in gelöster Form

$$(t - \alpha)(t - \beta) = 0.$$

Alsdann betrachten wir den Bruch

$$\frac{1}{1 + ax + bx^2} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha x} - \frac{\beta}{1 - \beta x}\right).$$

Man entwickelt zunächst die linke Seite nach aufsteigenden Potenzen von x. Die Koeffizienten der Potenzen von x sind rationale Zahlen, weil a und b rational sind. Wir werden auch gleich sehen, daß keiner von ihnen zu 0 werden kann. Die Potenzreihe möge etwa lauten:

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots .$$

Wir entwickeln nun auch die rechte Seite in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} x^{n-1}.$$

Da beide Seiten identisch gleich sind, so sind die Koeffizienten entsprechender Glieder beiderseits gleich. Da α dem Betrage nach größer als β angenommen wurde, so gilt das gleiche auch von ihren Potenzen. Deshalb ist rechts auch keiner der Koeffizienten gleich Null.

Wir bilden jetzt eine neue Reihe:

$$1+\frac{x}{c_1}+\frac{x^2}{c_2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{c_{n-1}}+\ldots$$

und verfahren gleichermaßen rechts. Wir bekommen dadurch die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\alpha^n-\beta^n}x^{n-1}.$$

Hier zerlegen wir den Koeffizienten in

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha^n}+\frac{(\alpha-\beta)\beta^n}{\alpha^n(\alpha^n-\beta^n)}$$

und dementsprechend zerlegen wir die rechts stehende Summe in zwei Teile, nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-1}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-x}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha-\beta)\beta^n}{\alpha^n(\alpha^n-\beta^n)}x^{n-1}=\frac{\beta}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}c_n'\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)^n \qquad (\text{mit } c_n'=1/c_n).$$

Es wird also

$$1+c_1'x+c_2'x^2+\ldots+c_n'x^n+\ldots=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-x}+\frac{\beta}{\alpha}\left(1+c_1'\frac{\beta x}{\alpha}+c_2'\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2+\ldots\right).$$

Der Ausdruck links konvergiert für $|x|<|\alpha|$, die unendliche Reihe rechts in dem weiteren Gebiete $|x|<\left|\frac{\alpha^2}{\beta}\right|$.

Multiplizieren wir jetzt die beiden Seiten dieser Gleichung mit $x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$, entwickeln links nach aufsteigenden Potenzen von x, führen rechts die Multiplikation direkt aus, so bekommen wir links etwa

$$b+b_1x+b_2x^2+\ldots$$

mit rationalen Koeffizienten, rechts aber

$$(\alpha-\beta)(\beta-x)+(\beta-x)(\alpha-x)\left(1+c_1'\frac{\beta x}{\alpha}+\ldots\right)\frac{\beta}{\alpha},$$

wo wiederum nach Potenzen von x zu ordnen ist. Die Reihe links konvergiert also für $|x|<\left|\frac{\alpha^2}{\beta}\right|$.

Nun erhält man für die innerhalb dieses Gebietes gelegenen $x=\alpha$ und $x=\beta$ auf der rechten Seite für $x=\alpha$ den Wert $-(\alpha-\beta)^2$, für

$x=\beta$ aber den Wert Null. Damit sind wir zu folgendem Resultat gekommen: Die rationalzahlige Reihe

$$b+b_1x+b_2x^2+\dots$$

besitzt die Nullstelle $x=\beta$, nicht aber die Nullstelle $x=\alpha$. Um dies Resultat in der erweiterten Form:

Die *Gleichung* $b+b_1x+\dots=0$ besitzt die Wurzel $x=\beta$, nicht aber die Wurzel $x=\alpha$

aussprechen zu können, bedarf man aber einer weiteren Überlegung, der man folgende Form geben kann.

Schreibt man $f(x)$ für die Reihe $1+c_1'x+\dots$, so wird die Zerfällungsformel zu

$$f(x)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-x}+\frac{\beta}{\alpha}f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)$$

und man übersieht sofort die weitere Zerfällung

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k x}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n f\left(\frac{\beta^n}{\alpha^n}x\right).$$

Der Grenzwert der hier auftretenden Summe ist, wegen $|\beta|<|\alpha|$, eine für alle nichtsingulären Werte von x konvergente Reihe und stellt nach bekannten Sätzen eine analytische eindeutige Funktion dar. Das Restglied konvergiert in jedem endlichen Gebiet von einem angebbaren Werte von n ab gegen Null. Es ist also $f(x)$ Funktionselement einer eindeutigen Funktion. Daher gilt die erweiterte Form des Satzes, d. h. die Funktion $(x^2+ax+b)f(x)$ besitzt keinen Zweig, der für $x=\alpha$ den Nullwert annähme.

Um nun aber auf die aufgeworfene Fragestellung zurückzukommen, so wollen wir annehmen, daß die Gleichung

$$x^2+ax+b=0$$

irreduzibel sei. Dann aber sind die beiden Wurzeln irrational und nur eine von ihnen ist Wurzel der transzendenten Gleichung.

Ich erwähne nur noch, daß durch dies Verfahren auch eine transzendente rationalzahlige Gleichung hergestellt werden kann, die in ihrem Konvergenzgebiet algebraische Wurzeln in beliebig großer, endlicher Anzahl besitzt, die die kleineren Wurzeln von lauter untereinander verschiedenen Gleichungen zweiten Grades sind.

(Eingegangen am 9. 11. 1929.)

The Lattice Points in a Parallelogram.

Von

L. J. Mordell in Manchester (England).

§ 1.

Let a parallelogram be defined in the x, y plane by the inequalities

$$(1) \qquad |ax+by+c| \leqq \omega, \quad |a'x+b'y+c'| \leqq \omega',$$

where the constants are all real, $\omega > 0$, $\omega' > 0$ and

$$\varDelta = ab' - a'b \neq 0.$$

Two classical theorems, both due to Minkowski, are well known in connection with the lattice points in the parallelogram, i. e. points whose coordinates are integers. The first states that if $c = c' = 0$, and ω, ω' are any positive numbers with $\omega\omega' \geqq |\varDelta|$, the parallelogram contains (i. e. has inside it or on its boundary), at least one lattice point, in addition to the origin. The second states that for given a, b, c, a', b', c', positive numbers ω, ω' exist with $\omega\omega' \geqq \frac{1}{4}|\varDelta|$, such that the parallelogram contains at least one lattice point, i. e. the inequality

$$|ax+by+c|\,|a'x+b'y+c'| \leqq \frac{1}{4}|\varDelta|,$$

is always satisfied by integer values of x, y.[1]) The first theorem is easily extended to any number of variables, but I do not think that the second theorem has been proved for more than three variables.

A new proof of the first theorem was given a few years ago by Siegel[2]), who proved the following expansion in the particular case when $c = c' = 0$,

---

[1]) See my paper on Minkowski's Theorem on the Product of two linear Forms, Journal of the London Mathematical Society 3 (1927), p. 19–22.

[2]) Neuer Beweis des Satzes von Minkowski über lineare Formen, Math. Annalen 87 (1922), S. 36–38.

$$(2) \qquad |\varDelta| \sum_{m,n} (\omega - |am + bn + c|)(\omega' - |a'm + b'n + c'|)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\mu i c - 2\pi\mu' i c'} \cdot \frac{\sin^2 \pi\mu\omega}{\pi^2\mu^2} \cdot \frac{\sin^2 \pi\mu'\omega'}{\pi^2\mu'^2},$$

where

$$\varDelta\mu = b'm - a'n, \quad \varDelta\mu' = -bm + an.$$

The terms with $\mu = 0$ or $\mu' = 0$ are taken as limits of the terms as $\mu \to 0$ or $\mu' \to 0$. The left hand summation refers to the lattice points of the parallelogram (1), and is to be replaced by zero when there are none. When $c = c' = 0$, the series shows at once that if the origin is the only lattice point within the parallelogram, $|\varDelta|\,\omega\omega' \geqq \omega^2\omega'^2$ or $|\varDelta| \geqq \omega\omega'$, which gives immediately the first result if one has assumed $\omega\omega' > |\varDelta|$, and then it is a simple matter to prove it also when $\omega\omega' = |\varDelta|$.

Siegel's proof of his expansion depends upon complex integration applied to a formula of a type made familiar by him and Hecke. It, however, does not reveal the real origin of (2) and similar formulae which as I have already[3]) shown are only simple deductions from Poisson's summation formula in several variables applied under such conditions as permit of a proof of the summation formula by integration by parts. The method, however, suggests as I have already stated, that the actual number of lattice points, say L, within the parallelogram, with the convention that lattice points on the sides (but not corners) are reckoned as $\frac{1}{2}$, while corners are reckoned as $\frac{1}{2}$ or 0, the distinction being explained later, is given by

$$(3) \qquad L = \frac{1}{|\varDelta|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\mu i c - 2\pi\mu' i c'} \cdot \frac{\sin 2\pi\mu\omega}{\pi\mu} \cdot \frac{\sin 2\pi\mu'\omega'}{\pi\mu'},$$

where the summation is taken first for m from $-\infty$ to ∞ and then for n from $-N$ to N where $N \to \infty$. The double series is of course only conditionally convergent.

It is possible that the formulae (2), (3) may be useful in proving Minkowski's second theorem and its generalisation, but this I cannot do. It is worth while noting that the first term of (3) is $4\omega\omega'/|\varDelta|$.

§ 2.

I shall now prove (3) by transforming the summation in m by Poisson's formula,

$$(4) \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{2m\pi i x}\, dx.$$

---

[3]) Poisson's Summation Formula in several variables and some Applications to the Theory of Numbers, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 25 (1929), p. 412—420.

This certainly holds if $f(x)$, $f'(x)$ are continuous for all values of the real variable x, and $\to 0$ as $|x| \to \infty$, $f'(x)$ is an integral of $f''(x)$, and $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f(x) + |f''(x)|)\,dx$ converges, as I have shown[4]) in a very elementary way by integration by parts. It will be seen that (3) is formally replaced by

$$(5)\quad L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(am+bn+c)\xi + 2\pi i(a'm+b'n+c')\eta} . \frac{\sin 2\pi\omega\xi}{\pi\xi} . \frac{\sin 2\pi\omega'\eta}{\pi\eta}\, d\xi\, d\eta .$$

The integral is the product of two integrals which are immediately evaluated on noting that if p and q are both real and

$$(6)\qquad \Phi(p, q) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i p x} . \frac{\sin 2\pi q x}{\pi x}\, dx,$$

then if $q > 0$, $\Phi(p, q) = 0, 1, \frac{1}{2}$ according as $|p| >, <, = q$, while if $q < 0$, $\Phi(p, q) = 0, -1, -\frac{1}{2}$ according as $|p| >, <, = -q$. Hence (5) is clearly a series in m and n with only a finite number of terms despite the infinite limits of summation, and its sum is L except when a lattice point is at a corner.

The first stage in the transformation of (3) by (4) changes it into

$$(7)\qquad \frac{|\Delta|}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n}{\Delta}(a'c - ac')} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2m\pi i x + \frac{2\pi i x}{\Delta}(bc' - b'c)}$$
$$\times \frac{\sin \frac{2\pi\omega}{\Delta}(b'x - a'n)}{(b'x - a'n)} . \frac{\sin \frac{2\pi\omega'}{\Delta}(-bx + an)}{-bx + an}\, dx .$$

The integral can be evaluated in finite terms and in fact vanishes unless m lies between two limits independent of n. For on writing, when $n \neq 0$,

$$\frac{n\Delta}{(b'x - a'n)(-bx + an)} = \frac{b'}{b'x - a'n} + \frac{b}{-bx + an}$$

the integral in (7) splits into two. It suffices to suppose $b \neq 0$, and to consider the one with the denominator $-bx + an$, or writing $-bx + an = X$, say

$$(8)\quad \operatorname{sgn} b \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i m}{b}(X - an) - \frac{2\pi i}{\Delta}(bc' - b'c)\left(\frac{X - an}{b}\right)} . \sin \frac{2\pi\omega}{\Delta}\left(-\frac{b'}{b}X + \frac{\Delta n}{b}\right) \sin \frac{2\pi\omega' X}{\Delta} \frac{dX}{X}$$

where as usual when b is real, $\operatorname{sgn} 0 = 0$, $\operatorname{sgn} b = \frac{b}{|b|}$. Express the first

---

[4]) Poisson's summation formula and the Riemann Zeta function, Journal of the London Mathematical Society 4 (1929), p. 285—291.

sin in terms of exponentials, so that (8) becomes the difference between two integrals of which the first is

$$(9)\qquad \frac{\operatorname{sgn} b}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i m}{b}(X-an)-\frac{2\pi i}{\Delta}(bc'-b'c)\left(\frac{X-an}{b}\right)+\frac{2\pi i\omega}{\Delta}\left(-\frac{b'}{b}X+\frac{\Delta n}{b}\right)}\cdot\sin\frac{2\pi\omega' X}{\Delta}\,\frac{dX}{X}$$

or say

$$(10)\qquad A\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(A_1 m+B_1)X+2\pi i(A_2 m+B_2)n}\cdot\sin\frac{2\pi\omega' X}{\Delta}\,\frac{dX}{X},$$

where the large A's and B's throughout denote constants independent of m and n. From (6), the integral (10) vanishes if $|A_1 m + B_1| > \frac{2\pi\omega'}{\Delta}$, but when $|A_1 m + B_1| \leqq \frac{2\pi\omega'}{\Delta}$ which gives at most a finite number of values of m and these independent of n, it has a value $A_4\, e^{2\pi i(A_2 m+B_2)n}$. The series (3) then becomes, still excluding the term $n=0$, a finite number, say A_3, of series of the form

$$(11)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' A_6 \frac{e^{2\pi i A_5 n}}{n}.$$

It is here that the meaning of the summation in n in (2) as $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{-N}^{N}$ becomes necessary. In (11) change n into $-n$ and add, then (11) can be replaced by

$$(12)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_7 \frac{\sin 2 A_5 n}{n}.$$

In this form, the term in (7) with $n=0$ is now included and is given as the limit of the term in (12) as $n\to 0$. For the integral in (7) is a continuous function of n at $n=0$, as is easily seen from

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x+\theta h), \qquad 0<\theta<1,$$

where

$$f(x) = \frac{\sin\lambda x}{x}, \qquad -h = \frac{a}{b}n \ \text{ or } \ \frac{a'}{b'}n,$$

$$f'(x) = \frac{\lambda x\cos\lambda x - \sin\lambda x}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

for large x and $O(1)$ for small x, and noting that $\int^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ converges as does (7) when $n=0$.

§ 3.

The sum of the series (12) is well known, since

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi} = [x] - x + \frac{1}{2}$$

if x is not an integer and $[x]$ is the greatest integer less than x, but I write it in the form given by the identity

$$(13)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2k n\pi}{n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2n\pi i x} \cdot \frac{\sin 2\pi k x}{\pi x}\, dx$$

where on the left, the term with $n = 0$ is $2k$. On the right $\int_{-\infty}^{\infty}$ means $\lim_{X\to\infty} \int_{-X}^{X}$ but this is important only when k is an integer and $n = k$. This result is really a formal application of Poisson's summation formula. It is easily proved otherwise, for from (6), the right hand series has only a finite number of terms, the integral vanishing if $|n| > |k|$. We may take $k \geq 0$, and then both sides reduce to $2[k]+1$ or $2k$ according as k is not or is an integer.

The application of (13) to (12) means that (7) or (3) is changed into

$$(14)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varDelta|\, e^{2m\pi i x + 2n\pi i y - \frac{2\pi i c}{\varDelta}(b'x - a'y) - \frac{2\pi i c'}{\varDelta}(-bx+ay)}}{\pi^2 (b'x - a'y)(-bx+ay)}$$
$$\times \sin \frac{2\pi\omega}{\varDelta}(b'x - a'y) \sin \frac{2\pi\omega'}{\varDelta}(-bx+ay)\, dx\, dy,$$

where the integration is taken first for x and then for y. This series (which is really Poisson's summation formula for two variables applied formally to (3)) has only a finite number of terms in both m and n, as we have already seen that the integral for x vanishes unless m lies between two limits depending only on a, a', b, b' c, c', ω, ω', and then that the integral for y vanishes unless n lies between two similar limits.

If the integral in (14) is taken as a double integral, and the variables are changed by writing

$$\varDelta \xi = b'x - a'y, \qquad \varDelta y = -bx + ay,$$

or

$$x = a\xi + a'\eta, \qquad y = b\xi + b'\eta,$$

(14) becomes formally (5), the required formula for L. Hence all that remains to be done is to justify the evaluation of the repeated integral in (14). But as it is quite interesting to see how (14) as it stands leads to the required result, I commence by carrying out the integration using (7), (9) for the integration in x, and replacing the n there by y. The integration in y is then effected by using

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_1 e^{i\lambda_1 y} + L_2 e^{i\lambda_2 y}}{y}\, dy = \pi i L_1 \operatorname{sgn} \lambda_1 + \pi i L_2 \operatorname{sgn} \lambda_2$$

if $L_1 + L_2 = 0$, and where the integral means $\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N}$. The repeated integral I say in (14) then becomes the sum of four terms of which the first is from (6)

$$\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{m}{b} + \frac{bc' - b'c}{b\Delta} + \frac{\omega b'}{b\Delta}, \frac{\omega'}{\Delta}\right) \operatorname{sgn}\left(n + \frac{am}{b} + \frac{bc' - b'c}{\Delta}\frac{a}{b} + \frac{\omega\Delta}{\Delta b} + \frac{a'c - ac'}{\Delta}\right) \operatorname{sgn} b\Delta$$

or

$$\tfrac{1}{2}\Phi(\Delta m + bc' - b'c + \omega b', b\omega') \operatorname{sgn}(am + bn - c + \omega) \operatorname{sgn} b$$

since $\Phi(p, q) = \operatorname{sgn} k\,\Phi(kp, kq)$ if $k \neq 0$. We have already assumed $b \neq 0$. The other three terms are

$$\begin{aligned}
&- \tfrac{1}{2}\Phi(\Delta m + bc' - b'c - \omega b', b\omega') \operatorname{sgn}(am + bn - c - \omega) \operatorname{sgn} b \\
&+ \tfrac{1}{2}\Phi(\Delta m + bc' - b'c + \omega' b, b'\omega) \operatorname{sgn}(a'm + b'n - c' + \omega') \operatorname{sgn} b' \\
&- \tfrac{1}{2}\Phi(\Delta m + bc' - b'c - \omega' b, b'\omega) \operatorname{sgn}(a'm + b'n - c' - \omega') \operatorname{sgn} b'.
\end{aligned}$$

Put

$$\xi = am + bn - c, \qquad \eta = a'm + b'n - c'.$$

Hence

$$\begin{aligned}
(14.1) \quad 2I = \; & \Phi(b'\xi - b\eta + b'\omega, b\omega') \operatorname{sgn}(\xi + \omega) \operatorname{sgn} b \\
& - \Phi(b'\xi - b\eta - b'\omega, b\omega') \operatorname{sgn}(\xi - \omega) \operatorname{sgn} b \\
& + \Phi(b'\xi - b\eta + b\omega', b'\omega) \operatorname{sgn}(\eta + \omega') \operatorname{sgn} b' \\
& - \Phi(b'\xi - b\eta - b\omega', b'\omega) \operatorname{sgn}(\eta - \omega') \operatorname{sgn} b'.
\end{aligned}$$

This expression is unaltered if b is replaced by $-b$ or b' by $-b'$. For the change of b, b' into $-b, -b'$ leaves each of the four parts of (14.1) unaltered. The change of b' into $-b'$ on writing then $-\xi$ for ξ which leaves unaltered the parallelogram $|\xi| \leqq \omega$, $|\eta| \leqq \omega'$ interchanges the first two parts of (14.1) and leaves the third and fourth parts unaltered. Similarly for the change of b into $-b$.

We show now that (14.1) is 0, 2, 1 according as $P(m, n)$ or say $P(\xi, \eta)$ is an outer, inner or boundary point (not a corner) of the parallelogram $|\xi| \leqq \omega$, $|\eta| \leqq \omega'$. When P is a corner and $b' \neq 0$, (14.1) is 0 for the corners given by $\xi = \omega$, $\eta = \omega'$, $\xi = -\omega$, $\eta = -\omega'$, and 1 for those given by $\xi = \omega$, $\eta = -\omega'$, $\xi = -\omega$, $\eta = \omega'$, or vice versa according as $bb' > 0$ or $bb' < 0$. If $b' \neq 0$, we may suppose that $b > 0$, $b' > 0$. Put $\xi = bx$, $\eta = -b'y$, $\omega = b\Omega$, $\omega' = b'\Omega'$, and write $2I = S$ where

$$\begin{aligned}
(15) \quad S = \; & \Phi(x + y + \Omega, \Omega') \operatorname{sgn}(x + \Omega) + \Phi(x + y - \Omega, \Omega') \operatorname{sgn}(\Omega - x) \\
& + \Phi(x + y + \Omega', \Omega) \operatorname{sgn}(y + \Omega') + \Phi(x + y - \Omega', \Omega) \operatorname{sgn}(\Omega' - y),
\end{aligned}$$

we shall show that S is 0, 2, 1, according as the point $P(x, y)$ lies outside, inside or on a side of the rectangle $|x| \leqq \Omega$, $|y| \leqq \Omega'$. If P is at a corner, $S = 0$ for the corners $(\pm\Omega, \pm\Omega')$, but 1 for the corners $(\pm\Omega, \mp\Omega')$.

Take *first* the corners.

For (Ω, Ω'), $\quad S = \Phi(2\Omega + \Omega', \Omega') + \Phi(\Omega + 2\Omega', \Omega') = 0,$

as each term is zero.

For $(\Omega, -\Omega')$, $\quad S = \Phi(2\Omega - \Omega', \Omega') + \Phi(\Omega - 2\Omega', \Omega) = 1$

as when $\Omega > \Omega'$, the first term vanishes while $|\Omega - 2\Omega'| < \Omega$; when $\Omega = \Omega'$ each term is $\frac{1}{2}$; and when $\Omega < \Omega'$ the last term vanishes. The results for the other corners can be written down by symmetry since (15) is unaltered by writing $-x$, $-y$ for x, y.

Take *secondly* the sides but not corners.

For $x = \Omega$,

$$\begin{aligned} S &= \Phi(y + 2\Omega, \Omega') + \Phi(y + \Omega + \Omega', \Omega) + \Phi(y + \Omega - \Omega', \Omega) \\ &= \Phi(y + 2\Omega, \Omega') + \Phi(y + \Omega - \Omega', \Omega) \end{aligned}$$

since $y + \Omega' > 0$. If $\Omega \geqq \Omega'$, the first term is 0, and the second is 1 since $\Omega > y + \Omega - \Omega' > -\Omega$. If $\Omega < \Omega'$ the first term is 1 and the second term 0 or vice versa according as $-\Omega' < y < \Omega' - 2\Omega$ or $\Omega' - 2\Omega < y < \Omega'$, while each term is $\frac{1}{2}$ when $y = \Omega' - 2\Omega$.

The result holds for $x = -\Omega$ by symmetry, and for the other two sides by interchanging x, Ω with y, Ω'; and so $S = 1$ when P is on a side.

For the remaining points, draw lines through the vertices and centre of the rectangle parallel to $x + y = 0$, and suppose first $\Omega > \Omega'$. Symmetry shows that we need only consider the half plane given by $x + y \geqq 0$, and this can be subdivided into

I. $\quad x + y > \Omega + \Omega'.$

II. $\quad \Omega + \Omega' > x + y > \Omega - \Omega',$

III. $\quad \Omega - \Omega' > x + y > 0,$

together with

IV. $\quad x + y = \Omega + \Omega', \quad x + y = \Omega - \Omega', \quad x + y = 0.$

The points P of case I clearly make every term of (15) zero, and these points are outside the rectangle. In case II, (15) reduces to

$$\begin{aligned} &\Phi(x + y - \Omega, \Omega') \operatorname{sgn}(\Omega - x) + \Phi(x + y - \Omega', \Omega) \operatorname{sgn}(\Omega' - y) \\ &= \operatorname{sgn}(\Omega - x) + \operatorname{sgn}(\Omega' - y) \end{aligned}$$

since $|x+y-\Omega| < \Omega'$ and $x+y-\Omega' > -\Omega$ as $\Omega > \Omega'$. This is 2 if P lies within the parallelogram as then $\Omega > |x|$, $\Omega' > |y|$, and 0 if P lies without as then either $x > \Omega$, $y < \Omega'$ or $x < \Omega$, $y > \Omega'$.

These results hold for $x+y = \Omega+\Omega'$ of IV forming the boundary between I and II excluding of course the vertices of the rectangle as then (15) reduces to

$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\Omega - x) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\Omega' - y) = 0.$$

In case III, (15) becomes

$$\begin{aligned}\Phi(x+y+\Omega', \Omega)\operatorname{sgn}(y+\Omega') &+ \Phi(x+y-\Omega', \Omega)\operatorname{sgn}(\Omega'-y) \\ &= \operatorname{sgn}(y+\Omega') + \operatorname{sgn}(\Omega'-y),\end{aligned}$$

since

$$|x+y+\Omega'| < \Omega \quad \text{and} \quad |x+y-\Omega'| < \Omega.$$

This is zero if $y > \Omega'$ or $y < -\Omega'$ and 2 if $|y| < \Omega'$ i. e. for these outer and inner points respectively.

This also holds for $x+y = \Omega - \Omega'$ of IV as (15) then becomes

$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\Omega - x) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(y+\Omega') + \operatorname{sgn}(\Omega'-y) = \operatorname{sgn}(y+\Omega') + \operatorname{sgn}(\Omega'-y)$$

as before.

Also for $x+y=0$ of IV, (15) becomes as before

$$\operatorname{sgn}(y+\Omega') + \operatorname{sgn}(\Omega'-y).$$

These results proved for $\Omega > \Omega'$ hold by symmetry for $\Omega' > \Omega$ and it is easily shown they hold when $\Omega = \Omega'$ e.g. in II, (15) becomes as before

$$\operatorname{sgn}(\Omega - x) + \operatorname{sgn}(\Omega - y)$$

and so for the points $x+y = 2\Omega$ of IV. Case III disappears and for $x+y=0$, (15) becomes

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x+\Omega) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\Omega - x) &+ \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(y+\Omega) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\Omega - y) \\ &= \operatorname{sgn}(y+\Omega) + \operatorname{sgn}(\Omega - y)\end{aligned}$$

and the result.

This completes the evaluation of (15).

We have assumed in (15) that $b \neq 0$, $b' \neq 0$ so that as $\Delta \neq 0$, there still remains the case when either $b=0$ or $b'=0$. Suppose $b'=0$, then (14.1) is replaced by

$$\begin{aligned}2I &= \Phi(-b\eta, b\omega')\operatorname{sgn}(\xi+\omega)\operatorname{sgn} b \\ &\quad + \Phi(-b\eta, b\omega')\operatorname{sgn}(\omega-\xi)\operatorname{sgn} b \\ &= \Phi(\eta, \omega')\operatorname{sgn}(\xi+\omega) + \Phi(\eta, \omega')\operatorname{sgn}(\omega-\xi).\end{aligned}$$

This is clearly 0 if $P(\xi, \eta)$ is outside the parallelogram $|\xi| \leqq \omega$, $|\eta| \leqq \omega'$ and 2 if P is inside. It is 1 if P is one of the sides and $\frac{1}{2}$ if P is at a corner.

§ 4.

I close by saying a few words about the evaluation of (14) as a double integral. It is tantamount to finding the relation between the integral

$$\iint e^{pi\xi+qi\eta} \frac{\sin\xi \sin\eta}{\xi\eta}\, d\xi\, d\eta$$

taken in the first place over the infinite parallelogram

$$-M \leqq a\xi + a'\eta \leqq M, \qquad -N \leqq b\xi + b'\eta \leqq N$$

where first $M \to \infty$ and then $N \to \infty$, and taken secondly over the infinite rectangle $-\infty < \xi < \infty$, $-\infty < \eta < \infty$. As the integral in (14) is taken first for x and then for y so that x can be replaced by X where $b'x - a'y = X$, and then y by Dy say, we may suppose $a = 1$, $a' = 0$, $b = b' = 1$.

There is no difficulty in showing that the integrals over the parallelogram and rectangle are equal if neither p nor q is 1 for then

$$\int_{\varkappa}^{\infty} e^{pi\xi} \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi = O\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$$

for large $\varkappa$. It suffices to consider the parts of the parallelogram in the first and fourth quadrants and to assume $M > N$ as M tends first to infinity. Let $y = s_1, s_2$ where $0 > s_1 > s_2$ with $x = M$ define the side in the fourth quadrant. Draw a line through s_2 parallel to the x axis and one through s_1 parallel to the y axis. We have then two triangles the integrals over which tend to zero so that the part of the parallelogram in the fourth quadrant can be replaced by the part of the rectangle in the fourth quadrant.

For one of the triangles is given by $0 \leqq \xi \leqq M$, $-N - \xi \geqq \eta \geqq -N - M$, and the integral with respect to η is

$$O \int_0^M \frac{|\sin\xi|}{\xi(N+\xi)}\, d\xi$$

(where the implied constant is independent of M, N), which by writing

$$\int_0^M = \int_0^1 + \int_1^M$$

and noting

$$|\sin\xi| \leqq \xi, \quad N+\xi \geqq 2\sqrt{N\xi}$$

is clearly

$$O\left(\frac{1}{N}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \to 0 \quad \text{as} \quad M \to \infty,\ N \to \infty.$$

The other triangle on drawing a line through s_1 parallel to the ξ axis becomes the difference between the trapezium given by $\xi \geqq N-\eta$, $0 \geqq \eta \geqq N-M$ and the strip given by $\xi \geqq M$, $0 \geqq \eta \geqq N-M$. When $M \to \infty$ the integral over the strip $\to 0$ since $\int\limits_0^\infty e^{pi\xi}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$ converges when $p \neq 1$. The integral over the trapezium is on integrating for ξ

$$O\int\limits_0^{M-N}\frac{|\sin\eta|\,d\eta}{\eta\,|N+\eta|}$$

and just as shown above is

$$O\left(\frac{1}{N}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

That the part of the parallelogram in the first quadrant, really a triangle, can be replaced by the corresponding part of the rectangle is proved by inscribing in the triangle a square two of whose sides are $x=\frac{1}{2}N$ and $y=\frac{1}{2}N$. For it is easily shown as before that the integrals over the remaining part of the parallelogram, namely two triangles, tends to zero.

The discussion of the cases $p=1$ or $q=1$ corresponding to lattice points on the sides of the parallelogram is not so simple and I omit it.

(Eingegangen am 15. 8. 1929.)

Zur simultanen Approximation von Irrationalzahlen.

Von

Arnold Scholz in Freiburg i. B.

Diese Note schließt sich an die beiden Abhandlungen von Herrn Ph. Furtwängler, „Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen", Math. Annalen **96** (1926), S. 169—175; **99** (1928), S. 71—83 an (hier mit I und II bezeichnet) und soll die in II unter Fußnote [3]) erwähnte, von seiner eigenen Abänderung verschiedene, Ergänzung der Lücke aus I (Formel (14)) bringen.

Durch die in I auf S. 173 angegebene Basisabänderung wird erreicht, daß in jeder Spalte der Determinante (12) auf S. 174 das Hauptdiagonalelement das überragende ist; dagegen ist noch nicht in jeder Zeile von (12) das Hauptdiagonalelement das überragende, was gerade für die Abschätzung von $\Pi = \Pi t_i = \prod_{i=2}^{n} (\varepsilon_1 \omega_1^{(i)} + \ldots + \varepsilon_{n-1} \omega_{n-1}^{(i)})$ erforderlich, da die t_i Linearverbindungen der Koeffizienten der einzelnen Zeilen der Determinante Ω_n sind. Dann aber findet mit einem „Überragen in der Spalte" zugleich ein „Überragen in der Zeile" sicher statt, wenn man die Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ auch noch so wählt, daß die Elemente der Hauptdiagonale von (12), als Funktionen von g betrachtet, die gleiche Größenordnung haben. Daß dies erreichbar ist, will ich unten zeigen.

Ist nun die Basis so gewählt, daß auch in jeder Zeile von (12) das Hauptdiagonalelement überragt, so hat jetzt der Faktor

$$v_i = |\omega_1^{(i)}| + |\omega_2^{(i)}| + \ldots + |\omega_{n-1}^{(i)}|$$

des Produktes $\Pi' = \prod_{i=2}^{n} (|\omega_1^{(i)}| + \ldots + |\omega_{n-1}^{(i)}|)$ ein überragendes Glied, wenn der Körper $k^{(i)}$ reell ist, dagegen zwei überragende Glieder, wenn $k^{(i)}$ imaginär ist, nämlich ein Glied $|\omega_\varkappa^{(i)}|$, bei dem nur der Realteil ϱ ins Gewicht fällt, und das darauffolgende $|\omega_{\varkappa+1}^{(i)}|$, bei dem nur der Imaginärteil σ

ins Gewicht fällt. Es wird im letzten Fall wegen $-1 \leqq \varepsilon_i \leqq 1$

$|t_i| = |\sum \varepsilon_\nu \omega_\nu^{(i)}| \leqq \text{Max} |\omega_\varkappa^{(i)} \pm \omega_{\varkappa+1}^{(i)}| \cdot J \leqq \sqrt{\varrho^2 + \sigma^2} \cdot J; \quad |t_i|^2 \leqq |\varrho^2 + \sigma^2| J,$

wenn $\omega_\varkappa^{(i)}$, ϱ, σ dieselbe Bedeutung haben wie bei der obigen Abschätzung von Π' und man fortan zur Abkürzung setzt: $1 + O\left(\frac{1}{g}\right) = J$. Wenn man eine Annäherung von ϱ und σ erreichen kann, etwa in der Weise, daß $\sigma = \pm \varrho \cdot J$, so hat man: $|t_i|^2 \leqq (\varrho^2 + \sigma^2) \cdot J = 2 |\varrho \sigma| \cdot J$ und damit: $|\Pi| \leqq 2^s \cdot |P| \cdot J$.

Um also zum Resultat $k^{n-1} \geqq \frac{1}{\sqrt{|D|}}$ zu gelangen, genügt es jetzt zu erreichen, daß in (12) das Verhältnis, in dem die Hauptdiagonalelemente zueinander stehen, gegenüber g beschränkt ist und daß insbesondere die gepaarten Real- und Imaginärteile ϱ und σ sich (absolut) annähern. Das beste wird dann sein, eine gegenseitige Annäherung aller Hauptdiagonalelemente zu erstreben. Dies kann man durch eine neue Transformation der Basis $\omega_1, \ldots, \omega_n$ erreichen, mittels einer Substitution

$$S = \begin{pmatrix} r_1 & & 0 & 1 \\ & r_2 & & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n-1} & 1 \\ z_1 & z_2 & \ldots\, z_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ so daß also } \begin{cases} \tau_1'' = r_1 \; \omega_1'' + \omega_n'' \\ \tau_2''' = r_2 \; \omega_2''' + \omega_n''' \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \tau_{n-1}^{(n)} = r_{n-1}\, \omega_{n-1}^{(n)} + \omega_n^{(n)}, \end{cases}$$

wenn mit $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ jetzt die neue Basis bezeichnet wird. Dieselbe Substitution ist auf die Elemente der Determinante (12) anzuwenden. Das k-te Element der i-ten Zeile von (12) sei fortan mit ω_{ik} bezeichnet; entsprechend mit τ_{ik} die Transformierten: $(\tau_{ik}) = S(\omega_{ik})$. Die Koeffizienten $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ der Substitution S unterliegen dabei nur der Bedingung, daß sie paarweise teilerfremde ganze rationale Zahlen sind; denn S wird unimodular, wenn man die $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ so bestimmt, daß

$$\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_2}{r_2} + \ldots + \frac{z_{n-1}}{r_{n-1}} = \frac{\pm 1}{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}}.$$

Damit nun eine Annäherung der Hauptdiagonalelemente ω_{ii} stattfindet, werden wir die r_i so wählen müssen, daß $r_i \cdot |\omega_{ii}| = r_1 \cdot |\omega_{11}| \cdot J$ wird und außerdem die r_i im Verhältnis zu den $\omega_{n\nu}$ groß genug, daß

$$\tau_{ii} = r_i \omega_{ii} + \omega_{ni} = r_i \omega_{ii} \cdot J$$

und für $k \neq i$

$$\frac{\tau_{ik}}{\tau_{ii}} = \frac{r_i \omega_{ik} + \omega_{nk}}{r_i \omega_{ii} + \omega_{ni}} = \frac{\omega_{ik}}{\omega_{ii}} \cdot J,$$

damit das früher Erreichte nicht zerstört wird.

Es handelt sich also nur noch um die Aufgabe, ein gegebenes Verhältnis $\frac{1}{|\omega_{11}|} : \frac{1}{|\omega_{22}|} : \ldots : \frac{1}{|\omega_{n-1,n-1}|}$ durch paarweise teilerfremde positive (nach unten beschränkte) ganze Zahlen $r_1, \ldots, r_{n-1}$ zu approximieren. Nach dem Primzahlsatz kann man aber die r_ν bei genügender Größe als verschiedene Primzahlen p_ν wählen; für genügend großes M:

$$\frac{M}{|\omega_{11}|} < p_1 < \frac{M}{|\omega_{11}|}\left(1+\frac{1}{g}\right); \quad \frac{M}{|\omega_{22}|} < p_2 < \frac{M}{|\omega_{22}|}\left(1+\frac{1}{g}\right); \quad p_2 \neq p_1,$$

$$\ldots; \quad \frac{M}{|\omega_{n-1,n-1}|} < p_{n-1} < \frac{M}{|\omega_{n-1,n-1}|}\left(1+\frac{1}{g}\right); \quad p_{n-1} \neq p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}.$$

Die Approximation ist damit erledigt. Man kann sie aber auch ohne Zuhilfenahme des Primzahlsatzes auf elementare Weise vornehmen, wenn man sich überlegt, daß die Transformation in I § 2 gerade zu $\frac{|\omega_{\kappa\kappa}|}{|\omega_{\kappa-1,\kappa-1}|} = g \cdot J$ führt.

Wenn man die in I § 2 angegebene Basisabänderung nacheinander für das 1-te, 2-te, ..., $(n-1)$-te Basiselement ausführt und dann gleich wieder zur alten Bezeichnungsweise ω für τ zurückkehrt, so erreicht man durch die Abänderung des ersten Basiselements:

$$g\vartheta \leqq \omega_{11} \leqq (g+2)\vartheta; \quad \omega_{11} = g\vartheta \cdot J; \quad |\omega_{i1}| < \vartheta \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

wo

$$\vartheta = \operatorname*{Max}_{i=2,\ldots,n} (|\omega_2^{(i)}| + \cdots + |\omega_n^{(i)}|).$$

(Die Hauptdiagonalelemente werden bei der Transformation durchweg positiv.)

Bei der darauffolgenden Abänderung des zweiten Basiselements ist jetzt das maßgebende Maximum $\vartheta_2 = \operatorname*{Max}_{i=2,\ldots,n} |\omega_1^{(i)}| + |\omega_3^{(i)}| + |\omega_4^{(i)}| + \cdots + |\omega_n^{(i)}|)$. Es ist

$$\omega_{11} \leqq \vartheta_2 \leqq |\omega_1''| + \vartheta: \quad \vartheta_2 = g\vartheta \cdot J,$$

und da wieder

$$g\vartheta_2 \leqq \omega_{22} \leqq (g+2)\vartheta_2: \quad \omega_{22} = g^2\vartheta \cdot J.$$

Allgemein ist, wenn man $k-1$ Basiselemente abgeändert hat:

$$\vartheta_k = \operatorname*{Max}_{i=2,\ldots,n} (|\omega_1^{(i)}| + \cdots + |\omega_{k-1}^{(i)}| + |\omega_{k+1}^{(i)}| + \cdots + |\omega_n^{(i)}|) = g^{k-1}\vartheta \cdot J,$$

und es wird dann $\omega_{kk} = g^k \vartheta \cdot J$, so daß schließlich das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender ω_{kk} von der Form $g \cdot J$ ist.

Es brauchen dann in der Substitution S, die an der Basis vorgenommen werden soll, $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ nur so als paarweise teilerfremde Zahlen gewählt zu werden, daß $\frac{r_i}{r_{i+1}} = g \cdot J$ wird, und dies kann folgendermaßen geschehen. Man setze

$$r_{n-1} = g - 2; \quad r_{n-2} = g^2 - 2; \quad r_{n-3} = g^3 - 2; \quad \ldots; \quad r_1 = g^{n-1} - 2,$$

indem man g auf solche positive ganze rationale Zahlen beschränkt, daß

$$(g^i - 2,\ g^k - 2) = 1 \quad \text{für } i \neq k; \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dies läßt sich erreichen, ohne g nach oben zu beschränken: Da nämlich je zwei Funktionen $x^i - 2$ und $x^k - 2$ zueinander teilerfremd sind, führt der Algorithmus der beiden Funktionen notwendigerweise auf eine Zahl m, die durch den größten gemeinsamen Teiler von $g^i - 2$ und $g^k - 2$ teilbar sein muß, wie man auch g als ganze rationale Zahl wählt. Stellt man nun für je zwei Funktionen $x^i - 2$ und $x^k - 2$ aus der Reihe $x - 2, x^2 - 2, \ldots, x^{n-1} - 2$ diese Zahlen m auf, und ist R das Produkt aller ungeraden Primzahlen, die in all diesen Größen m aufgehen, so beschränke man g jetzt auf die ungeraden Vielfachen von R. Es ist dann sogar keine einzige der Zahlen $g^l - 2$ $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$ durch 2 oder eine solche ungerade Primzahl teilbar, die gemeinsamer Teiler zweier $g^i - 2$ hätte sein können.

Die nach diesem Verfahren gebildete Substitution S bewirkt dann, daß in der Determinante (12) die Elemente der Hauptdiagonale von der Gestalt $\omega_{ii} = g^n \vartheta \cdot J$ sind, während für die übrigen Elemente gilt $|\omega_{ik}| \leq g^{n-1} \vartheta \cdot J$. Man hat daher die Abschätzung

$$|\Omega_n| = 2^s \cdot g^{n(n-1)} \vartheta^{n-1} \cdot J,$$
$$|\Pi| = 2^s \cdot g^{n(n-1)} \vartheta^{n-1} \cdot J.$$

Dies führt zum Resultat $k \geq \dfrac{1}{|D|^{\frac{1}{2(n-1)}}}$.

(Eingegangen am 21. 10. 1929.)

A generalization of the Sturm[1]) Separation and Comparison Theorems in n-space.

Von

Marston Morse in Cambridge (Mass., U.S.A.).

§ 1.
Introduction.

The author considers a system of n ordinary, second-order, linear, homogeneous differential equations. The system is supposed self-adjoint and regular. Starting with the theorem that any such system may be considered as the Euler equations of an integral of a quadratic form, he shows that the Sturm Separation and Comparison Theorems naturally generalize into theorems concerning the interrelation of conjugate and focal points. Care is taken at every stage to state the final results in a purely analytical form belonging to the theory of differential equations proper.

The results obtained were made possible by certain other discoveries already made in connection with the author's *theory of the calculus of variations in the large*[2]).

§ 2.
Self-adjoint systems.

Let there be given a system of n differential equations of the form[3])

$$a_{ij} z_j'' + b_{ij} z_j' + c_{ij} z_j = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \ |a_{ij}| \neq 0 \tag{2.1}$$

---

[1]) See Bôcher, Leçons sur les Méthodes de Sturm, Paris (1917), Gauthier-Villars et Cie.

[2]) Marston Morse, The foundations of the calculus of variations in the large in m-space (first paper). Transactions of the American Mathematical Society **31**, No. 3 (1929). See also, The critical points of functions and the calculus of variations in the large, Bulletin of the American Mathematical Society **35** (1929), pp. 38–54. The first paper will hereafter be referred to as Morse.

[3]) We adopt the convention that a repetition of a subscript in a term shall indicate a sum with respect to that subscript.

where x is the independent variable, and a_{ij}, b_{ij}, and c_{ij}, are of class C'' on a segment γ of the x axis. The system adjoint to (2.1) is

$$(2.2) \qquad (a_{ij} y_i)'' - (b_{ij} y_i)' + (c_{ij} y_i) = 0.$$

A set of necessary and sufficient conditions that (2.1) be self-adjoint is readily seen to be[4])

$$(2.3)' \qquad a_{ij} \equiv a_{ji},$$

$$(2.3)'' \qquad 2a'_{ij} \equiv b_{ij} + b_{ji},$$

$$(2.3)''' \qquad a''_{ij} - b'_{ij} \equiv c_{ji} - c_{ij}.$$

On the other hand let us turn to the integral

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1} (A_{ij} z'_i z'_j + 2 B_{ij} z_i z'_j + C_{ij} z_i z_j)\, dx$$

where A_{ij}, and B_{ij}, and C_{ij} are functions of class C' on γ. No loss of generality results if we assume

$$(2.4) \qquad A_{ij} \equiv A_{ji}, \qquad C_{ij} \equiv C_{ji}.$$

The Euler equations corresponding to the integral I are

$$(2.5) \qquad \frac{d}{dx}(A_{ij} z'_j + B_{ji} z_j) - (B_{ij} z'_j + C_{ij} z_j) = 0.$$

We see that a set of necessary and sufficient conditions for the system (2.5), when expanded, to be identical with the system (2.1), is the following

$$(2.6)' \qquad a_{ij} \equiv A_{ij},$$

$$(2.6)'' \qquad b_{ij} \equiv A'_{ij} + B_{ji} - B_{ij},$$

$$(2.6)''' \qquad c_{ij} \equiv B'_{ji} - C_{ij}.$$

We shall prove the following theorem.

Theorem 1. *A necessary and sufficient condition that the system* (2.1) *admit the form* (2.5) *is that the system* (2.1) *be self-adjoint.*

That it is necessary that (2.1) be self-adjoint is a well known fact[5]) whose proof we need not give.

To prove that it is sufficient that (2.1) be self-adjoint for (2.1) to admit the form (2.5), we assume that the equations (2.3) hold, and

---

[4]) See Davis R. D., The inverse problem of the calculus of variations in higher space, Transactions of the American Mathematical Society **30** (1928), p. 711–713.

[5]) See Hadamard, Leçons sur le calcul des variations, Paris 1910, 1, p. 319.

then show that it is possible to choose A_{ij}, B_{ij}, and C_{ij}, so as to satisfy (2.4) and (2.6).

We first choose A_{ij} as a_{ij}. We then choose the functions C_{ij} as arbitrary functions of class C' except for the conditions $C_{ij} = C_{ji}$. We next choose B_{ji} and B_{ij} so as to satisfy (2.6)″ as an initial condition at some point $x = x_0$. Equations (2.6)″ give apparently two conditions on $B_{ji} - B_{ij}$, obtained by interchanging i and j, namely,

$$B_{ji} - B_{ij} \equiv b_{ij} - A'_{ij},$$
$$B_{ij} - B_{ji} \equiv b_{ji} - A'_{ji}.$$

But these two conditions are really the same as is seen from the fact that A_{ij} has been chosen as a_{ij}, and from the fact that (2.3)″ is assumed to hold. Subject to this condition we now choose B_{ji} and B_{ij} so as to satisfy (2.6)‴.

We have made our choices of A_{ij}, B_{ij}, and C_{ij}. It remains to show that (2.6)″ holds not only at $x = x_0$ but identically.

According to the choices of B_{ij} and B_{ji} as satisfying (2.6)‴, we have

$$B'_{ji} - B'_{ij} \equiv c_{ij} - c_{ji}.$$

By virtue of (2.3) and of our choice of A_{ij} as a_{ij} this becomes

$$A''_{ij} + B'_{ji} - B'_{ij} \equiv b'_{ij}. \tag{2.7}$$

Equation (2.7) is also obtainable by differentiating (2.6)″. Since B_{ij} and B_{ji} have been chosen so that (2.6)″ holds for at least one x, by virtue of (2.7) it holds identically.

Thus the system (2.6) is satisfied by our choices of A_{ij}, B_{ij}, and C_{ij}, and the theorem is proved.

We note the following.

We can choose $C_{ij} = C_{ji}$ arbitrarily, and $A_{ij} = a_{ij}$. The functions B_{ii} are then uniquely determined to an arbitrary constant. The functions B_{ij} for $i \neq j$, are uniquely determined, except that an arbitrary constant may be added to an admissible choice of B_{ij} if substracted from the corresponding admissible choice of B_{ji}.

The second variation of the integral I takes the form of $2I$ with (z) replaced by (η) as is conventional. Thus if a system (2.1) is self-adjoint it may be considered as the system of Jacobi differential equations of a problem of the calculus of variations. Conversely, as is well known, the Jacobi differential equations of an ordinary problem in non-parametric form will always reduce to a system (2.1) that is self-adjoint.

§ 3

A canonical form for the differential equations.

We now make a transformation from the variables (z) to variables (y) of the form

$$z_i = u_{ik}(x)\, y_k \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{3.1}$$

We seek to determine the functions $u_{ij}(x)$ so that they shall be of class C', their determinant shall not be zero, and so that after (3.1) the terms in $y_h y_k'$ shall disappear from the integral I.

We can also write (3.1) in the form

$$z_j = u_{jh}\, y_h \qquad (j, h = 1, \ldots, n). \tag{3.2}$$

If we make these substitutions in the integral I the terms in the integrand involving both the y's and their derivatives take the form

$$A_{ij} u_{ik}' u_{jh} y_k y_h' + A_{ij} u_{ik} u_{jh}' y_k' y_h + 2 B_{ij} u_{ik} u_{jh} y_k y_h'. \tag{3.3}$$

The second sum in (3.3) will not be changed if we interchange h with k and i with j. The sum (3.3) then becomes

$$2 [A_{ij} u_{ik}' + B_{ij} u_{ik}]\, u_{jh} y_k y_h'. \tag{3.4}$$

We can make this sum vanish identically by choosing u_{ik} so that

$$A_{ij} u_{ik}' + B_{ij} u_{ik} = 0. \tag{3.5}$$

We choose the kth column of $|u_{ik}|$ as that solution of the n differential equations

$$A_{ij} u_i' + B_{ij} u_i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

which takes on the values

$$u_k(a) = 1, \quad u_i(a) = 0 \qquad (i \neq k).$$

For this choice of the elements u_{ij} the determinant $|u_{ik}|$ is not zero at $x = a$, and is accordingly never zero.

The transformation (3.1) so determined reduces the integral I to the form

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2} [r_{ij}(x) y_i' y_j' + p_{ij}(x) y_i y_j]\, dx \tag{3.6}$$

where

$$r_{ij} = r_{ji}, \quad p_{ij} = p_{ji}, \qquad (|r_{ij}| \neq 0).$$

Our differential equations have thus been reduced to the canonical form,

$$\frac{d}{dx}(r_{ij} y_j') - p_{ij} y_j = 0. \tag{3.7}$$

We shall assume that the calculus of variations problem arising from I is regular. That is we assume that

$$r_{ij}(x)\eta_i\eta_j > 0 \tag{3.8}$$

for every set $(\eta) \neq 0$, *and for every value of* x *on the given interval.*

§ 4.

Conjugate families of solutions.

From this point on we shall take our system in the form (3.7). If (y) and (z) stand for any two solutions of (3.7) it follows readily from (3.7) that

$$r_{ij}(y_i z_j' - z_i y_j') \equiv \text{const.} \tag{4.1}$$

If the constant in (4.1) is zero (y) and (z) are called *mutually conjugate* according to von Escherich[6]).

A system of n linearly independent mutually conjugate solutions will be called a *conjugate base.* The set of all solutions linearly dependent on the solutions of a conjugate base will be called a *conjugate family.*

By a determinant $D(x)$ of a conjugate base is meant the determinant whose columns are the respective solutions of the base. A determinant $D(x)$ cannot vanish identically. In fact one can easily show that it vanishes at a point $x = a$ at most to a finite order equal to the nullity[7]) of $D(a)$. (Morse § 7.) It is also clear that the determinants of two different conjugate bases of the same conjugate family are non-vanishing constant multiples of each other.

A zero of the rth order of a determinant $D(x)$ will be called a *focal point* of the rth order of the corresponding family.

If $x = a$ is not a focal point of a given conjugate family, one can always select a conjugate base of elements $y_{ij}(x)$ which at a point $x = a$ take on the values

$$y_{ii}(a) = 1, \quad y_{ij}(a) = 0 \qquad (i \neq j). \tag{4.2}$$

Such a base will be termed *unitary* at $x = a$.

§ 5.

The initial elements $g_{ij}(a)$ of a conjugate family.

We shall now investigate with what freedom one can determine a conjugate family by prescribing initial conditions at $x = a$.

---

[6]) See Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, p. 626.

[7]) The nullity of a determinant is its order minus its rank.

We shall restrict ourselves in this section to conjugate families for which $x = a$ is not a focal point. Such a family will have a conjugate base $y_{ij}(x)$ that is unitary at $x = a$. Let us set

$$g_{ij}(a) = r_{ik}(a)\, y'_{kj}(a). \tag{5.1}$$

We see that $g_{ij} = g_{ji}$. For the condition that the ith and jth column of the base $y_{ij}(x)$ be conjugate is that

$$r_{hk}(y_{hi}\, y'_{kj} - y_{hj}\, y'_{ki}) \equiv 0 \tag{5.2}$$

which reduces at $x = a$ with the aid of (4.2) to the condition $g_{ij} = g_{ji}$.

Conversely if the g_{ij}'s are arbitrary elements of a symmetric matrix one sees at once that a matrix of functions $y_{ij}(x)$ whose columns satisfy the differential equations, whose values at $x = a$ are given by (4.2), and which satisfy (5.1), will also satisfy (5.2), and thus be a conjugate base that is unitary at $x = a$.

We have thus proved the following.

Lemma. *The most general conjugate family without focal point at $x = a$ may be determined by giving an arbitrary symmetric matrix of constants $g_{ij}(a)$, and determining a conjugate base that is unitary at $x = a$ and satisfies* (5.1).

When the constants $g_{ij}(a)$ are related to a conjugate family as in the preceding lemma the constants $g_{ij}(a)$ will be called *the initial elements of the family at $x = a$.*

§ 6.

Transverse manifolds.

We need to develop the theory of conjugate families in connection with the theory of transverse manifolds. But the latter theory proceeds with difficulty if the integral be zero along an extremal. Now the integrand H of I is zero along γ. We can avoid any difficulty by taking a new integrand

$$L(x, y, y') = H(x, y, y') + 1. \tag{6.1}$$

The corresponding integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')\, dx \tag{6.2}$$

will have the same extremals as the previous one.

Relative to our new integral J we shall now briefly indicate a proof of the following lemma.

Lemma. *Through each point P of γ at which $D(x) \neq 0$ there passes an n-manifold S which in the neighborhood of P is regular*[8]) *and of class C'', and which cuts the extremals of the given conjugate family transversally.*

Let $y_{ij}(x)$ be the elements of a base of the given conjugate family. The extremals of the conjugate family may be represented in the form

$$y_i = c_j y_{ij}(x) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.3}$$

In $L(x, y, y')$ let y_i and y_i' be replaced by the right members of (6.3) and their derivatives respectively. The condition that the hth and kth columns of our base be mutually conjugate may now be written in the form

$$\frac{\partial y_i}{\partial c_h}\frac{\partial L_{y_i'}}{\partial c_k} - \frac{\partial y_i}{\partial c_k}\frac{\partial L_{y_i'}}{\partial c_h} \equiv 0 \qquad (i, h, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.4}$$

In this form the condition (6.4) may be identified with the usual condition appearing in the literature[9]) that the Hilbert invariant integral I^0, set up for the family (6.3), be independent of the path, at least in the neighborhood of any point $x = a$ on γ at which $|y_{ij}| \neq 0$. In the neighborhood of $x = a$ on γ the Hilbert integral then becomes a function $I^0(x, y_1, \ldots, y_n)$ of class C''. The equation

$$I^0(x, y_1, \ldots, y_n) = I^0(a, 0, \ldots, 0) \tag{6.5}$$

is solvable for x as a function $\bar{x}(y)$ of the y_i's, since

$$I_x^0(a, 0) = L(a, 0, 0) = 1 \neq 0.$$

Equation (6.5) thus defines a manifold S which in the neighborhood of $x = a$ on γ satisfies the lemma.

Reference to the form of I^0 shows that all the partial derivatives of I^0 with respect to the y_i's vanish when $(y) = (0)$, from which it follows that S is orthogonal to the x axis at $x = a$.

If now we suppose the base $y_{ij}(x)$ is unitary at $a = x$ we may apply the lemma of Morse § 16 to the jth column of y_{ij}, and thereby obtain the following.

$$\bar{x}_{y_i y_j}(0) + r_{ik}(a)\, y'_{kj}(a) = 0 \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n).$$

If we compare this with (5.1) *we see that*

$$\bar{x}_{y_i y_j}(0) = -g_{ij}, \tag{6.6}$$

a relation that will be useful presently.

---

[8]) An n-manifold S is called regular if on it the coordinates of points neighboring a given point admit a representation in terms of n parameters in which not all of the jacobians of the coordinates with respect to the n parameters are zero.

[9]) Bliss, The transformations of Clebsch in the calculus of variations, Transactions of the American Mathematical Society 17 (1916), p. 595.

§ 7.

The fundamental quadratic form of a conjugate family.

We shall now review certain theorems which show how to characterize focal points in terms of a fundamental quadratic form. Consider a conjugate family *without focal point* at $x = a$ on γ. Let S be the manifold which cuts the family transversally at $x = a$.

Let us cut across the portion of γ for which $a < x < b$ with m successive n-planes t_i, perpendicular to γ, cutting respectively in points at which $x = x_i$. These n-planes divide γ into $m+1$ successive segments. Suppose these n-planes are placed so near together that no one of these $m+1$ segments contains a conjugate point of its initial end point. Let P_i be any point on t_i near γ. Let the points on γ at which $x = a$ and $x = b$ respectively be denoted by A and B. Let Q denote any point near A on the manifold S.

The points

$$Q, P_1, P_2, \ldots, P_m, B \tag{7.1}$$

can be successively joined by extremal segments neighboring γ. Let the resulting broken extremal be denoted by E. Let (v) be a set of $\mu = (m+1)n$ variables of which the first n are the coordinates (y) of Q, the second n are those of P_1, and so on, until finally the last n are the coordinates (y) of P_m. The value of the integral I taken along E will be a function of the variables (v) of class C'' at least, and will be denoted by $J(v)$.

The function $J(v)$ will have a critical point when $(v) = (0)$. We set

$$H(u) = J_{v_h v_k}(0)\, u_h u_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{7.2}$$

The form $H(u)$ will be called the *fundamental form* of the given conjugate family taken from $x = a$ to $x = b$.

Consider now the points

$$P_0, P_1, \ldots, P_m; B, \tag{7.3}$$

where Q in (7.1) is here replaced by a point P_0 in the plane $x = a$. Let (u) be a complex of μ variables composed of the sets of coordinates (y) of the points (7.3) omitting B, and taking these sets in the order of the points (7.3). A curve of class C' which passes from P_0 to B through points (7.3) will be said to *determine* the corresponding set (u).

If we differentiate the function

$$J(eu_1, \ldots, eu_\mu)$$

twice with respect to e, and set $e = 0$, making use of (6.6), we obtain, as in the proof of the lemma, Morse § 17, the following result.

Lemma. *The fundamental form $H(u)$ of the given conjugate family is given as follows:*

$$(7.4) \qquad H(u) = g_{ij} u_i u_j + \int_a^b (r_{ij} \eta_i' \eta_j' + p_{ij} \eta_i \eta_j) dx \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

where g_{ij} is the ijth initial element of the family at $x = a$, and $[\eta(x)]$ gives the coordinates (y) along the broken extremal from P_0 to B which determines the set (u).

We come to the following theorem.

Theorem 2. *If the point $x = b$ is a focal point of the given family of the rth order, the rank of $H(u)$ is $\mu - r$. If $x = b$ is not a focal point of the family the rank of $H(u)$ is μ, and the negative type number*[10]*) of $H(u)$ equals the number of focal points of the given family between $x = a$ and $x = b$, always counting focal points according to their orders.*

For the reader who has examined the proofs of Theorems 1 to 4 of the earlier paper it will suffice here to enumerate the essential steps as follows.

a) The nullity of the matrix of $H(u)$ will equal the number of linearly independent solutions (u) of the μ equations $H_{u_i} = 0$. The latter equations when expressed in the terms of the right member of (7.4), are seen to be necessary and sufficient conditions on a set (u) for such a set to determine a member of the conjugate family passing through B. If B is a focal point of the family of the rth order there will be exactly r such sets which are linearly independent. The statements of the theorem about the rank of $H(u)$ follow.

b) To determine the type numbers of $H(u)$ we vary the position of the point b from a point nearer $x = a$ than any focal point of the family, to its final position as given. At the start of this variation we see that $H(u)$ will be of negative type zero. As b increases through each focal point the negative type number of $H(u)$ can change by at most the nullity of $H(u)$, that is by at most the order of the focal point. Hence the negative type number is at most the sum q of the orders of the focal points.

c) A lemma on quadratic forms could be stated as follows. A quadratic form which is negative on a q-plane through the origin, excepting the origin, will be of negative type at least q.

---

[10]) By the positive and negative type numbers of a real quadratic form, will be understood the number of positive and negative terms respectively in the form when reduced by a real non-singular linear transformation to squared terms only.

Let $x = c$ be any focal point of the family. We now join B to a point P_0 on the n-plane $x = a$ as follows. We pass along the x axis from B to $x = c$, and then along any curve of the conjugate family to a point P_0 on $x = a$. Let (u) be the set determined by this curve. If c is of order r we can get r such sets which are linearly independent, and from all the focal points we can get q sets (u) which are linearly independent.

Each of the curves just described and their linear combinations will make the right member of (7.4) zero if (η) in that member be taken along such a curve, and (u) be the set which that curve determines. This is proved by suitably integrating the first sum in the integral by parts. If now each of those curves be replaced by the broken extremal which determines the same (u), the integral will be decreased, at least unless some of the points $x = x_i$ are focal points, or unless $(\eta) \equiv (0)$.

Without changing the type numbers of $H(u)$ we can, however, always displace the points $x = x_i$ so that they are not focal points. We conclude that $H(u)$ is negative at each point of a q-plane π_q through the origin, excepting the origin, so that the negative type number of $H(u)$ must be exactly q.

Thus the theorem is proved.

The preceding proof also includes a proof of the following lemma.

Lemma A. *Suppose none of the points x_i are focal points but that $x = b$ is a focal point of the rth order. Let q equal the sum of the orders of the focal points on the interval $a < x \leqq b$. Then there exists a q-plane π_q through the origin, at each point of which $H(u) < 0$ except at the points of a sub r-plane π_r of points (u) determined by the members of the conjugate family through B.*

At no point of π_q excepting the origin are the first n of the u_i's all zero.

The last statement follows from the fact that the only member of the conjugate family which vanishes at $x = a$ is coincident with the x axis.

§ 8.

The special quadratic form for conjugate points.

Suppose now that we have a conjugate family every member of which vanishes at $x = a$. The focal points of such a family determine what are called the conjugate points of $x = a$. We proceed with this case much as in § 7, defining the n-planes t_i, the points x_i, the points P_i, A, and B.

The points

$$(8.1) \qquad A, P_1, \ldots, P_m, B$$

determine a broken extremal E along which I is evaluated.

By the set (u) is here meant the $\nu = mn$ variables of which the first n are the y-coordinates of P_1, the second n those of P_2, etc., and the last those of P_m. The integral I taken along E thus becomes a function $J(u)$. We set

$$Q(u) = J_{u_h u_k}(0)\, u_h u_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

and term $Q(u)$ *the special form associated with* γ taken from $x = a$ to $x = b$.

The following lemma and theorem are established in Morse § 10 — § 13.

Lemma. *The special form* $Q(u)$ *associated with* γ *taken from* $x = a$ *to* $x = b$ *is given by the formula*

$$Q(u) = \int_a^b (r_{ij}\eta_i'\eta_j' + p_{ij}\eta_i\eta_j)\, dx \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

where $[\eta(x)]$ *gives the* y*-coordinates along the broken extremal joining the points* (8.1) *determined by* (u).

Theorem 3. *If* $x = b$ *is a conjugate point of* $x = a$ *of the* r*th order, the rank of* $Q(u)$ *is* $\nu - r$. *If* $x = b$ *is not conjugate to* $x = a$ *the rank of* $Q(u)$ *is* ν, *and its negative type number is the sum of the orders of the conjugate points of* $x = a$ *preceding* $x = b$.

§ 9.

The continuous variation of conjugate points and focal points.

By the kth conjugate point of a point $x = a$ on γ is meant the kth conjugate point of $x = a$ following $x = a$, counting conjugate points according to their orders. We shall prove the following lemma.

Lemma. *The* k*th conjugate point* $x = c$ *of a point* $x = a$ *on* γ *varies continuously with* $x = a$ *as long as* $x = c$ *remains on* γ.

Let $x = b$ and $x = b'$ be any two points on γ or on a slight extension of γ, not conjugate to $x = a$, and such that

$$a < b' < c < b.$$

The special form $Q(u)$ of Theorem 3 set up for the segment of γ between $x = a$ and $x = b$ will be non-singular, and of negative type at least k. For a sufficiently small variation of $x = a$, Q will remain non-singular and hence unchanged in type, so that the kth conjugate point will exist and preceed $x = b$.

On the other hand the form $Q(u)$ set up for the segment of γ between $x = a$ and $x = b'$ will be non-singular and of negative type less than k. For a sufficiently small variation of $x = a$, $Q(u)$ will remain non-singular, and hence of type less than k, so that the kth conjugate point of $x = a$ will follow $x = b'$.

The lemma follows from the fact that b and b' may be taken arbitrarily near the given value of c.

We shall now prove the following theorem.

Theorem 4. *The kth conjugate point of a point $x = a$ on γ advances or regresses continuously with $x = a$ as long as it remains on γ.*

According to the preceding lemma the kth conjugate point of $x = a$ varies continuously with $x = a$. To prove that it advances with $x = a$, suppose the theorem false and that when $x = a$ advances to a nearby point $x = a_1$ the kth conjugate point of $x = a$ regresses from $x = c$ to $x = c_1$. Let $x = b$ be a point not conjugate to $x = a$, and between c_1 and c. We are supposing that

$$a < a_1 < c_1 < b < c.$$

The form $Q(u)$ set up for the segment of γ from $x = a$ to $x = b$ will be non-singular, and of negative type less than k, since b precedes c. On the other hand if we choose the point of division x_1 of § 7 as a_1, and set the first n of the variables (u) in $Q(u)$ equal zero, $Q(u)$ will reduce to a non-singular form which will have a negative type number equal to the number of conjugate points of $x = a_1$ preceding $x = b$, or since c_1 precedes b, a negative type number at least k. According to the theory of quadratic forms $Q(u)$ must then be of negative type number at least k. From this contradiction we infer that the kth conjugate point of $x = a$ advances with $x = a$.

Similarly it follows that the kth conjugate point of $x = a$ regresses with $x = a$ and the theorem is proved.

We state the following theorem.

Theorem 5. *The kth focal point of a conjugate family following a point $x = a$ not a focal point, varies continuously with the initial elements g_{ij} at $x = a$, and with the coefficients of the differential equations.*

That the coefficients of the form $H(u)$ vary continuously with the elements g_{ij}, r_{ij} and p_{ij}, follows with the aid of (7.4). One can then repeat the proof of the lemma in this section, referring to focal points where conjugate points are there referred to, and using $H(u)$ in place of $Q(u)$. In this manner one arrives at a proof of the present theorem.

§ 10.

Separation Theorems.

We commence with the following theorem.

Theorem 6. *Let g_{ij} and g_{ij}^0 be respectively the initial elements at $x=a$ of two conjugate families F and F^0. Let P and N be respectively the positive and negative type numbers of the form*

$$D(u)=(g_{ij}-g_{ij}^0)\,u_i u_j \qquad (i,j=1,\ldots,n).$$

If q and q^0 are respectively the numbers of focal points of F and F^0 on the interval $a \leqq x \leqq b$, we have

$$q^0-P \leqq q \leqq q^0+N. \tag{10.0}$$

It will be sufficient to give the proof for the case that $x=b$ is not a focal point of F or F^0. For if for the given a the theorem is true for every $b>a$ for which $x=b$ is not a focal point, it is clearly true for the special values of b for which $x=b$ is a focal point.

Let the fundamental forms corresponding to F and F^0 taken from $x=a$ to $x=b$, be denoted by $H(u)$ and $H^0(u)$ respectively. According to the lemma of § 7 we have

$$H(u)-H^0(u)=D(u) \qquad (i,j=1,\ldots,n). \tag{10.1}$$

Now $D(u)$ may be written as a form $D(u)$ of rank P and positive type P, minus a form $N(u)$ of rank N and positive type N. We can therefore write (10.1) in the form

$$H(u)-P(u)=H^0(u)-N(u). \tag{10.2}$$

The form $H^0(u)$ is of negative type q^0, and hence will be negatively definite on a suitably chosen q^0-plane π through the origin in the space of the μ variables (u). Further $P(u)$ will be zero on a suitably chosen $(\mu-P)$-plane π_1 also through the origin. If $q^0-P>0$, π will have at least a (q^0-P)-plane π_2 in common with π_1. We see then from (10.2) that $H(u)$ will be negatively definite on π_2. Thus $q \geqq q^0-P$.

On reversing the roles of H and H^0 one proves that q^0 is at least $q-N$. Hence $q \leqq q^0+N$. Thus the theorem is proved.

Since $P+N \leqq n$ we have the following corollary.

Corollary 1. *The number of focal points of any conjugate family on a given interval differs from that of any other conjugate family by at most n.*

If we are dealing with a second order differential equation in the plane, any solution of the differential equation not identically zero gives

the base of a conjugate family. Here $n = 1$ and the corollary becomes the famous Sturm Separation Theorem.

Corollary 1 applied to that particular conjugate family F which determines the conjugate points of a given point, leads to Corollary 2.

Corollary 2. *If there are q conjugate points of the point $x = a$ on the interval $a < x \leqq b$, there will be at most $q + n$ focal points of any conjugate family on that interval.*

To still further extend Theorem 6 we need the following lemma.

Lemma. *The nullity of the difference form $D(u)$ equals the number of linearly independent extremals common to the two families F and F^0.*

The nullity of the form $D(u)$ is the number of linearly independent solutions $(u_1, \ldots, u_n)$ of the equations

$$D_{u_i} = 2(g_{ij} - \overset{0}{g}_{ij})\, u_j = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{10.3}$$

If we refer to the definition (5.1) of the initial elements g_{ij}, we see that (10.3) may be written in the form

$$r_{ik}(a)\,[y'_{kj}(a) - \overset{0}{y}{}'_{kj}(a)]\, u_j = 0 \tag{10.4}$$

where $y_{ij}(x)$ and $\overset{0}{y}_{ij}(x)$ are respectively elements of bases of F and F^0 which are unitary at $x = a$. But (10.4) is equivalent to the equations

$$y'_{kj}(a)\, u_j = \overset{0}{y}{}'_{kj}(a)\, u_j \qquad (k, j = 1, \ldots, n). \tag{10.5}$$

Since (10.5) gives the conditions that the members of F and F^0 which take on the values $(u_1, \ldots, u_n)$ at $x = a$ be identical with each other, the lemma follows at once.

This leads to the following theorem.

Theorem 7. *If two conjugate families have r linearly independent solutions in common, the number of focal points of the one family on a given interval differs from that of the other family by at most $n - r$.*

According to the lemma the nullity of $D(u)$ is here r, so that in Theorem 6, $P + N = n - r$. The present theorem now follows from (10.0).

To illustrate the general content of Theorem 6 and its corollaries, let us consider an extremal segment g of a regular problem in parametric form in the calculus of variations. (See Morse § 1.) We can transform g into a segment γ of the x axis (Morse § 4), and obtain the following theorem.

Theorem 8. *Suppose g is an extremal in a regular problem in parametric form in the calculus of variations. Let S_1 and S_2 be two regular manifolds of class C''' which cut g transversally at points at which the integrand F is positive. Then the number of focal points of S_1*

on any segment of g differs from the corresponding number for S_2 *by at most* n.

The proof will be at once clear to the student of the calculus of variations, and will not be given here.

§ 11.

A comparison of coefficients.

Let there be given two self-adjoint differential systems

$$\frac{d}{dx}(r_{ij}\,y_j') - p_{ij}\,y_j = 0, \tag{11.1}$$

$$\frac{d}{dx}(\bar{r}_{ij}\,y_j') - \bar{p}_{ij}\,y_j = 0 \tag{11.2}$$

satisfying the requirements of § 3. We shall prove the following theorem.

Theorem 9. *Let* F *and* $\bar{F}$ *be respectively conjugate families of* (11.1) *and* (11.2). *If* F *and* $\bar{F}$ *have the same initial elements* g_{ij} *at* $x = a$, *and if*

$$\bar{r}_{ij}\,\eta_i\,\eta_j < r_{ij}\,\eta_i\,\eta_j \qquad (\eta) \neq 0, \tag{11.3}$$

$$\bar{p}_{ij}\,\eta_i\,\eta_j < p_{ij}\,\eta_i\,\eta_j \qquad (\eta) \neq 0 \tag{11.4}$$

then the q*th focal point of* F, *if it exists, must be preceded by the* q*th focal point of* $\bar{F}$. *Moreover the same result holds if either* (11.3) *or* (11.4), *but not both* (11.3) *and* (11.4) *become equalities.*

Let $H(u)$ and $\bar{H}(u)$ be respectively the fundamental forms for F and $\bar{F}$, taken from $x = a$ to $x = b$. Let us suppose $H(u)$ expressed by (7.4). For the same functions $[\eta(x)]$ it follows from the minimizing properties of the integral in (7.4) that

$$\bar{H}(u) \leqq g_{ij}\,u_i\,u_j + \int_a^b [\bar{r}_{ij}\,\eta_i'\,\eta_j' + \bar{p}_{ij}\,\eta_i\,\eta_j]\,dx.$$

From this relation and (7.4), together with (11.3) and (11.4) we see that

$$\bar{H}(u) < H(u) \qquad (u) \neq 0. \tag{11.5}$$

Now holding a fast, place $x = b$ on γ at a focal point of F of the rth order. Suppose b is then preceded by k focal points, counting focal points from $x = a$. It follows from Lemma A of § 7 that $H(u) \leqq 0$ along some $(k+r)$-plane t through the origin. According to (11.5), $\bar{H}(u) < 0$ on t, except at most at the origin.

The negative type number of $\bar{H}(u)$ must then be at least $k + r$, so that the $(k+r)$th focal point of $\bar{F}$ must precede b, and the theorem is proved.

§ 12.

Further comparison of initial conditions.

Theorem 10. *Let F and F^0 be respectively conjugate families of* (11.1) *determined at $x = a$ by initial elements g_{ij} and g_{ij}^0. If*

(12.1) $$g_{ij} z_i z_j < g_{ij}^0 z_i z_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \quad (z) \neq (0)$$

then the kth focal point of F^0 following $x = a$, if it exists, must be preceded by the kth focal point of F.

Let $H(u)$ and $H^0(u)$ be respectively the fundamental forms for F and F^0 taken from $x = a$ to $x = b$. Suppose b is a focal point of F^0. With the aid of (7.4) we see that

(12.2) $$H(u) - H^0(u) = (g_{ij} - g_{ij}^0) u_i u_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

It follows from the final lemma of § 7 that $H^0(u) \leq 0$ at each point of a q-plane π_q, where q is the sum of the orders of the conjugate points of F^0 on the interval from a to b inclusive, and that at no point on π_q except the origin are the first n of the u_i's zero. Thus on π_q the right member of (12.2) is negative except when $(u) = (0)$. Hence $H(u) < 0$ on π_q except when $(u) = (0)$.

The type number of $H(u)$ must then be at least q, and hence the qth focal point of F must precede $x = b$. The theorem follows at once.

This theorem can be given a geometric form in terms of manifolds S and S_0 which cut the x axis transversally at $x = a$. If we recall that transversality reduces to orthogonality at a point of the x axis, and recall also that

$$g_{ij} = -\bar{x}_{y_i y_j}(0),$$

where $x = \bar{x}(y)$ was our representation of S, we have the following result.

If the difference between the x coordinate of a point on S, and a point on S_0 with the same (y) is a positive definite form in the set (y), then the kth focal point of S_0 following $x = a$, if it exists, must be preceded by the kth focal point of S.

If we have a single second order differential equation

$$\frac{d}{dx}(r y') - p y = 0 \qquad (r > 0)$$

the condition (12.1) becomes

(12.3) $$g_{11} < g_{11}^0.$$

If we refer to the definition of the elements g_{ij} we see that (12.3) takes the form

$$y_{11}'(a) < y_{11}^{0\prime}(a)$$

where

$$y_{11}(a) = y_{11}^0(a) = 1.$$

The theorem then becomes a well known comparison theorem.

§ 13.

Principal planes.

In order to obtain a more intimate knowledge of the variation of the focal points with the initial elements of a conjugate family F we introduce a generalization of the principal directions on a surface as follows.

Suppose $x = a$ is not a focal point of F. Let $x = c$ be a focal point of F of the rth order. The curves of F which pass through $x = c$ on γ intersect the n-plane $x = a$ in an r-plane π_r which will be called the *principal r-plane* corresponding to the focal point c.

Suppose now that the initial elements g_{ij} at $x = a$ are functions $\bar{g}_{ij}(\alpha)$ of class C' of a parameter α for α neighboring α_0. For each α we obtain then a conjugate family, say F_α. We need the following lemma.

Lemma. *If as α approaches α_0, certain focal points approach the point $x = c$ as a limit point, the corresponding principal planes on $x = a$ will have all their limit points on the principal plane corresponding to $x = c$.*

Let $y_{ij}(x, \alpha)$ be a base of F_α that is unitary at $x = a$. From the equations (5.1) defining the elements g_{ij} it follows that $y_{ij}(x, \alpha)$ is continuous in both x and α. A curve of F which meets the n-plane $x = a$ in a point $(y) = (d)$ will be given by

$$y_i = d_j y_{ij}(x, \alpha). \tag{13.1}$$

Now the right hand members of (13.1) are continuous in (d), x, and α. The lemma follows readily.

We state now our final comparison theorem.

Theorem 11. *Let $x = c$ be a focal point of the rth order of the family F_{α_0}, and let t be the corresponding principal r-plane on $x = a$. If on t the form*

$$\bar{g}'_{ij}(\alpha_0)\, y_i y_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.2}$$

is definite, then an increase of α in any sufficiently small neighborhood of α_0 will cause an advance or regression of the r focal points at $x = c$ according as the form (13.2) is positively or negatively definite on t.

Let $H_0(u)$ and $H(u)$ be respectively the fundamental forms corresponding to the families F_{α_0} and F_α, taken on the interval $a \leqq x \leqq c$. From (7.4) we see that if we set (y) equal to the first n variables in the set (u) we have

$$H(u) - H_0(u) = (\alpha - \alpha_0)\, \bar{g}'_{ij}(\bar{\alpha})\, y_i y_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{13.3}$$

where $\bar{\alpha}$ lies between α and α_0.

To be specific suppose the form (13.2) is negatively definite on t. For $(\alpha - \alpha_0)$ positive, and sufficiently small, the right member of (10.3) will still be negatively definite on t.

It will be convenient to call a point (u) *unitary* if $u_i u_i = 1$.

Let us apply Lemma A of § 7 to the family F_{α_0}. We shall prove that $H(u)$ is negatively definite on the q-plane π_q of this lemma, where q is the number of focal points of F_{α_0} on the interval $a \leqq x \leqq c$. To prove this it will suffice to prove that $H(u) < 0$ at all unitary points on π_q.

Now, essentially by hypothesis the right member of (13.3) is negatively definite at the points (y) on t, and accordingly is negative at the unitary points (u) on the r-plane π_r of Lemma A, since the first n coordinates of (u) on π_r give points (y) on t. Hence $H(u) < 0$ at unitary points (u) within a sufficiently small positive distance e of the unitary points on π_r.

At the remaining unitary points on π_q, Lemma A affirms that $H_0(u)$ is negative. Hence at these points $H(u) < 0$, if $\alpha - \alpha_0$ be sufficiently small.

Thus after a sufficiently small increase of α from α_0, $H(u) < 0$ for all unitary points on π_q. Hence $H(u)$ is negatively definite on π_q. Thus the negative type number of $H(u)$ will be at least q. Hence as α increases slightly from α_0, the r focal points originally at $x = c$ regress.

Not only will the focal points at $x = c$ regress when α increases from α_0, but also any small increase of α in the neighborhood of α_0 will correspond to a regression of the focal points in the neighborhood of $x = c$.

This follows from the lemma of this section, because with the aid of that lemma, and with the use of unitary points we see that the form

$$\bar{g}'_{ij}(\alpha)\, y_i y_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

will be negatively definite on each of the principal planes that correspond to focal points near $x = c$, provided $\alpha - \alpha_0$ be sufficiently small. Thus in the proof already given we can replace α_0 by any other value of α, say α_1, sufficiently near α_0, and then show that a small increase of α from α_1 also corresponds to a regression of the focal points near $x = c$.

The case where the form (13.2) is positively definite is treated by first supposing that α decreases, and repeating in essence the preceding proof. The results for an increasing α then follow.

Thus the theorem is proved.

(Eingegangen am 10. 7. 1929.)

Über die Berandung ebener und räumlicher Gebiete (Primendentheorie).

Von

Boris Kaufmann in Heidelberg.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung[1]).

In seiner bekannten Arbeit[2]) untersuchte Herr Carathéodory den Aufbau der Berandung einfach zusammenhängender ebener Gebiete und bestimmte auf rein mengentheoretisch-geometrischem Wege die Randelemente, die er *Primenden* nannte. In der nachfolgenden Arbeit wird die Berandung beliebiger ebener und insbesondere räumlicher Gebiete des dreidimensionalen euklidischen Raumes untersucht. Es wird gezeigt, daß die Ränder aller solcher Gebiete sich ebenfalls lückenlos aus nichtübereinandergreifenden Elementen zusammensetzen, die den von Carathéodory bestimmten Primenden entsprechen. Die von uns bestimmten Randelemente bilden ein der „Hauptbedingung" genügendes System, wonach jede gegen den Rand konvergierende Punktfolge des Gebietes eine gegen das Randelement konvergierende Teilfolge enthält. Diese Randelemente, die wir gleichfalls *Primenden* nennen, sind naturgemäß gestaltlich erheblich komplizierter als diejenigen einfach zusammenhängender ebener Gebiete, weisen aber dennoch im wesentlichen dieselben mengentheoretisch-geometrischen Eigenschaften auf.

Zunächst heben wir hier hervor, daß die unmittelbare Übertragung der Carathéodoryschen Methoden auf den Raum ohne Verletzung der Hauptbedingung unmöglich ist, weshalb ganz andere Wege gesucht werden mußten. Dies gilt bereits für den Fall räumlicher Gebiete vom einfachen Zusammenhang. (Ein Beispiel, durch welches dies nachgewiesen wird, findet sich im § 2.)

In der nachfolgenden Arbeit wird die Gesamtheit aller gegen ein Randelement konvergierenden Punktfolgen — zunächst ohne Verwendung der Gebietszerlegung — bestimmt. Durch Untersuchung der inneren Verknüpfungen der Menge aller gegen den Rand konvergierenden Punktfolgen gelangen wir (im Kap. II) zu dem für unsere Betrachtungen grundlegenden Gebilde, welches wir einen *Komplex* von Punktfolgen nennen (Definitionen A, B und C, § 6). Ein Komplex wird mit Hilfe der transfiniten Induktion aufgebaut; die (endliche oder transfinite) Anzahl der dazu erforderlichen Schritte nennen wir die *Ordnung* des Komplexes. Diejenigen Komplexe, die nicht mehr erweitert werden können, bestimmen sodann in eindeutiger Weise ein Ende, das wir Primende nennen und für welches unter Be-

---

[1]) Die nachfolgende Arbeit ist auf Veranlassung des Herrn Professors A. Rosenthal entstanden und stellt eine Heidelberger Dissertation dar. Ich verdanke Herrn Professor Rosenthal viele wichtige, im nachfolgenden verwertete Anregungen und Ratschläge und spreche ihm hier für die bei der Durchführung dieser Untersuchungen mir ständig gewährte Unterstützung meinen innigsten Dank aus.

[2]) C. Carathéodory, Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Annalen 73 (1913).

nutzung der im Kap. I entwickelten Zerlegungssätze[3]) ein Konstruktionsverfahren gegeben wird[4]). Einem Primende wird die Ordnungszahl des entsprechenden Komplexes zugeordnet. Die Primenden besitzen folgende Grundeigenschaften (Kap. III), von welchen die beiden ersten unmittelbar aus den Definitionen folgen:

1. *Die Primenden enthalten keine inneren Punkte des Gebietes.*

2. *Konvergiert eine Punktfolge gegen ein Primende, so konvergiert jede ihrer Teilfolgen gegen dasselbe Primende.*

3. *Zwei Primenden liegen außerhalb einander oder sie sind identisch und von gleicher Ordnung* (§ 10).

4. *Jede gegen den Rand konvergierende Punktfolge enthält eine Teilfolge, die gegen ein Primende konvergiert* (§ 11).

5. *Die Ordnung der Primenden ist höchstens abzählbar* (§ 12).

6. *Es existieren keine einfachen*[5]) *Teiler eines Primendes, gegen welche nur ein Teil der Punktfolgen eines abgeschlossenen Komplexes erster oder eines nichtabgeschlossenen Komplexes zweiter Ordnung konvergiert*[6]) (§ 13).

7. *Die Primenden sind im Falle eines einfach zusammenhängenden ebenen Gebietes mit den von Carathéodory bestimmten Primenden identisch. Diese letzteren können nur von der ersten oder zweiten Ordnung sein* (§ 14).

Die weiteren Betrachtungen (Kap. IV) betreffen in erster Linie die Gestalt der Primenden; doch bleibt dabei eine Reihe von Fragen noch unentschieden. Für die Gestalt der Primenden ist insbesondere die Tatsache wesentlich, daß räumliche und ebene Primenden existieren, die nur durch solche Querschnittketten bestimmt werden können, deren Grenzgebilde *gleichzeitig erreichbare und unerreichbare* Punkte des Primendes enthalten. Nebst den verallgemeinerten (auch im Raume vorkommenden) vier Primendenarten von Carathéodory erhalten wir *zwei neue Arten von Primenden*, die gleichzeitig erreichbare und unerreichbare Hauptpunkte enthalten.

---

[3]) Von diesen ermöglicht insbesondere der Satz I unter allgemeinen Bedingungen die Gebietszerlegung durch Querschnitte.

[4]) Das Ende wird durch Verallgemeinerung der Carathéodoryschen Enden definiert, wobei wir nicht verlangen, daß je zwei abgeschlossene Querschnitte der Querschnittketten paarweise zueinander fremd sein sollen. Ist hingegen diese letztere Bedingung erfüllt und enthält jede gegen den Gebietsrand konvergierende Punktfolge eines jeden Querschnittes der Kette eine auf einem Einschnitt des Gebietes liegende Teilfolge, so sprechen wir von *einfachen* Enden des Gebietes. Zu solchen Enden gehören insbesondere die Carathéodoryschen Enden (vgl. § 2 und § 13).

[5]) Über den Begriff des einfachen Endes vgl. Fußnote [4]).

[6]) Aus dieser Unteilbarkeitseigenschaft des Primendes ergibt sich leicht der Satz: *Alle Primenden erster oder zweiter Ordnung sind durch einfache Enden unteilbar.*

Die besonders interessanten Fragen, welche einerseits die Mächtigkeit der Primendenmengen, andererseits das Verhalten der Primenden bei topologischen Abbildungen der Gebiete betreffen, betrachten wir in der nachfolgenden Arbeit nicht näher[7]). Doch zeigen sich gerade hier überraschende Resultate. So ist es dem Verfasser bereits gelungen ein räumliches Gebiet zu konstruieren, *dessen Rand aus einem einzigen* (sogar durch einfache Enden unteilbaren) *Primende besteht.*

Kapitel I.

Die Zerlegung der Gebiete.

§ 1.

Schnitte und Querschnitte.

Unter einem beschränkten Gebiet $\mathfrak{G}$ in der Ebene oder im Raume verstehen wir eine ganz im Endlichen liegende Punktmenge, die nur aus inneren Punkten besteht und deren je zwei Punkte sich durch einen geradlinigen Streckenzug von endlicher Streckenzahl verbinden lassen. Mit Γ bezeichnen wir die Berandung des Gebietes $\mathfrak{G}$.

Zur Vermeidung von Wiederholungen führen wir, falls das Gegenteil nicht hervorgehoben ist, sämtliche Betrachtungen für den allgemeineren Fall eines räumlichen Gebietes durch. Diese gelten aber durchweg auch im Falle eines ebenen Gebietes; es sind dann nur gewisse einfache räumliche Begriffe und Bezeichnungen durch die entsprechenden in der Ebene zu ersetzen.

Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Punktmenge, so wollen wir allgemein mit $\mathfrak{M}^0$ die Vereinigungsmenge der Menge $\mathfrak{M}$ mit ihrer Ableitung bezeichnen. Ist M eine Menge von Punktmengen, so bezeichnen wir allgemein mit M^0 die Gesamtheit aller abgeschlossenen Mengen von M.

Genügt eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}^0$ der Bedingung $\mathfrak{G} - \mathfrak{G}\cdot\mathfrak{M}^0 \neq 0$, so können wir leicht sehen, daß $\mathfrak{G} - \mathfrak{G}\cdot\mathfrak{M}^0$ aus endlich oder abzählbar vielen paarweise fremden Gebieten besteht. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{Y}$ der Komplementärmenge $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ mit der Menge $\mathfrak{M}^0$ ist abgeschlossen; deshalb ist die Komplementärmenge von $\mathfrak{Y}$ offen, besteht also aus endlich oder abzählbar vielen fremden Gebieten.

Ist jeder Punkt von $\mathfrak{M}^0\cdot\mathfrak{G} \neq 0$ Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{G} - \mathfrak{M}^0\cdot\mathfrak{G}$, so nennen wir den Durchschnitt $\mathfrak{M}^0\cdot\mathfrak{G} = \Phi$ einen *Schnitt* des Gebietes $\mathfrak{G}$. Ein Gebiet $\mathfrak{G}^*$ mit der Berandung Γ^*, das zugleich eine Komponente von $\mathfrak{G} - \Phi$ ist, nennen wir ein *durch den Schnitt Φ bestimmtes* Teilgebiet

---

[7]) Auf die Fragen nach den Invarianzeigenschaften der Primenden beabsichtigt der Verfasser in einer weiteren Arbeit zurückzukommen.

von $\mathfrak{G}$. Den Durchschnitt $\Gamma^* \cdot \mathfrak{G}$ nennen wir einen das Teilgebiet $\mathfrak{G}^*$ *bestimmenden und durch den Schnitt Φ bestimmten Teilschnitt* von $\mathfrak{G}$.

Hilfssatz 1. *Es sei Φ ein beliebiger Schnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ ein durch Φ bestimmtes Teilgebiet von $\mathfrak{G}$. Es sei $\mathfrak{h}$ ein beliebiges Teilgebiet von $\mathfrak{G}$, das der Bedingung genügt: $(\mathfrak{h}^0 - \mathfrak{h}) \cdot \mathfrak{G} \subset \Phi$. Wir behaupten, das Teilgebiet $\mathfrak{g}$ muß in $\mathfrak{h}$ enthalten sein oder es ist $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{h} = 0$.*

Nehmen wir an, es gilt die Beziehung $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{h} \neq 0$. Es sei O ein beliebiger Punkt des Durchschnittes $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{h}$ und A ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{g}$. Da in $\mathfrak{g}$ kein Punkt von Φ enthalten ist, können wir O mit A durch einen Streckenzug s, der ganz in $\mathfrak{g}$ verläuft und keinen Punkt von Φ trifft, verbinden. Wegen der Beziehung $(\mathfrak{h}^0 - \mathfrak{h}) \cdot \mathfrak{G} \subset \Phi$ trifft s auch keinen Punkt der Berandung von $\mathfrak{h}$. Der beliebige Punkt A von $\mathfrak{g}$ muß darnach auch in $\mathfrak{h}$ enthalten sein.

Einen Punkt ζ des Schnittes Φ von $\mathfrak{G}$ nennen wir *k-seitigen* Punkt (k = natürliche Zahl), falls er den Berandungen von nur k paarweise verschiedenen, durch Φ bestimmten Teilgebieten von $\mathfrak{G}$ angehört.

Einen Schnitt Φ des Gebietes $\mathfrak{G}$ nennen wir *regulär*, falls er folgenden Bedingungen genügt:

1. In einer hinreichend kleinen Kugelumgebung eines jeden Punktes von Φ sind Punkte höchstens endlich vieler, durch Φ bestimmter Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ enthalten.

2. Die Menge der zweiseitigen Punkte eines jeden Teilschnittes φ von Φ in jedem durch das betreffende φ bestimmten Teilschnitt von $\mathfrak{G}$ ist nicht leer.

Wir sagen, ein Schnitt Q *zerlegt* das Gebiet $\mathfrak{G}$, und wir nennen Q einen *Querschnitt* des Gebietes $\mathfrak{G}$, wenn Q nur zwei Teilgebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ bestimmt. Die Berandungen von $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ bezeichnen wir mit Γ_1 bzw. Γ_2. Genügt der Querschnitt Q der Bedingung $\Gamma_1 = Q^0$ oder $\Gamma_2 = Q^0$, so nennen wir Q einen *Rückkehrschnitt* des Gebietes $\mathfrak{G}$.

Im folgenden Satz werden wir zeigen, daß jeder durch einen regulären Schnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$ bestimmte Teilschnitt einen Querschnitt von $\mathfrak{G}$ enthält. Dieser Querschnitt hat gewisse Eigenschaften, die gerade für unsere weiteren Betrachtungen von besonderer Bedeutung sind.

Satz I. *Es sei ein beliebiger regulärer Schnitt Φ des Gebietes $\mathfrak{G}$ gegeben. Es sei O ein Punkt eines durch den Schnitt Φ bestimmten Teilgebietes $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{G}$ und φ der Teilschnitt von $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{h}$ bestimmt. Es sei weiterhin O^* ein außerhalb $\mathfrak{h}$ liegender Punkt der Menge $\mathfrak{G} - \Phi$ und $\mathfrak{h}^*$ das durch φ bestimmte und den Punkt O^* enthaltende Teilgebiet von $\mathfrak{G}$. Wir behaupten, der das Teilgebiet $\mathfrak{h}^*$ bestimmende Teilschnitt ψ ist ein die Punkte O^* und O trennender Querschnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$.*

Die Menge sämtlicher durch den Schnitt φ bestimmter nicht abgeschlossener Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $M(\mathfrak{h})$. Besteht die Menge $M(\mathfrak{h})$ nur aus den beiden Teilgebieten $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}^*$, so ist leicht ersichtlich, daß ψ ein die Punkte O und O^* trennender Querschnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$ ist. Wir setzen nun voraus, daß die Menge $M(\mathfrak{h})$ mindestens ein von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}^*$ verschiedenes Gebiet enthält. Es sei $\mathfrak{h}'$ ein solches durch einen Teilschnitt φ' bestimmtes Teilgebiet der Menge $M(\mathfrak{h})$ und O' ein beliebiger Punkt in seinem Innern. Da Φ regulär ist, können wir einen zweiseitigen Punkt ζ des Teilschnittes φ in φ' bestimmen. Eine hinreichend kleine Kugelfläche K mit dem Mittelpunkt ζ bestimmt eine abgeschlossene Umgebung $\mathfrak{U}^0(\zeta)$ des Punktes ζ, in welcher nur Punkte von $\mathfrak{h}^0\cdot\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{h}'^0\cdot\mathfrak{G}$ enthalten sind. Wir bestimmen jetzt zwei Punkte $\overline{O}\subset\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{U}(\zeta)$ und $\overline{O}'\subset\mathfrak{h}'\cdot\mathfrak{U}(\zeta)$. Den (mit O eventuell identischen) Punkt $\overline{O}$ verbinden wir durch einen Streckenzug $s\subset\mathfrak{h}$ mit dem Punkt O und den (mit O' eventuell identischen) Punkt $\overline{O}'$ mit dem Punkt O' durch einen Streckenzug $s'\subset\mathfrak{h}'$. Die Punkte $\overline{O}'$ und $\overline{O}$ verbinden wir durch einen Streckenzug $\bar{s}\subset\mathfrak{U}(\zeta)$. Die Summe $(s)=s+\bar{s}+s'$ ist offenbar ein Streckenzug, der die Punkte O und O' verbindet und der Beziehung $(s)\cdot\varphi\subset\mathfrak{U}(\zeta)$ genügt. Aus den Beziehungen $\psi\subset\varphi$ und $\psi\cdot\mathfrak{U}(\zeta)=0$ ergibt sich $(s)\cdot\psi=0$.

Bezeichnen wir das durch den Schnitt ψ bestimmte und den Punkt O enthaltende Teilgebiet mit $\mathfrak{h}^{**}$, so können wir jetzt schließen, daß in $\mathfrak{h}^{**}$ jedes von $\mathfrak{h}^*$ verschiedene Teilgebiet der Menge $M(\mathfrak{h})$ enthalten ist. Jeder außerhalb $\mathfrak{h}^*+\psi$ liegende Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}$ muß in $\mathfrak{h}^{**}$ enthalten sein. Der Teilschnitt ψ ist also ein Querschnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{G}$ in zwei Teilgebiete $\mathfrak{h}^{**}>O$ und $\mathfrak{h}^*>O^*$ zerlegt. (Der Querschnitt ψ trennt also den Punkt O von jedem Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}$, der sich mit dem gewählten außerhalb $\mathfrak{h}^0$ liegenden Punkt O^* von $\mathfrak{G}$ durch einen den Teilschnitt φ nicht treffenden Streckenzug in $\mathfrak{G}$ verbinden läßt.)

Anmerkung. *Aus dem Satz* I *gewinnen wir leicht die Folgerung: Sind A und B zwei verschiedene Punkte des Gebietes $\mathfrak{G}$, so ist es immer möglich, die beiden Punkte durch einen Querschnitt, der kein Rückkehrschnitt ist, zu trennen.* Die beiden Punkte A und B verbinden wir durch eine Strecke $\overline{AB}$ und legen durch einen beliebigen von A und B verschiedenen Punkt J des Durchschnittes $\overline{AB}\cdot\mathfrak{G}$ eine zu $\overline{AB}$ senkrechte Ebene ε. Der Durchschnitt $\varepsilon\cdot\mathfrak{G}$ ist ein regulärer Schnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$: jeder seiner Punkte ist zweiseitig. Es sei $\mathfrak{h}$ das durch einen Teilschnitt φ von $\varepsilon\cdot\mathfrak{G}$ bestimmte und den Punkt A enthaltende Teilgebiet. Der Teilschnitt von φ, welcher das den Punkt B enthaltende Teilgebiet bestimmt, ist ein die Punkte A und B trennender Querschnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$, welcher offenbar kein Rückkehrschnitt sein kann.

Im Verlaufe unserer weiteren Betrachtungen wollen wir nur mit solchen Querschnitten operieren, die in *der Vereinigungsmenge endlich vieler Jordanscher Flächen enthalten sind* und die wir fortwährend kurzweg als *Querschnitte* bezeichnen werden.

§ 2.

Die Enden.

Ist $\mathfrak{M}$ eine *Folge* von Mengen, deren Elemente Raumpunkte sind (bzw. eine beliebige Gesamtheit solcher Folgen), und $\mathfrak{M}^*$ eine Menge, deren Elemente Raumpunkte sind, so sagen wir, $\mathfrak{M}$ ist *wesentlich* in $\mathfrak{M}^*$ enthalten, falls mindestens fast alle Mengen der Folge $\mathfrak{M}$ (bzw. fast alle Mengen einer *jeden* Folge von $\mathfrak{M}$) in $\mathfrak{M}^*$ enthalten sind. Im folgenden wollen wir fortgesetzt von dieser Festsetzung Gebrauch machen.

Es seien zwei unendliche Folgen von Punktmengen

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots \tag{1}$$

und

$$M_1^*, M_2^*, \ldots, M_n^*, \ldots \tag{2}$$

in einem beschränkten Raumteil gegeben. Wir sagen, die Folge (2) ist der Folge (1) *untergeordnet*, falls folgendes erfüllt ist: Es existiert eine umkehrbar eindeutige Zuordnung $\mathfrak{Z}$ der Folgen (1) und (2), die allgemein eine Menge $M_{a_n}^*$ (a_n natürliche Zahl) der Menge M_n zuordnet, wobei für jedes n $M_{a_n}^* \subset M_n$ gilt.

Die Gesamtheit der Häufungspunkte einer (in einem beschränkten Raumteil liegenden) Folge von Mengen

$$(M) = M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

oder von Punktfolgen, die einer beliebigen ihrer Teilfolgen untergeordnet sind, nennen wir das *Grenzgebilde* der Folge (M) und bezeichnen es mit T_M. Wir sagen, eine konvergente Punktfolge (nicht notwendig paarweise verschiedener Punkte) konvergiert in (M) gegen T_M, falls sie der Folge (M) oder einer beliebigen ihrer Teilfolgen untergeordnet ist. T_M ist immer abgeschlossen. Besteht die Folge (M) aus Kontinuen und ist ihr *selbst* eine konvergente Punktfolge untergeordnet, so können wir aus einem bekannten Zorettischen Satz [8]) schließen, daß T_M ein Kontinuum oder ein Punkt ist.

Unter einer *Gebietskette*

$$\mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n \cdots \tag{3}$$

verstehen wir eine Folge ineinandergeschachtelter durch Querschnitte bestimmter Teilgebiete von $\mathfrak{G}$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{q}_n$ den das Gebiet $\mathfrak{g}_n$ bestimmenden Querschnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$, so nennen wir die Folge

$$q_1, q_2, \ldots; q_n, \ldots \tag{4}$$

[8]) F. Hausdorff, Mengenlehre (2. Aufl.) § 28, Satz XIX, S. 163.

eine *Querschnittkette*. (Je zwei Querschnitte der Kette (4) bzw. deren abgeschlossene Hüllen können auch gemeinsame Punkte haben.)

Wir definieren den Begriff des *Endes*, indem wir die axiomatische Definition des Endes (durch fünf Erklärungen) von Carathéodory[9]) in bezug auf die oben definierte Gebietskette wörtlich übertragen. (Dies läßt sich ohne weiteres durchführen). Ein durch eine Gebiets- bzw. Querschnittkette bestimmtes Ende bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}}$.

Es ist leicht ersichtlich, daß das Grenzgebilde $T_{\mathfrak{g}}$ der in (3) festgelegten Folge $\mathfrak{g}_1^0, \mathfrak{g}_2^0, \ldots, \mathfrak{g}_n^0, \ldots$ in dem durch die Gebietskette (3) bestimmten Ende $\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}}$ enthalten ist. Jeder Punkt ζ von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}}$ ist sicher ein Häufungspunkt mindestens einer der Folge $\mathfrak{g}_1^0, \mathfrak{g}_2^0, \ldots, \mathfrak{g}_n^0, \ldots$ untergeordneten Punktfolge, nämlich derjenigen, deren sämtliche Punkte mit ζ identisch sind. Es ist also auch $\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}}$ in $T_{\mathfrak{g}}$ enthalten. Also gilt die Beziehung

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}} = T_{\mathfrak{g}}. \tag{5}$$

In einer noch so kleinen Kugelumgebung eines beliebigen Punktes von $T_{\mathfrak{g}}$ liegt mindestens je ein Punkt fast aller Gebiete der Folge $\mathfrak{g}_1^0, \mathfrak{g}_2^0, \ldots, \mathfrak{g}_n^0, \ldots$ und wir erhalten aus (5) auf Grund des Zorettischen Satzes den

Satz II. *Das Ende $\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}}$ einer Kette von Teilgebieten des Gebietes $\mathfrak{G}$ ist ein Kontinuum oder ein Punkt.*

Wir betrachten jetzt ein beliebiges einfach-zusammenhängendes[10]) räumliches Gebiet. Unter den Querschnitten dieses Gebietes sind insbesondere diejenigen ausgezeichnet, die sich auf die nicht abgeschlossene ebene Quadratfläche topologisch abbilden lassen, wobei auch die Randmenge des Querschnittes mit der Randlinie der Quadratfläche homöomorph sein soll. Solche Querschnitte bilden offenbar das unmittelbare räumliche Analogon der Carathéodoryschen Querschnitte eines einfach zusammenhängenden ebenen Gebietes und wir wollen sie auch im Raume als „*Carathéodorysche Querschnitte*“ [11]) bezeichnen. Wird ein Ende durch eine Kette paarweise fremder Carathéodoryscher Querschnitte, deren Randmengen

---

[9]) C. Carathéodory (Fußn. [8])), S. 331—332.

[10]) Ein mit dem Kugelinnern homöomorphes räumliches Gebiet nennen wir einfach zusammenhängend.

[11]) Im Falle eines einfach-zusammenhängenden ebenen Gebietes ist jeder Querschnitt (in unserem Sinne, vgl. das Ende des § 1) zugleich auch ein Carathéodoryscher Querschnitt. Dies ist bei den einfach-zusammenhängenden Gebieten im Raume bei weitem nicht mehr der Fall. Die Querschnitte (in unserem Sinne) brauchen nicht mit der ebenen Quadratfläche homöomorph zu sein. Auch dann, wenn die Homöomorphie des Querschnittes mit der Quadratfläche gegeben ist, braucht die Randmenge des Querschnittes nicht mit dem Quadratrand homöomorph zu sein. Ferner können die Randmengen der Querschnitte auch unerreichbare Punkte des Gebietsrandes enthalten.

ebenfalls paarweise zueinander fremd sind, definiert, so sprechen wir von *„Carathéodoryschen Enden“*. — Das nachfolgende Beispiel zeigt, daß in einem einfach-zusammenhängenden räumlichen Gebiet kein lückenloses System unteilbarer Enden bzw. unteilbarer Carathéodoryscher Enden existieren muß, daß also die unteilbaren Enden bzw. die unteilbaren Carathéodoryschen Enden der Hauptbedingung (wonach jede gegen den Gebietsrand konvergierende Punktfolge eine gegen ein Randelement konvergierende Teilfolge enthalten soll) nicht genügen. Danach zeigt das nachfolgende Beispiel (Fig. 1) die Unmöglichkeit einer unmittelbaren Übertragung der Carathéodoryschen Theorie auf den Raum, so daß wir veranlaßt sind, andere Methoden zu suchen, was in den Kapiteln II und III geschehen soll.

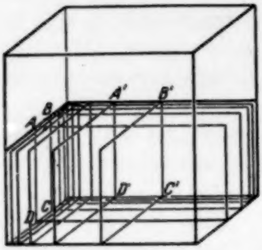


Fig. 1.

In rechtwinkeligen kartesischen Koordinaten (x, y, z) sei ein Einheitswürfel durch die Ecken $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ und $(1, 0, 0)$ festgelegt. Wir bilden die Vereinigungsmenge der Würfelfläche mit der Gesamtheit aller Punkte, die einem der folgenden Wertetripel genügen

$$x = \frac{1}{2^n}, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z \leqq \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$0 < x < 1, \quad y = \frac{1}{2^n}, \quad 0 < z \leqq \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Diese Vereinigungsmenge bildet die Berandung eines einfach zusammenhängenden Gebietes. Alle Randpunkte dieses Gebietes mit den Koordinaten eines der Tripel

$$x = 0, \quad 0 < y \leqq 1, \quad 0 \leqq z < \frac{1}{2}$$

$$0 < x \leqq 1, \quad y = 0, \quad 0 \leqq z < \frac{1}{2}$$

sind in keinem unteilbaren Ende enthalten. Ein Ende, welches irgendeinen dieser Punkte enthält, hat mindestens einen Punkt eines der Tripel

$$x = 0, \quad 0 < y \leqq 1, \quad z = \frac{1}{2}$$

$$0 < x \leqq 1, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2}$$

zum echten (d. h. vom Ende selbst verschiedenen) Teiler. Die Randpunkte mit den Koordinaten eines der Wertetripel

$$x = 0, \quad 0 < y \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$$

$$0 < x \leqq 1, \quad y = 0, \quad 0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$$

sind in keinem durch Carathéodorysche Enden unteilbaren Carathéodoryschen Ende enthalten (z. B. die auf der Würfelfläche liegenden Rechtecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in Fig. 1). Ein Carathéodorysches Ende, welches einen beliebigen dieser Punkte enthält, ist immer durch das mit der Strecke

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$$

identische Carathéodorysche Ende (im echten Sinne) teilbar.

Betrachten wir jetzt ein Gebiet (Fig. 2), das durch die Vereinigungsmenge der oben definierten Würfelfläche mit allen Punkten, die dem Wertetripel

$$x = \frac{1}{2^n}, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z \leqq \frac{1}{2}$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

genügen, begrenzt wird, so können wir zum Unterschied von obigem Beispiel leicht sehen, daß jeder Randpunkt in einem durch Carathéodorysche Enden unteilbaren Carathéodoryschen Ende enthalten ist. (Insbesondere ist auch das auf der Würfelfläche liegende Rechteck $ABCD$ in Fig. 2 ein solches Ende.)

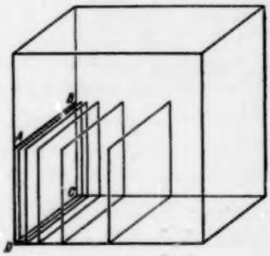


Fig. 2.

Kapitel II.

Die Komplexe.

§ 3.

Die Streckenzugsysteme.

Einem Streckenzug s, der zwei (evtl. identische) Punkte A und B innerhalb $\mathfrak{G}$ verbindet[11a]), wollen wir immer einen Umlaufssinn zuschreiben, indem wir ihn von A nach B oder von B nach A durchlaufen. Ist der Umlaufssinn so festgelegt, daß wir s z. B. in der Richtung von A nach B durchlaufen, so nennen wir A *Anfangs-* und B *Endpunkt* des Streckenzuges und bezeichnen die Richtung, in der s durchlaufen wird, mit $\overrightarrow{AB}$.

Zur Vereinfachung und Abkürzung der weiteren Betrachtungen wollen wir im allgemeinen auch einen einzelnen Punkt A des Gebietes $\mathfrak{G}$ als

[11a]) Im allgemeinen setzen wir voraus, daß ein Streckenzug sich nicht überschneidet. Diese Voraussetzung ist allerdings für das Weitere nicht wesentlich. Die Überschneidungspunkte könnten auch mehrfach gezählt werden. Außerdem enthält ein sich überschneidender Streckenzug einen sich nicht überschneidenden dasselbe Punktepaar verbindenden Streckenzug.

einen Streckenzug, der den Punkt A mit sich selber verbindet, auffassen. Sämtliche Definitionen und Behauptungen, die wir in bezug auf die Streckenzüge machen, gelten auch für diesen speziellen Fall. Ist auf einem Streckenzug s innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ eine beliebige abgeschlossene Menge $\mathfrak{m}$ von (evtl. zusammenfallenden) Punkten definiert, so nennen wir einen Punkt x von $\mathfrak{m}$ einen *ersten* Punkt von $\mathfrak{m}$, in bezug auf $\overrightarrow{AB}$, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Durchlaufen wir den Streckenzug s von A nach B, bis der Punkt x zum erstenmal getroffen wird, so enthält der durchlaufene Teil von s keinen von x verschiedenen Punkt der Menge $\mathfrak{m}$.

Es seien zwei beliebige (nicht notwendig konvergente) Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$

(1) $$O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$$

und

(2) $$O_1', O_2', \ldots, O_n', \ldots$$

gegeben. Es seien i, i_1 und $a_n > i$ gewisse natürliche Zahlen und $\mathfrak{Z}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Folge $O_{i+1}, O_{i+2}, \ldots, O_{i+n}, \ldots$ fast aller Punkte von (1) auf die Folge $O_{i_1+1}, O_{i_1+2}, \ldots, O_{i_1+n}, \ldots$ fast aller Punkte von (2), die für jedes $n = 1, 2, \ldots$ einen Punkt O_{a_n} der ersten Folge dem Punkt O'_{i_1+n} der zweiten Folge zuordnet. Für jedes n verbinden wir den Punkt O_{a_n} mit dem Punkt O'_{i_1+n} durch einen Streckenzug s_n innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$. Die Folge der Streckenzüge

$$S = s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

nennen wir ein *Streckenzugsystem*, das die Punktfolgen (1) und (2) (in der durch $\mathfrak{Z}$ gegebenen Zuordnung) innerhalb $\mathfrak{G}$ verbindet. Die beiden Zahlen i und i_1 nennen wir die *Anfangsindizes* von (1) bzw. (2) in bezug auf S.

Ganz entsprechend sagen wir, ein Punkt O von $\mathfrak{G}$ wird mit der Punktfolge $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ von $\mathfrak{G}$ durch ein Streuungssystem $S = s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ verbunden, falls für jedes n der Punkt O_n mit dem Punkt O durch den Streckenzug s_n verbunden wird.

Zur Vereinfachung der Bezeichnung und der Ausdrucksweise machen wir noch die folgende Annahme. Sind die beiden Punktfolgen (1) und (2) in einer gewissen Zuordnung $\mathfrak{Z}$ durch ein bestimmtes Streckenzugsystem S verbunden, so denken wir uns die beiden Punktfolgen und das Streckenzugsystem so geordnet, daß immer für jedes n die beiden Punkte O_{i+n} und O_{i_1+n} sich in der Zuordnung $\mathfrak{Z}$ entsprechen und durch den Streckenzug s_n verbunden werden. (Ist uns eine der drei Folgen (1), (2) und S fest geordnet gegeben, so können wir die beiden anderen Folgen entsprechend dieser Annahme umordnen.)

Wir definieren noch die „Addition" zweier Streckenzugsysteme. Verbindet das Streckenzugsystem $S' = s_1', s_2', \ldots, s_n', \ldots$ die Punktfolge (1) mit der Punktfolge (2) (in einer Zuordnung $\mathfrak{Z}_1$) und das Streckenzugsystem $S'' = s_1'', s_2'', \ldots, s_n'', \ldots$ die Punktfolge (1) mit der Punktfolge

$$(3) \qquad P_1'', P_2'', \ldots, P_n'', \ldots$$

(in einer Zuordnung $\mathfrak{Z}_2$), so wollen wir die Punktfolgen (1) und (3) durch Addition der beiden Streckenzugsysteme auf folgende Weise verbinden. Bedeuten die beiden Zahlenpaare i, i_1 und i^*, i_2 die Anfangsindizes von (1) und (2) in bezug auf S' bzw. von (1) und (3) in bezug auf S'', so können wir zwischen den Zahlen i und i^* eine beliebige Relation, z. B. $i^* \geqq i$ annehmen, wobei $i^* = i + l$ $(l \geqq 0)$ sei, und bilden für jedes n die Summe $s_{l+n}' + s_n''$, welche einen die Punkte P_{i_1+l+n} und P_{i_2+n} verbindenden Streckenzug s_n enthält. Das Streckenzugsystem $S = s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ verbindet die beiden Punktfolgen (1) und (3) in der durch die Addition gegebenen Zuordnung. Die Addition der Streckenzugsysteme kann natürlich ohne weiteres auf eine beliebige endliche Anzahl von Streckenzugsystemen übertragen werden.

§ 4.

Mengen von Punktfolgen mit Unbewalltheitseigenschaften.

Es sei ξ ein beliebiger Randpunkt des Gebietes $\mathfrak{G}$ und $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ eine Folge von Kugeln mit dem Mittelpunkt ξ und den Radien $r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$ $(r_\nu = \frac{1}{2} r_{\nu-1})$. Die durch die Kugel K_ν bestimmte Umgebung des Punktes ξ bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}_\nu(\xi)$. Die Folge $\{\mathfrak{U}_\nu(\xi)\}$ nennen wir kurz die konzentrische Folge von Umgebungen des Punktes ξ.

Es sei

$$(1) \qquad O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots \to \xi$$

eine gegen einen Randpunkt ξ von $\mathfrak{G}$ konvergierende Punktfolge von $\mathfrak{G}$, die aus paarweise verschiedenen Punkten besteht. Wir unterscheiden folgende zwei Fälle:

1. *Jede Kugel K_ν (ν beliebig) einer konzentrischen Kugelfolge mit dem Mittelpunkt ξ bestimmt ein Teilgebiet $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$, in welchem wesentlich die Punktfolge* (1) *enthalten ist. In diesem Fall nennen wir die Punktfolge* (1) *eine α-Punktfolge* (Fig. 3) [11b].

2. *Enthält die Punktfolge* (1) *keine α-Teilfolge, so nennen wir sie eine β-Punktfolge* (Fig. 4).

[11b]) Die meisten von uns gezeichneten Figuren stellen entsprechende einfache Fälle und Beispiele in der Ebene dar.

Genügt die Punktfolge (1) einer der beiden Bedingungen, so nennen wir sie *wohldefiniert.* Aus den Definitionen 1 und 2 ergeben sich unmittelbar die Folgerungen:

Folgerung 1*. *Eine beliebige gegen einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$ konvergierende Punktfolge enthält immer eine wohldefinierte Teilfolge.*

Folgerung 2*. *Jede Teilfolge einer α- oder β-Punktfolge muß ebenfalls eine α- bzw. β-Punktfolge sein.*

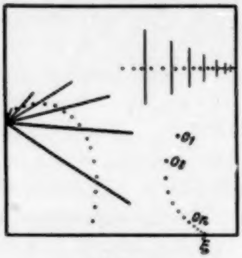


Fig. 3.

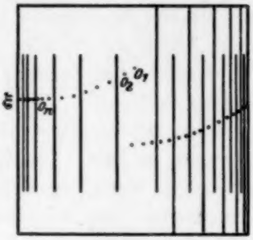


Fig. 4.

Wir wollen jetzt eine Reihe von Begriffen einführen, die eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Brouwerschen Unbewalltheitsbegriff haben. — Eine Menge von Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$ nennen wir kurz eine f-Menge.

Es sei

(2) $$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

eine wohldefinierte Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$. Die Gesamtheit $\mathfrak{P}_f$ *aller* wohldefinierten Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$, die sich mit (2) durch ein Streckenzugsystem verbinden lassen, dessen Grenzgebilde aus einem einzigen Punkt besteht (welches also mit dem Häufungspunkt von (1) identisch ist), nennen wir eine *unbewallte f-Gesamtheit* (Fig. 7). Die Punktfolge (2) nennen wir die *Ausgangspunktfolge* von $\mathfrak{P}_f$.

In bezug auf die unbewallten f-Gesamtheiten können wir leicht folgende Aussagen machen.

Jede wohldefinierte Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$ ist in einer unbewallten f-Gesamtheit enthalten.

Zwei unbewallte f-Gesamtheiten haben einen leeren Durchschnitt oder sie sind identisch.

Es sei

(3) $$O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots \to \xi$$

ein gegen ξ konvergierende α-Punktfolge von $\mathfrak{G}$, die in einer unbewallten f-Gesamtheit $\mathfrak{P}_f$ enthalten ist und $\{K_\nu\}$ die konzentrische Kugelfolge mit dem Mittelpunkt ξ.

(4) Jede Kugel K_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) bestimmt ein Teilgebiet $\mathfrak{h}^{(\nu)}$, in dem wesentlich die f-Gesamtheit $\mathfrak{P}_f$ enthalten ist (d. h. jede Punktfolge von $\mathfrak{P}_f$ ist wesentlich in $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ enthalten).

(5) Jede unbewallte f-Gesamtheit, die eine α-Punktfolge enthält, enthält auch nur α-Punktfolgen; jede unbewallte f-Gesamtheit, die eine β-Punktfolge enthält, enthält auch nur β-Punktfolgen.

(6) Eine gegen ξ konvergierende und wesentlich in $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ für ein noch so großes ν enthaltene Punktfolge ist eine in $\mathfrak{P}_f$ enthaltene α-Punktfolge. Darnach ist auch jede unendliche Teilfolge von (3) ebenfalls in $\mathfrak{P}_f$ enthalten.

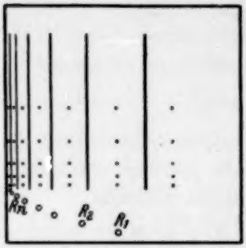


Fig. 5.

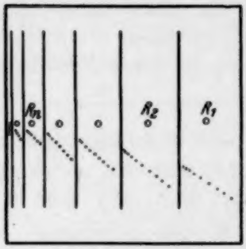


Fig. 6.

Es sei M_f eine Menge wohldefinierter Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$ und

$$(7) \qquad R_1, R_2, \ldots, R_n \ldots \rightarrow \xi$$

eine gegen ξ konvergierende wohldefinierte Punktfolge von $\mathfrak{G}$, die nicht in M_f enthalten ist. *Wir nennen die Punktfolge* (7) *eine unbewallte Grenzpunktfolge der Menge* M_f (Fig. 5 und 6), *falls folgende Bedingung erfüllt ist:*

Für jedes ν gibt es zu fast jedem Punkt R_n der Folge (7) *eine Punktfolge von M_f, die mit R_n durch ein wesentlich in einer noch so kleinen Umgebung $U_\nu(\xi)$ enthaltenes Streckenzugsystem verbunden werden kann*[12]).

Aus der Definition der unbewallten Grenzpunktfolgen erhalten wir unmittelbar die Folgerungen:

Folgerung 1**. Eine beliebige Teilfolge einer unbewallten Grenzpunktfolge von M_f ist wiederum eine unbewallte Grenzpunktfolge von M_f oder sie ist in M_f enthalten.

Folgerung 2**. Es sei eine beliebige gegen einen Randpunkt ξ von $\mathfrak{G}$ konvergierende Folge von Teilgebieten von $\mathfrak{G}$

$$(8) \qquad \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_n, \ldots \rightarrow \xi$$

---

[12]) Ist (7) insbesondere eine α-Punktfolge, so läßt sie sich wesentlich in einer noch so kleinen Kugelumgebung von ξ mit einer Punktfolge von M_f verbinden.

und eine der Folge (8) untergeordnete f-Folge (Folge von Punktfolgen) der Menge M_f gegeben. Eine beliebige der Folge (8) ebenfalls untergeordnete wohldefinierte Punktfolge ist eine unbewallte Grenzpunktfolge von M_f oder sie ist in M_f selbst enthalten.

Wir sprechen von einer unbewallten α- bzw. β-Grenzpunktfolge der Menge M_f, je nachdem (7) eine α- oder β-Punktfolge ist. Die Gesamtheit aller paarweise verschiedenen unbewallten α- bzw. β-Grenzpunktfolgen der Menge M_f bezeichnen wir mit $L_\alpha(M_f)$ bzw. $L_\beta(M_f)$. Die Summe

$$L_\alpha(M_f) + L_\beta(M_f) = L(M_f)$$

nennen wir die unbewallte f-Grenzmenge von M_f.

Aus (6) gewinnen wir jetzt die Behauptung: Ist $\mathfrak{P}_f$ eine unbewallte f-Gesamtheit, die aus α-Punktfolgen besteht, so ist immer

(9) $$L(\mathfrak{P}_f) = 0.$$

(10) Ist eine Punktfolge einer unbewallten f-Gesamtheit $\mathfrak{P}_f$ in $L_\alpha(M_f)$ (bzw. $L_\beta(M_f)$) enthalten, so ist eine jede beliebige Punktfolge von $\mathfrak{P}_f$ in $L_\alpha(M_f)$ (bzw. in $L_\beta(M_f)$) oder in M_f selbst enthalten.

(11) Ist M'_f eine f-Teilmenge von $(M_f + L(M_f))$, so können wir aus der Definition der unbewallten Grenzpunktfolge leicht die Beziehung $L(M'_f) \subset (M_f + L(M_f))$ folgern. Darnach ist insbesondere $L(M_f + L(M_f)) = 0$.

§ 5.

Die konjugierten Mengen.

Das Grenzgebilde eines Streckenzugsystems $\mathfrak{S} = \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n, \ldots$, das zwei beliebige Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$ (in beliebiger Anordnung) verbindet, sei mit $T_\mathfrak{f}$ bezeichnet und in der Berandung Γ von $\mathfrak{G}$ enthalten. Wir nennen das Streckenzugsystem $\mathfrak{S}$ **ausgezeichnet**, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. *Sämtliche gegen das Grenzgebilde $T_\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ konvergierenden wohldefinierten Punktfolgen sind α-Punktfolgen und $T_\mathfrak{f}$ besteht aus einem einzigen Punkt, oder*

2. *Sämtliche gegen das Grenzgebilde $T_\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ konvergierenden wohldefinierten Punktfolgen sind β-Punktfolgen.*

Wie ohne weiteres klar, ist ein Teilsystem eines ausgezeichneten Streckenzugsystems wiederum ausgezeichnet. Zwei wohldefinierte Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$, die sich durch ein ausgezeichnetes Streckenzugsystem verbinden lassen, nennen wir *konjugiert* zueinander.

Die Gesamtheit Δ aller zu einer gewissen, α- oder β-Punktfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ von $\mathfrak{G}$ konjugierten Punktfolgen nennen wir eine konju-

gierte f-Menge und $P_1, P_2, \ldots, P_n \ldots$, *die Ausgangsfolge von* Δ (Fig. 8 und $\mathfrak{P}_f = \Delta$ in Fig. 7). *Die Summe*

$$\Delta + L(\Delta) = \Delta^0$$

nennen wir die abgeschlossene konjugierte f-Menge.

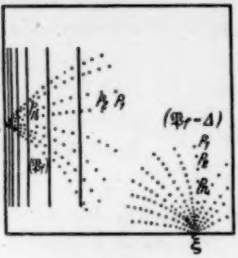


Fig. 7.

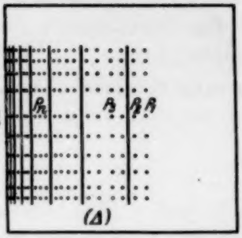


Fig. 8.

Aus der Definition der konjugierten Punktfolgen und f-Mengen gewinnen wir eine Reihe von Folgerungen, von denen die ersten vier unmittelbar ersichtlich sind.

Folgerung 1. Eine beliebige wohldefinierte Punktfolge von $\mathfrak{G}$ ist zu sich selbst konjugiert[13]).

Folgerung 2. Läßt sich eine beliebige Punktfolge von $\mathfrak{G}$ durch ein ausgezeichnetes Streckenzugsystem mit einer wohldefinierten Punktfolge verbinden und ist eine wohldefinierte Teilfolge der ersten Punktfolge gegeben, so existiert eine zu ihr konjugierte Teilfolge der anderen Punktfolge.

Folgerung 3. Sind zwei Punktfolgen zu einer dritten Punktfolge konjugiert, so sind sie auch zueinander konjugiert[13a]).

Folgerung 4. Gehören zwei Punktfolgen einer und derselben konjugierten f-Menge Δ an, so sind sie immer zueinander konjugiert.

Folgerung 5. Zwei nicht abgeschlossene konjugierte f-Mengen Δ' und Δ'' sind zueinander fremd oder sie sind identisch.

Nehmen wir an, diese Behauptung sei nicht erfüllt. Es gelten dann die Beziehungen $\Delta' \neq \Delta''$ und $\Delta' \cdot \Delta'' \neq 0$. Eine der beiden konjugierten f-Mengen, z. B. Δ'', enthält darnach eine Punktfolge

(1) $$O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots,$$

[13]) Nach der Definition der Streckenzüge können wir eine Punktfolge selbst als ein Streckenzugsystem auffassen.

[13a]) Durch Addition (§ 3) der gegebenen ausgezeichneten Streckenzugsysteme erhalten wir ein die ersten beiden Punktfolgen verbindendes ausgezeichnetes Streckenzugsystem.

die in Δ' nicht enthalten ist. Andererseits existiert eine Punktfolge

(2) $$O_1^*, O_2^*, \ldots, O_n^*, \ldots$$

des nicht leeren Durchschnittes $\Delta' \cdot \Delta''$. Die Ausgangspunktfolge von Δ' und die Punktfolge (1) sind beide nach der Folgerung 4 zu der Punktfolge (2) konjugiert und müssen nach der Folgerung 3 zueinander konjugiert sein. Die Punktfolge (1) müßte also in Δ' enthalten sein, was unserer Annahme widerspricht.

Folgerung 6. Zwei α-Punktfolgen

(3) $$P_1', P_2', \ldots, P_n', \ldots \to \xi$$

und

(4) $$P_1'', P_2'', \ldots, P_n'', \ldots \to \xi$$

einer unbewallten f-Gesamtheit $\mathfrak{P}_f$ sind zueinander konjugiert.

Nach (4) § 4 bestimmt jede Kugel K_ν einer konzentrischen Kugelfolge $\{K_\nu\}$ mit dem Mittelpunkt ξ ein innerhalb K_ν liegendes Teilgebiet $\mathfrak{h}^{(\nu)}$, das wesentlich die beiden Punktfolgen (3) und (4) enthält. Für jedes Punktepaar P_n', P_n'', das in $\mathfrak{h}'$ liegt, bestimmen wir das letzte Gebiet $\mathfrak{h}^{(\lambda_n)}$ $(\nu = \lambda_n)$ der Gebietsfolge $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h}'' \supset \ldots \supset \mathfrak{h}^{(\nu)} \ldots$, das den Punkt P_n' bzw. das letzte Gebiet $\mathfrak{h}^{(\mu_n)}$ $(\nu = \mu_n)$ dieser Folge, das den Punkt P_n'' enthält. Wir wählen die kleinere der beiden Zahlen λ_n und μ_n, die $\varkappa_n$ genannt werde und verbinden P_n' mit P_n'' durch einen beliebigen Streckenzug innerhalb $\mathfrak{h}^{(\varkappa_n)}$. Wir erhalten auf diese Weise ein ausgezeichnetes Streckenzugsystem, das die beiden Punktfolgen (3) und (4) verbindet.

Folgerung 7. Ist eine α-Punktfolge einer konjugierten f-Menge Δ in einer unbewallten f-Gesamtheit $\mathfrak{P}_f$ enthalten, so gilt immer die Beziehung $\mathfrak{P}_f \equiv \Delta \equiv \Delta^0$ (vgl. $P_f = \Delta$ in Fig. 7).

Diese Folgerung ergibt sich aus (9) § 4 und der Folgerung 6.

§ 6.

Die Definition der Komplexe.

Die folgenden Definitionen (A, B und C) sind für unsere weiteren Betrachtungen von grundlegender Bedeutung.

Definition A. *Es sei Δ eine konjugierte f-Menge und $M(\Delta)$ die Gesamtheit aller paarweise verschiedenen konjugierten f-Mengen des Gebietes $\mathfrak{G}$, die mindestens irgendeine Teilfolge einer beliebigen Punktfolge von Δ enthalten. Genügt eine jede konjugierte f-Menge Δ' von $M(\Delta)$ der Bedingung*

$$\Delta^0 \cdot \Delta'^0 \neq 0,$$

so nennen wir die Vereinigungsmenge

$$V(M(\Delta^0)) = \Delta_1$$

sämtlicher abgeschlossener f-Mengen von $M(\Delta)$ einen **Komplex** *erster Ordnung. Die Menge $M(\Delta)$ nennen wir die Grundmenge und Δ die konjugierte Ausgangsmenge des Komplexes erster Ordnung Δ_1.*

Eine wohldefinierte Punktfolge von $\mathfrak{G}$ nennen wir *normiert*, falls sie in einem Komplex erster Ordnung enthalten ist.

Folgerung 1. Sind Δ^* und Δ^{**} zwei nicht identische konjugierte f-Mengen der Grundmenge $M(\Delta)$ eines Komplexes Δ_1 erster Ordnung, so gilt immer die Beziehung

$$\Delta^{*0} \cdot \Delta^{**0} \neq 0.$$

Nach der Definition A genügt es offenbar den Fall zu betrachten, wo die beiden konjugierten f-Mengen Δ^* und Δ^{**} von der konjugierten Ausgangsmenge Δ des Komplexes Δ_1 verschieden sind.

(1) Aus den Folgerungen 2 und 4 (§ 5) können wir leicht schließen, daß jede Punktfolge von Δ je eine Punktfolge von Δ^* bzw. von Δ^{**} (als ihre Teilfolgen) enthält.

Es sei

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \tag{2}$$

eine beliebige Punktfolge des Durchschnittes $\Delta^0 \cdot \Delta^{*0}$. Ist die Punktfolge (2) in $L(\Delta)$ enthalten, so muß sie (wegen (1)) entweder in $L(\Delta^{**})$ oder in Δ^{**} selbst enthalten sein. Ist dagegen die Punktfolge (2) in Δ enthalten, so muß nach (1) eine ihrer Teilfolgen im Durchschnitt $\Delta^{**} \cdot L(\Delta^*)$ enthalten sein.

Folgerung 2. Damit eine wohldefinierte Punktfolge einer konjugierten f-Menge Δ normiert ist, ist eine jede der folgenden Bedingungen hinreichend:

1. Eine Punktfolge von Δ ist zu jeder ihrer Teilfolgen konjugiert.
2. Eine f-Teilmenge $\Delta^* \subset \Delta$ genügt der Bedingung $L(\Delta^*) \neq 0$.

Man berücksichtige hier insbesondere die Feststellung (1), sowie die Folgerung 5 (§ 5).

Ist M_f eine beliebige Gesamtheit normierter Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$, so bezeichnen wir *fortgesetzt* mit $L^*(M_f)$ die Gesamtheit aller normierten Punktfolgen der unbewallten Grenzmenge $L(M_f)$ und mit $L^*_\alpha(M_f)$ bzw. $L^*_\beta(M_f)$ die aus α- bzw. aus β-Punktfolgen bestehenden Teile von $L^*(M_f)$.

Die Summe

$$\Delta_1 + L^*(\Delta_1) = \Delta_1^0$$

nennen wir einen *abgeschlossenen Komplex* erster Ordnung. Aus den Folgerungen 5 und 7 des vorhergehenden Paragraphen erhalten wir die

Folgerung 3. Ist in der konjugierten Ausgangsmenge eines Komplexes erster Ordnung eine α-Punktfolge einer unbewallten Punktfolgengesamtheit $\mathfrak{P}_f$ enthalten, so gilt immer die Identität $\mathfrak{P}_f \equiv \Delta_1 \equiv \Delta_1^0$.

Wir wollen jetzt von den transfiniten Zahlen Gebrauch machen. Es sei $\varrho \geqq 2$ eine beliebige endliche oder transfinite Zahl und

$$(3) \qquad 1, 2, \ldots, \ldots \eta \ldots \qquad (\eta < \varrho)$$

die Menge sämtlicher der Größe nach geordneter Zahlen $< \varrho$. Für jede Zahl η der Folge (3) denken wir uns eine gewisse f-Menge Δ_η normierter Punktfolgen als einen Komplex von der Ordnung η bereits definiert. Es ist dann auch die Summe $\Delta_\eta + L^*(\Delta_\eta) = \Delta_\eta^0$, die wir einen abgeschlossenen Komplex von der Ordnung η nennen, bestimmt. Die Definition eines Komplexes von der Ordnung ϱ wollen wir auf Grund des transfiniten Definitionsverfahrens angeben; wir unterscheiden dabei die Zahlen mit einem unmittelbaren Vorgänger und die Limeszahlen.

Ist ϱ eine Zahl mit einem unmittelbaren Vorgänger $\varrho - 1$, so nennen wir einen Komplex $\Delta_{\varrho'}$ (bzw. den abgeschlossenen Komplex $\Delta_{\varrho'}^0$) von einer Ordnung $\varrho' < \varrho$ in bezug auf die Zahl ϱ *gesättigt*, wenn kein Komplex $\Delta_{\varrho''}$ von einer Ordnung ϱ'' $(\varrho' < \varrho'' \leqq \varrho - 1)$ existiert, welcher der Bedingung genügt $\Delta_{\varrho''} \supset \Delta_{\varrho'}$ [14]).

Zwei beliebige Komplexe Δ_{η_1} und Δ_{η_2} (bzw. die abgeschlossenen Komplexe $\Delta_{\eta_1}^0$ und $\Delta_{\eta_2}^0$) $(\eta_1, \eta_2 \geqq 1)$ nennen wir *benachbart*, wenn folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind

$$\Delta_{\eta_1} \neq \Delta_{\eta_2},$$
$$\Delta_{\eta_1}^0 \cdot \Delta_{\eta_2}^0 \neq 0.$$

Definition B. *Es sei ϱ eine Zahl mit einem unmittelbaren Vorgänger. Es sei $M(\Delta_\eta)$ eine Gesamtheit von mindestens zwei paarweise nicht identischen in bezug auf ϱ gesättigten Komplexe (von welchen jeder irgendeine Ordnung $\eta < \varrho$ haben kann), die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *Kein in bezug auf ϱ gesättigter Komplex des Gebietes $\mathfrak{G}$, der in $M(\Delta_\eta)$ nicht enthalten ist, ist zu einem Komplex der Menge $M(\Delta_\eta)$ benachbart.*

2. *Keine von $M(\Delta_\eta)$ verschiedene (mindestens einen Komplex enthaltende) Gesamtheit $M^*(\Delta_\eta) \subset M(\Delta_\eta)$ in bezug auf ϱ gesättigter Komplexe genügt der Bedingung* 1.

---

[14]) Aus der Definition der gesättigten Komplexe folgt unmittelbar: zwei identische in bezug auf eine endliche oder transfinite Zahl ϱ gesättigte, nicht abgeschlossene Komplexe müssen immer von gleicher Ordnung sein.

Die Vereinigungsmenge der der Menge $M(\Delta_\eta)$ entsprechenden Gesamtheit aller abgeschlossenen Komplexe

$$V(M(\Delta_\eta^0)) = \Delta_\varrho$$

nennen wir einen Komplex von der Ordnung ϱ und die Gesamtheit $M(\Delta_\eta)$ die ***Grundmenge*** *des Komplexes Δ_ϱ.*

Definition C. *Es sei ϱ eine Limeszahl.*

$$(4) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

sei eine normierte Punktfolge und $M(\Delta_{\sigma_\lambda})$ $(1 < \sigma_\lambda < \varrho)$ die Gesamtheit aller Komplexe des Gebietes $\mathfrak{G}$, die die Punktfolge (4) *enthalten und die nicht gleichzeitig identisch und von gleicher Ordnung sind. Ist die der Größe nach geordnete Menge aller verschiedenen Ordnungszahlen >1 der Komplexe der Gesamtheit $M(\Delta_{\sigma_\lambda})$*

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\lambda, \ldots \qquad (\sigma_\lambda > 1)$$

mit dem durch ϱ bestimmten Zahlenabschnitt (3) *konfinal, so nennen wir die Vereinigungsmenge*

$$V(M(\Delta_{\sigma_\lambda})) = \Delta_\varrho$$

einen Komplex von der Ordnung ϱ. Die Punktfolge (4) *nennen wir die* ***Ausgangspunktfolge*** *und $M(\Delta_{\sigma_\lambda})$ die* ***Grundmenge*** *des Komplexes Δ_ϱ* [15]).

Die Summe

$$\Delta_\varrho + L^*(\Delta_\varrho) = \Delta_\varrho^0$$

nennen wir für jede beliebige endliche oder transfinite Zahl ϱ einen *abgeschlossenen Komplex* von der Ordnung ϱ.

Ist M_f eine beliebige f-Teilmenge eines abgeschlossenen Komplexes Δ_ϱ^0 von der Ordnung ϱ, so folgt (vgl. (11), § 4) leicht aus der Definition der unbewallten Grenzpunktfolge die Beziehung $L^*(M_f) \subset \Delta_\varrho^0$. Darnach ist insbesondere

$$(5) \qquad L^*(\Delta_\varrho^0) = 0.$$

Ist $M(\Delta)$ eine Gesamtheit von konjugierten f-Mengen, so wollen wir immer mit $M(\Delta^0)$ die Gesamtheit entsprechender abgeschlossener konjugierter f-Mengen bezeichnen. Ebenfalls bezeichnen wir immer mit $M(\Delta_\varrho^0)$ die $M(\Delta_\varrho)$ entsprechende Gesamtheit abgeschlossener Komplexe.

---

[15]) Insbesondere heben wir hier hervor, daß ein und derselbe Komplex Δ_ϱ (je nach der Wahl der Ausgangspunktfolge) verschiedene Grundmengen haben kann.

§ 7.

Die Grundeigenschaften der Komplexe.

Satz III. *Ist Δ_η^0 ein abgeschlossener Komplex beliebiger Ordnung η und*

(1) $$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

eine beliebige Punktfolge von Δ_η^0, so ist jede Teilfolge von (1) *ebenfalls in Δ_η^0 enthalten.*

Es genügt, den Fall zu betrachten, in welchem die Punktfolge (1) in Δ_η enthalten ist. Wäre nämlich (1) in $L^*(\Delta_\eta)$ enthalten, so ergäbe sich die Gültigkeit unserer Behauptung unmittelbar aus der Folgerung 1^{**}, § 4.

Es sei zunächst $\eta = 1$. Nach der Definition A existiert eine konjugierte f-Menge $\Delta^{*0} \subset \Delta_1$, die die Punktfolge (1) und eine Teilfolge einer Punktfolge $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ der konjugierten Ausgangsmenge Δ von Δ_1 enthält. Wegen der Folgerung 1^{**}, § 4 können wir uns wieder auf den Fall beschränken, in welchem die Punktfolge (1) in Δ^* enthalten ist. Ist nun $P_1', P_2', \ldots, P_n', \ldots$ eine beliebige Teilfolge von (1) und zugleich auch die Ausgangspunktfolge einer konjugierten f-Menge $\Delta^{*\prime}$, so enthält $\Delta^{*\prime}$ nach der Folgerung 2, § 5 auch eine Teilfolge von $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$. Nach der Definition A muß $\Delta^{*\prime}$ und darnach auch die Punktfolge $P_1', P_2', \ldots, P_n', \ldots$ in Δ_1 enthalten sein.

Ist $\eta > 1$, so machen wir jetzt die Annahme, daß unsere Behauptung für die Zahl $< \eta$ gilt. Nach den Definitionen B und C muß die Punktfolge (1) in einem Komplex der Grundmenge von einer Ordnung $< \eta$ enthalten sein. Da unser Satz für $\eta = 1$ gilt, so können wir aus unserer Annahme folgern, daß auch jede Teilfolge von (1) in Δ_η enthalten sein muß.

Satz IV. *Sind Δ_η^0 und Δ_ϑ^0 ($\vartheta \geqq \eta$) zwei in bezug auf eine endliche oder transfinite Zahl ϱ gesättigte und benachbarte Komplexe, so existiert immer ein Komplex $\Delta_\varrho \supset \Delta_\eta^0, \Delta_\vartheta^0$ von der Ordnung ϱ, und zwar muß $\varrho = \vartheta + 1$ sein.*

Es sei $M(\Delta_\lambda)$ die Menge aller in bezug auf ϱ gesättigten Komplexe des Gebietes $\mathfrak{G}$, die nicht paarweise identisch sind. Die Menge, die nur aus den beiden Komplexen Δ_η^0 und Δ_ϑ^0 besteht, bezeichnen wir mit $M({}_1\Delta_\lambda^0)$. Mit $M({}_2\Delta_\lambda^0)$ bezeichnen wir die nicht leere Menge sämtlicher Komplexe von $M(\Delta_\lambda^0)$, von welchen jeder zu mindestens einem Komplex von $M({}_1\Delta_\lambda^0)$ benachbart, in $M({}_1\Delta_\lambda^0)$ selbst aber nicht enthalten ist. Allgemein sei $M({}_n\Delta_\lambda^0)$ die Gesamtheit aller mindestens zu einem Komplex von $M({}_{n-1}\Delta_\lambda^0)$ benachbarten, in $M({}_{n-l}\Delta_\lambda^0)$ $(1 \leqq l < n)$ aber nicht enthaltenen Komplexe der Menge $M(\Delta_\lambda^0)$ usf. Diese Definition kann für ein endliches n abbrechen, indem kein zu $M({}_n\Delta_\lambda^0)$ benachbarter und in $M({}_n\Delta_\lambda^0)$ selbst nicht enthaltener Komplex existiert, oder sie läßt sich für ein noch so großes n durchführen.

Wir bilden jetzt die Vereinigung

$$N(\Delta_\lambda^0) = M({}_1\Delta_\lambda^0) + M({}_2\Delta_\lambda^0) + \dots + M({}_n\Delta_\lambda^0) + \dots,$$

die wir das *Erzeugungsprinzip* des Komplexes Δ_ϱ nennen wollen. Ein zu einem Komplex der Menge $N(\Delta_\lambda^0)$ benachbarter Komplex der Menge $M(\Delta_\lambda^0)$ ist selbst in $N(\Delta_\lambda^0)$ enthalten; dies besagt, daß die Menge $N(\Delta_\lambda^0)$ der Bedingung 1 der Definition B genügen muß.

Nehmen wir nämlich an, Δ_λ^{*0} sei ein zu einem Komplex der Menge $N(\Delta_\lambda^0)$ benachbarter und in $N(\Delta_\lambda^0)$ selbst nicht enthaltener Komplex von $M(\Delta_\lambda^0)$. Ein zu Δ_λ^{*0} benachbarter Komplex von $N(\Delta_\lambda^0)$ ist in einer Menge $M({}_\mu\Delta_\lambda^0)$ für ein gewisses $n=\mu$ enthalten. Der Komplex Δ_λ^{*0} müßte darnach, im Widerspruch zu unserer Annahme, in der Gesamtheit $M({}_{\mu+1}\Delta_\lambda^0)$ enthalten sein.

Die Menge $N(\Delta_\lambda^0)$ genügt auch der Bedingung 2 der Definition B.

Nehmen wir nämlich an, es existiert eine nicht leere Gesamtheit von Komplexen $N'(\Delta_\lambda^0)$, die den beiden Bedingungen genügt: $N'(\Delta_\lambda^0) \subset N(\Delta_\lambda^0)$, $N'(\Delta_\lambda^0) \neq N(\Delta_\lambda^0)$ und außerdem die Bedingung 1 der Definition B erfüllt. Darnach ist die Differenz $N(\Delta_\lambda^0) - N'(\Delta_\lambda^0) = R(\Delta_\lambda^0)$ nicht leer. Wir bestimmen die kleinste Zahl $n=k$ mit der Eigenschaft, daß $M({}_k\Delta_\lambda^0)$ einen Komplex ${}_k\Delta_\lambda'^0$ der Gesamtheit $N'(\Delta_\lambda^0)$ enthält. Ist $k>1$, so existiert die Menge $M({}_{k-1}\Delta_\lambda^0) \subset R(\Delta_\lambda^0)$; mindestens ein Komplex ${}_{k-1}\Delta_\lambda \subset M({}_{k-1}\Delta_\lambda^0)$ ist zu dem Komplex ${}_k\Delta_\lambda'$ benachbart und in $N'(\Delta_\lambda^0)$ nicht enthalten. Dies widerspricht unserer Annahme, wonach $N'(\Delta_\lambda^0)$ der Bedingung 1 der Definition B genügt. Die Gesamtheit $N(\Delta_\lambda^0)$ erfüllt also die Bedingung 2 der Definition B für den Fall $k>1$. Ist $k=1$, so muß

$$(4) \qquad M({}_1\Delta_\lambda^0) \subset N'(\Delta_\lambda^0)$$

sein, sonst wäre die Bedingung 1 der Definition B in bezug auf $N'(\Delta_\lambda^0)$ nicht erfüllt, da einer der beiden Komplexe Δ_η^0 und Δ_ϑ^0 in $N'(\Delta_\lambda^0)$ nicht enthalten, aber zu dem anderen benachbart wäre. Wir bestimmen nun die kleinste Zahl $n=i$, die der Bedingung genügt, daß die Menge $M({}_i\Delta_\lambda^0)$ mindestens einen Komplex ${}_i\Delta_\lambda^{*0}$ der Gesamtheit $R(\Delta_\lambda^0)$ enthält. Wegen (4) ist $i>1$, es existiert also eine Menge $M({}_{i-1}\Delta_\lambda^0) \subset N'(\Delta_\lambda^0)$. Diese letztere enthält nach der Definition der Menge $M({}_i\Delta_\lambda^0)$ mindestens einen zu ${}_i\Delta_\lambda^{*0}$ benachbarten Komplex. In diesem Fall ist ein Komplex von $R(\Delta_\lambda^0)$ zu einem Komplex von $N'(\Delta_\lambda^0)$ benachbart, was wiederum nach der Bedingung 1 der Definition B (welcher ja die Menge $N'(\Delta_\lambda^0)$ genügen soll) widerspricht. Die Menge $N(\Delta_\lambda^0)$ genügt also unserer Behauptung auch im Falle $k=1$. Die Menge $N(\Delta_\lambda^0)$ genügt also der Definition B der Komplexe in bezug auf die Zahl ϱ, woraus folgt, daß die Vereinigungsmenge $\Delta_\varrho = V(N(\Delta_\lambda^0))$ ein Komplex von der Ordnung ϱ ist. Die beiden Kom-

plexe Δ_η^0 und Δ_ϑ^0 sind auch in bezug auf die Zahl $\vartheta+1$ gesättigt. Nach dem Obigen können wir einen Komplex $\Delta_{\vartheta+1} > \Delta_\eta^0, \Delta_\vartheta^0$ bilden, woraus die Beziehung $\varrho = \vartheta + 1$ folgt.

Hilfssatz 2. *Es sei Δ_ϱ ein Komplex von der Ordnung $\varrho > 1$ (ϱ eine endliche oder transfinite Zahl mit einem unmittelbaren Vorgänger $\varrho - 1$) und $\Delta_\eta^0 < \Delta_\varrho$ ein in bezug auf ϱ gesättigter Komplex von der Ordnung $\eta < \varrho - 1$. Jeder zu Δ_η benachbarte und in bezug auf ϱ gesättigte Komplex ist von der Ordnung $\varrho - 1$.*

Aus der Bedingung 2 der Definition B folgt die Existenz eines zu Δ_η benachbarten, in bezug auf ϱ gesättigten Komplexes Δ_ϑ. Nehmen wir zwischen den beiden Ordnungszahlen η und ϑ irgendeine beliebige Größenbeziehung, z. B. $\eta \gtrless \vartheta$ an. Nach dem Satz IV ist es möglich, einen Komplex $\Delta_{\vartheta+1} > \Delta_\eta^0, \Delta_\vartheta^0$ von der Ordnung $\vartheta+1$ zu bestimmen. Wäre nun $\vartheta < \varrho - 1$, so müßte $\vartheta + 1 \leqq \varrho - 1$ sein, was der Definition der gesättigten Komplexe widerspricht. Es muß also $\vartheta = \varrho - 1$ sein.

Hilfssatz 3. *Es sei Δ_ϱ ein Komplex von einer beliebigen endlichen oder transfiniten Ordnung $\varrho > 1$ und η eine Zahl $< \varrho$. Es existiert immer ein Komplex $\Delta_\eta^0 < \Delta_\varrho$ von der Ordnung η.*

Wir können diese Behauptung mit Hilfe der transfiniten Induktion leicht beweisen. Ihre Gültigkeit für den Fall $\varrho = 2$ ist unmittelbar ersichtlich, und wir nehmen an, sie gilt auch für jede Zahl $< \varrho$. — Hat die Zahl ϱ einen unmittelbaren Vorgänger, so können wir zunächst nach der Definition B bzw. nach dem Hilfssatz 2 schließen, daß mindestens ein gesättigter Komplex $\Delta_{\varrho-1}^0 < \Delta_\varrho$ von der Ordnung $\varrho - 1$ existiert. Laut Annahme können wir für jeden Wert $\eta \leqq \varrho - 1$ einen Komplex $\Delta_\eta^0 < \Delta_{\varrho-1}$ angeben, der unserer Behauptung genügt.

Hat die Zahl ϱ keinen unmittelbaren Vorgänger und ist

$$(5) \qquad 1, 2, \ldots, \ldots, \eta, \ldots$$

der von ϱ bestimmte Abschnitt von Zahlen, so existiert nach der Definition C die Menge von Komplexen $\Delta_{\sigma_1}, \Delta_{\sigma_2}, \ldots, \ldots, \Delta_{\sigma_\eta}, \ldots$ einer Grundmenge von Δ_ϱ, wobei die Menge der Ordnungszahlen

$$(6) \qquad \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \ldots, \sigma_\eta, \ldots$$

mit (5) konfinal ist. Ist η eine beliebige noch so große Zahl von (5), so können wir eine Zahl $\sigma_{\eta_1} > \eta$ von (6) angeben. Laut unserer Annahme existiert ein Komplex $\Delta_\eta^0 < \Delta_{\sigma_{\eta_1}} < \Delta_\varrho$, der unserer Behauptung auch im Falle einer Limeszahl genügt.

Hilfssatz 4. *Es sei Δ_ϱ ein Komplex von der Ordnung ϱ (ϱ eine Limeszahl) und $M(\Delta_\eta)$ seine in bezug auf die Ausgangspunktfolge*

$$(7) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

definierte Grundmenge. Es sei $\varrho_* < \varrho$ eine beliebige endliche oder transfinite Zahl und $\vartheta > \varrho_*$ die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, daß ein Komplex Δ_ϑ der Menge $M(\Delta_\eta)$ existiert. Wir behaupten, ϑ besitzt einen unmittelbaren Vorgänger.

Nehmen wir an, unsere Behauptung sei nicht erfüllt. Mit $M(\Delta_{\sigma_\chi})$ bezeichnen wir die Grundmenge des Komplexes Δ_ϑ. Die Menge paarweise verschiedener Ordnungszahlen von $M(\Delta_{\sigma_\chi})$

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \ldots, \sigma_\chi, \ldots$$

ist mit dem durch die Zahl ϑ bestimmten Zahlenabschnitt konfinal. Die Punktfolge (7) ist offenbar in irgendeinem Komplex $\Delta_{\sigma'_\chi}$ der Menge $M(\Delta_{\sigma_\chi})$ enthalten. Es sei $\Delta_{\sigma''_\chi}$ ein beliebiger Komplex der Menge $M(\Delta_{\sigma_\chi})$ von der Ordnung σ''_χ so, daß $\sigma''_\chi > \sigma'_\chi, \varrho_*$ ist. Offenbar ist $\Delta_{\sigma'_\chi} \cdot \Delta_{\sigma''_\chi} \neq 0$. Nach dem Satz IV können wir leicht schließen, daß $\Delta_{\sigma'_\chi}$ jedenfalls in einem Komplex Δ_λ $(\lambda = \sigma''_\chi$ oder $\lambda = \sigma''_\chi + 1)$ enthalten ist. Wir erhalten darnach die Beziehung

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \subset \Delta_\lambda \subset M(\Delta_\eta) \qquad (\lambda < \vartheta),$$

die der Definition des Komplexes Δ_ϑ widerspricht.

Einen wie oben definierten Komplex Δ_ϑ wollen wir stets einen in bezug auf die Zahl ϱ_* *anliegenden* Komplex der Grundmenge $M(\Delta_\eta)$ nennen.

Satz V. *Zwei Komplexe $\Delta^0_{\varrho_*}$ und Δ_ϱ $(\varrho_* < \varrho)$ haben einen leeren Durchschnitt oder es ist*

$$\Delta^0_{\varrho_*} \subset \Delta_\varrho .$$

Nehmen wir an, die Behauptung gilt nicht, d. h. es besteht die Beziehung

$$\Delta^0_{\varrho_*} \cdot \Delta_\varrho \neq 0 \quad \text{und} \quad \neq \Delta^0_{\varrho_*} . \tag{8}$$

Wir betrachten zunächst den Fall, in dem ϱ einen unmittelbaren Vorgänger hat. Der Komplex Δ_{ϱ_*} ist in einem in bezug auf ϱ gesättigten Komplex Δ_σ von der Ordnung σ $(\varrho - 1 \geqq \sigma \geqq \varrho_*)$ enthalten. Wegen der Beziehung $\Delta^0_{\varrho_*} \cdot \Delta_\varrho \neq 0$ gilt auch die Beziehung $\Delta_\varrho \cdot \Delta^0_\sigma \neq 0$. Nach der Bedingung 1 der Definition B der Komplexe muß Δ^0_σ in Δ_ϱ enthalten sein. Dies widerspricht der Annahme (8).

Hat ϱ keinen unmittelbaren Vorgänger, so bestimmen wir einen Komplex Δ^0_λ von einer Ordnung λ $(\varrho_* \leqq \lambda < \varrho)$, der den Komplex $\Delta^0_{\varrho_*}$ und eine Ausgangspunktfolge des Komplexes Δ_ϱ enthält. In bezug auf die Zahl λ bestimmen wir einen anliegenden[16]) Komplex Δ_{λ_*} der entsprechenden Grundmenge von Δ_ϱ. Die Zahl $\lambda_* > \lambda$ hat (nach Hilfssatz 4) einen unmittel-

---

[16]) Vgl. die Definition des anliegenden Komplexes im Hilfssatz 4.

baren Vorgänger und der Durchschnitt $\Delta_\lambda^0 \cdot \Delta_{\lambda_*}$ ist nicht leer, da er eine Ausgangspunktfolge von Δ_ϱ enthält. Oben sahen wir, daß unsere Behauptung für den Fall, daß ϱ einen unmittelbaren Vorgänger hat, gilt, und wir können dies in bezug auf die Komplexe Δ_λ^0 und Δ_{λ_*} anwenden. Wir erhalten dann die Beziehung

$$\Delta_{\varrho_*}^0 \subset \Delta_\lambda^0 \subset \Delta_{\lambda_*} \subset \Delta_\varrho .$$

Hilfssatz 5. *Zwei beliebige Komplexe Δ_{ϱ_*} und Δ_ϱ ($\varrho_* < \varrho$) genügen nie der Beziehung*

$$(9) \qquad \Delta_\varrho \subset \Delta_{\varrho_*},$$

falls $\varrho_* > 1$ oder $\varrho > 2$ ist.

Nehmen wir an, die Beziehung (9) gilt in Widerspruch mit unserer Behauptung für $\varrho_* > 1$. — Läßt sich dann zeigen, daß unser Satz für $\varrho_* > 1$ gelten muß, so muß er für $\varrho > 2$ auch gelten, wenn $\varrho_* = 1$. Im letzteren Falle müßte nämlich Δ_{ϱ_*} ($\varrho_* = 1$) wegen Satz V mit einem in Δ_ϱ enthaltenen Komplex zweiter Ordnung identisch sein, und wir bekämen wiederum eine Beziehung $\Delta_\varrho \subset \Delta_{\varrho_*}$ ($\varrho_* > 1$).

Wegen $\varrho \geqq \varrho_* + 1$ ist es leicht ersichtlich, daß ein Komplex $\Delta_{\varrho_*+1} \subset \Delta_{\varrho_*}$ existieren muß. Nach der Definition B existiert jedenfalls ein in bezug auf $\varrho_* + 1$ gesättigter Komplex $\Delta_\eta^0 \subset \Delta_{\varrho_*+1}$, der außerdem der Beziehung $\Delta_\eta \neq \Delta_{\varrho_*+1}$ genügt. Wäre nun $\eta < \varrho_*$, so könnte offenbar (entgegen unserer Annahme) Δ_η nicht in bezug auf $\varrho_* + 1$ gesättigt sein. Es muß also die Beziehung $\eta = \varrho_*$ gelten.

Hat ϱ_* einen unmittelbaren Vorgänger, so bestimmen wir nach Obigem einen Komplex $\Delta'_{\varrho_*} \subset \Delta_{\varrho_*}$ und $\neq \Delta_{\varrho_*}$. Diese Beziehung widerspricht der Definition B.

Im Falle, daß ϱ_* eine Limeszahl ist, bestimmen wir wiederum einen Komplex $\Delta'_{\varrho_*} \subset \Delta_{\varrho_*}$ und $\neq \Delta_{\varrho_*}$ und bezeichnen mit

$$(10) \qquad R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$$

eine Punktfolge der Menge $(\Delta_{\varrho_*} - \Delta'_{\varrho_*})$. Es seien Δ_{σ_η} und $\Delta_{\sigma_\vartheta}$ zwei Komplexe einer Grundmenge von Δ_{ϱ_*}, von welchen Δ_{σ_η} die Punktfolge (10) und $\Delta_{\sigma_\vartheta}$ eine Punktfolge von Δ'_{ϱ_*} enthält. Nach dem Satz V ist $\Delta_{\sigma_\vartheta}$ in Δ'_{ϱ_*} enthalten, woraus wir schließen, daß der Durchschnitt $\Delta'_{\varrho_*} \cdot \Delta_{\sigma_\eta}$ nicht leer ist. Nach dem Satz V gilt die Beziehung

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots \subset \Delta_{\sigma_\eta} \subset \Delta'_{\varrho_*},$$

die der Definition der Punktfolge (10) widerspricht.

Als eine unmittelbare Folgerung des Hilfssatzes 5 erhalten wir den

Satz VI. *Zwei identische Komplexe Δ_ϱ und Δ_{ϱ_*} sind immer von der gleichen Ordnung ($\varrho = \varrho_*$), falls ϱ und ϱ_* größer 1 sind.*

Wären nämlich die Ordnungszahlen ϱ und ϱ_* verschieden, so wäre ein Komplex von einer höheren Ordnung in einem solchen niedrigerer Ordnung enthalten.

Satz VII. *Zwei nicht abgeschlossene Komplexe Δ_ϱ und Δ'_ϱ von ein und derselben Ordnung $\varrho > 1$ haben einen leeren Durchschnitt oder sie sind identisch.*

Nehmen wir an, unsere Behauptung gilt nicht, d. h. die beiden Beziehungen

$$(11) \qquad \Delta_\varrho \cdot \Delta'_\varrho \neq 0; \qquad \Delta_\varrho \neq \Delta'_\varrho$$

sind gleichzeitig erfüllt.

1. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem ϱ einen unmittelbaren Vorgänger hat, und bilden den Durchschnitt $\Delta_\varrho \cdot \Delta'_\varrho = (\Delta)$. Mit $M(\Delta^0_\eta)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller in bezug auf ϱ gesättigten Komplexe des Gebietes $\mathfrak{G}$, die mindestens eine Punktfolge von (Δ) enthalten.

(12) Wir behaupten, kein Komplex der Menge $M(\Delta^0_\eta)$ enthält eine Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$, die außerhalb (Δ) liegt.

Wäre (12) nicht erfüllt, so müßte in bezug auf eine Punktfolge $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ eines Komplexes von $M(\Delta^0_\eta)$, die in (Δ) nicht enthalten ist, einer der drei folgenden Fälle eintreten:

(a) $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots \subset \Delta_\varrho$ ist fremd zu Δ'_ϱ;

(b) $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots \subset \Delta'_\varrho$ ist fremd zu Δ_ϱ;

(c) $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ ist fremd zu Δ_ϱ und zu Δ'_ϱ.

Die Bedingung 1 der Definition B der Komplexe wäre im Falle (a) in bezug auf Δ'_ϱ, im Falle (b) in bezug auf Δ_ϱ und im Falle (c) in bezug auf Δ_ϱ und Δ'_ϱ nicht erfüllt. Nach (12) ist jeder in bezug auf ϱ gesättigte und zu einem Komplex von $M(\Delta_\eta)$ benachbarte Komplex selbst in $M(\Delta_\eta)$ enthalten, d. h. die Gesamtheit aller (in bezug auf ϱ gesättigter) Komplexe von $M(\Delta_\eta)$ genügt der Bedingung 1 der Definition B. Aus (11) folgt, daß $(\Delta) = V(M(\Delta^0_\eta))$ mindestens von einem der beiden Komplexe Δ_ϱ und Δ'_ϱ, z. B. von Δ'_ϱ, verschieden ist. Darnach kann die Bedingung 2 der Definition B in bezug auf Δ'_ϱ nicht erfüllt sein, was offenbar einen Widerspruch bedeutet.

2. Wir betrachten jetzt den Fall, in dem ϱ eine Limeszahl ist. Nach (11) existiert eine Punktfolge $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ eines der beiden Komplexe Δ_ϱ und Δ'_ϱ, die im anderen nicht enthalten ist. Es sei $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ z. B. eine Punktfolge von Δ'_ϱ. Nach der Definition C existiert ein in Δ'_ϱ enthaltener Komplex

$$\Delta_\eta > R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots, O'_1, O'_2, \ldots, O'_n, \ldots \qquad (\eta < \varrho),$$

wobei $O'_1, O'_2, \ldots, O'_n, \ldots$ eine Ausgangspunktfolge von Δ'_ϱ ist. Analog können wir einen in Δ'_ϱ enthaltenen Komplex

$$\Delta_\vartheta > P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots, O'_1, O'_2, \ldots, O'_n, \ldots \qquad (\vartheta < \varrho)$$

bestimmen, wobei $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ eine Punktfolge von $\Delta_\varrho \cdot \Delta'_\varrho$ ist.

Nach dem Satz V muß $\Delta_\vartheta < \Delta_\varrho$ sein.

Der Komplex Δ_η hat darnach mit Δ_ϱ eine gemeinsame Punktfolge $O'_1, O'_2, \ldots, O'_n, \ldots$ und müßte nach dem Satz V ebenfalls in Δ_ϱ enthalten sein. Dies ist aber unmöglich, da $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots < \Delta_\eta$ fremd zu Δ_ϱ ist.

Aus den obigen Sätzen dieses Paragraphen können wir noch folgende Schlüsse ziehen:

Folgerung 1. Es sei Δ_ϱ ein Komplex von der Ordnung ϱ (ϱ eine Limeszahl) und $M(\Delta_{\sigma_\eta})$ eine in bezug auf eine Ausgangspunktfolge bestimmte Grundmenge von Δ_ϱ. Weiterhin sei

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \ldots, \sigma_\eta \ldots \qquad (\sigma_1 > 1)$$

die der Größe nach geordnete Menge paarweise verschiedener Ordnungszahlen der Menge $M(\Delta_{\sigma_\eta})$. Wir behaupten, $M(\Delta_{\sigma_\eta})$ bildet eine unendliche aufsteigende Menge

$$\Delta_{\sigma_1} < \Delta_{\sigma_2} < \ldots, \ldots < \Delta_{\sigma_\eta} \ldots,$$

wobei für jedes σ_η die Beziehung gilt

$$\Delta_{\sigma_\eta} \neq \Delta_{\sigma_{\eta+1}}.$$

Der Durchschnitt je zweier Komplexe der Grundmenge $M(\Delta_{\sigma_\eta})$ ist nicht leer. Wären die beiden Komplexe von der gleichen Ordnung, so müßten sie nach dem Satz VII auch identisch sein; wären sie identisch, so müßten sie nach dem Satz VI von der gleichen Ordnung sein. Die beiden Fälle sind unmöglich und wir erhalten nach dem Satz V die Beziehung

$$\Delta_{\sigma_\eta} < \Delta_{\sigma_{\eta+1}} \text{ und } \neq \Delta_{\sigma_{\eta+1}}.$$

Folgerung 2. Zwei nicht identische und nicht abgeschlossene, in bezug auf eine Zahl ϱ gesättigte Komplexe Δ_η und Δ_ϑ ($\eta \leqq \vartheta$; $\vartheta \neq 1$) liegen außerhalb einander.

Nehmen wir an, die Behauptung sei nicht erfüllt. Ist $\eta \neq \vartheta$, so müßte nach dem Satz V $\Delta_\eta < \Delta_\vartheta$ sein und Δ_η könnte nicht in bezug auf ϱ gesättigt sein. Ist $\eta = \vartheta$, so müßte nach dem Satz VII die Beziehung $\Delta_\eta \equiv \Delta_\vartheta$ sein, was ebenfalls unserer Annahme widerspricht.

§ 8.

Die Definition der Primenden.

Ist ein Komplex Δ_τ des Gebietes $\mathfrak{G}$ in keinem Komplex von einer höheren Ordnung ($> \tau$) enthalten, so nennen wir ihn einen *vollkommen gesättigten* Komplex des Gebietes $\mathfrak{G}$.

In bezug auf die vollkommen gesättigten Komplexe können wir aus den obigen Sätzen die Schlüsse folgern:

Folgerung 1. Ist Δ_τ ein vollkommen gesättigter Komplex des Gebietes $\mathfrak{G}$, so gilt immer die Beziehung $L^*(\Delta_\tau) = 0$.

Nehmen wir an, unsere Behauptung sei nicht erfüllt und $R_1, R_2, \ldots, R_n \ldots$ sei eine Punktfolge von $L^*(\Delta_\tau)$, die in einem Komplex erster Ordnung Δ_1 enthalten ist. Es sei Δ_σ $(\sigma \geqq 1)$ der in bezug auf $\tau + 1$ gesättigte Komplex, der Δ_1 enthält. Da $R_1, R_2, \ldots, R_n \ldots$ in Δ_τ nicht enthalten ist, so müssen die Beziehungen gelten $\Delta_\sigma^0 \cdot \Delta_\tau^0 \neq 0$ und $\Delta_\sigma \neq \Delta_\tau$. Nach dem Satz IV existiert im Komplex $\Delta_{\tau+1} > \Delta_\tau^0$, was offenbar unmöglich ist.

Folgerung 2. Zwei nicht identische vollkommen gesättigte Komplexe haben einen leeren Durchschnitt.

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz IV.

Auf Grund der vollkommen gesättigten Komplexe wollen wir jetzt die Primenden definieren.

Die Gesamtheit aller normierten Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$, die gegen ein Ende $\mathfrak{E}_g$ konvergieren, nennen wir die normierte f-Menge des Endes $\mathfrak{E}_g$ und bezeichnen sie mit $f(\mathfrak{E}_g)$.

Definition. *Ist die normierte f-Menge $f(\mathfrak{E}_g)$ des Endes $\mathfrak{E}_g$ mit einem vollkommen gesättigten Komplex Δ_τ von einer Ordnung $\tau \geqq 1$ identisch, so nennen wir das Ende $\mathfrak{E}_g$ ein Primende von der Ordnung τ und bezeichnen es mit E_g^τ.*

Es sei $M(E_g^\tau)$ die Gesamtheit aller Primenden des Gebietes $\mathfrak{G}$. Die Gesamtheit aller paarweise verschiedenen Indizes (Ordnungszahlen) der Menge $M(E_g^\tau)$ bezeichnen wir mit $M(\sigma_\tau)$ und ordnen sie der Größe nach in der Menge

(1) $$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \ldots \sigma_\tau, \ldots .$$

Hat die Menge (1) ein letztes Element, so bezeichnen wir dieses mit $\bar\tau$; ist dies nicht der Fall, so bezeichnen wir mit $\bar\tau$ die der Menge (1) unmittelbar folgende Zahl. In beiden Fällen nennen wir die Zahl $\bar\tau$ die *Ordnungszahl* des Gebietes $\mathfrak{G}$.[17])

Wir wollen hier noch ein einfaches Beispiel (Fig. 9) eines Primendes zweiter Ordnung in einem Gebiet zweiter Ordnung in der Ebene angeben. Durch Iteration lassen sich aus diesem Beispiel weitere einfache Beispiele von Primenden endlicher, sowie auch ω-ter Ordnung gewinnen. Auf dem Einheitskreis K in der Ebene, dessen Mittelpunkt im Pol eines Polar-

[17]) Im § 12 wird gezeigt, daß die Ordnung eines Primendes höchstens abzählbar sein kann. Darnach kann die Ordnung eines Gebietes nicht größer als Ω sein, wobei Ω die Anfangszahl der der abzählbaren Klasse unmittelbar folgenden Zahlenklasse ist.

koordinatensystems (ν, φ) liegt, sei (in diesen Koordinaten) die Punktfolge

$$e_1=(1,\pi),\ e_2=(1,0),\ e_3=\left(1,\tfrac{1}{2}\pi\right),\ e_4=\left(1,\tfrac{3}{4}\pi\right),\ldots,e_n=\left(1,\tfrac{2^\nu-1}{2^\nu}\pi\right),\ldots$$

gegeben. Je zwei benachbarte Punkte e_n und e_{n+1} dieser Folge verbinden wir durch eine Strecke t_n; die Gesamtheit dieser Strecken bildet die Berandung eines beschränkten ebenen Gebietes. In jeder zu diesem Gebiet fremden Halbkreisscheibe, die von t_n und einem Halbkreis $\overline{K}_n$ begrenzt wird, sei eine Folge gegen $\overline{K}_n$ konvergierender und zu $\overline{K}_n$ konzentrischer Halbkreise gegeben. Die abgeschlossene Vereinigungsmenge aller solcher Halbkreislinien bestimmt die Berandung eines ebenen Gebietes von unendlich hohem Zusammenhang, wobei die Linie $\overline{K}_1 \dotplus \overline{K}_2 \dotplus \ldots \overline{K}_n, \ldots$ ein Primende zweiter Ordnung ist.

Fig. 9.

Fig. 10.

Ein Beispiel eines Primendes bzw. eines Gebietes dritter Ordnung (Fig. 10) gewinnen wir aus dem geschilderten Beispiel, in dem wir sämtliche in bezug auf die Halbkreislinie $r=1$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ durchgeführte Konstruktionen jetzt in bezug auf jeden Halbkreisbogen mit den Endpunkten e_n und e_{n+1} wiederholen. — Auf jedem Halbkreisbogen liegt dann eine Folge $\{e_{nn}\}$ (Fig. 10) erreichbarer Punkte eines und desselben Primendes dritter Ordnung.

Kapitel III.

Die Konstruktion der Primenden und ihre Grundeigenschaften.

§ 9.

Hilfssätze.

Wir wollen jetzt auf Grund der simplizialen Zerlegung (Würfeleinteilung) des Raumes gewisse reguläre Schnitte des Gebietes $\mathfrak{G}$, dessen Durchmesser d sei, bilden und einige ihrer Eigenschaften hervorheben.

Es sei W_ν eine simpliziale Zerlegung des Raumes und $a_\nu=\frac{1}{3}a_{\nu-1}$ $(a_1<\frac{1}{81}d)$ die Kantenlänge des Einheitswürfels von W_ν. Es sei $\{W_{\nu n}\}$ die geordnete

Menge paarweise verschiedener Würfel von W_ν. Einen zu $W_{\nu n}$ konzentrischen und parallel gestellten Würfel $\overline{W}_{\nu n}$ mit der dreifachen Kantenlänge $\bar{a}_\nu = 3\,a_\nu$ nennen wir kurz den **Auflösungswürfel** von $W_{\nu n}$. Analog bilden wir auch den Auflösungswürfel $\overline{\overline{W}}_{\nu n}$ von $\overline{W}_{\nu n}$ mit der Kantenlänge $\bar{\bar{a}}_\nu = 3\,\bar{a}_\nu$. Die (evtl. leere) Gesamtheit aller paarweise verschiedenen durch den Schnitt $W_\nu \cdot \mathfrak{G}$ bestimmter Teilgebiete des Gebietes $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit Π_ν und die Menge entsprechender Teilschnitte mit Ψ_ν.

Jedes Teilgebiet von Π_ν wird durch einen Würfel der simplizialen Zerlegung bestimmt. Ist $\mathfrak{h}$ ein Teilgebiet, das durch den Schnitt $W_{\nu n}\cdot\mathfrak{G}$ bzw. den Teilschnitt φ bestimmt wird, so nennen wir das durch den Schnitt $\overline{W}_{\nu n}\cdot\mathfrak{G}$ bestimmte und $\mathfrak{h}$ enthaltende Teilgebiet $\bar{\mathfrak{h}}$ das **Auflösungsgebiet** von $\mathfrak{h}$ (vgl. die Gebiete $\bar{\mathfrak{h}}_1, \bar{\mathfrak{h}}_2, \ldots$ in Fig. 11) und bezeichnen seinen Teilschnitt mit $\bar{\varphi}$; analog definieren wir das Auflösungsgebiet $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}$ von $\bar{\mathfrak{h}}$, das durch den Schnitt $\overline{\overline{W}}_{\nu n}\cdot\mathfrak{G}$ bestimmt wird, und seinen Teilschnitt $\bar{\bar{\varphi}}$. Die Gesamtheit aller paarweise verschiedener Auflösungsgebiete aller Gebiete der Menge Π_ν bezeichnen wir mit $\overline{\Pi}_\nu$ und die Menge entsprechender Teilschnitte mit $\overline{\Psi}_\nu$. Entsprechend sei $\overline{\overline{\Pi}}_\nu$ die Gesamtheit aller Auflösungsgebiete der Menge $\overline{\Pi}_\nu$ und $\overline{\overline{\Psi}}_\nu$ die Menge entsprechender Teilschnitte. Die hier gebrauchte Bezeichnung wollen wir allgemein beibehalten, indem wir für die Auflösungsgebiete und ihre Teilschnitte die einmal (bzw. zweimal) gestrichenen Bezeichnungen der betreffenden Gebiete und Teilschnitte selbst wählen.

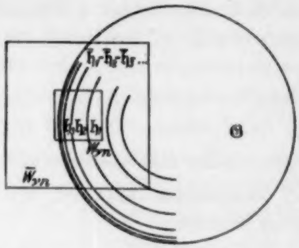


Fig. 11.

Folgerung. Sind $\bar{\mathfrak{h}}$ und $\bar{\mathfrak{h}}^*$ zwei Gebiete von $\overline{\Pi}_\mu$ und $\overline{\Pi}_\nu$ $(\mu \leqq \nu)$, die der Bedingung $\bar{\mathfrak{h}}^0 \cdot \bar{\mathfrak{h}}^* \neq 0$ (oder auch $\bar{\mathfrak{h}} \cdot \bar{\mathfrak{h}}^{*0} \neq 0$) genügen, so gilt auch die Beziehung

$$\bar{\mathfrak{h}}^{*0} \cdot \mathfrak{G} \subset \bar{\bar{\mathfrak{h}}}. \tag{1}$$

Wegen der Beziehung $\bar{\mathfrak{h}} \cdot \bar{\mathfrak{h}}^* = 0$ ist jeder Punkt des das Teilgebiet $\mathfrak{h}^*$ bestimmenden Auflösungswürfels innerhalb des $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}$ bestimmenden Auflösungswürfels enthalten und wir können jeden Punkt von $\bar{\mathfrak{h}}^{*0}\cdot\mathfrak{G}$ mit einem Punkt von $\bar{\mathfrak{h}}\cdot\bar{\mathfrak{h}}^*$ innerhalb $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}$ durch einen Streckenzug verbinden.

Hilfssatz 6. *Es sei $S = s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ ein Streckenzugsystem, welches kein ausgezeichnetes Teilsystem enthält und welches eine β-Punktfolge*

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \tag{2}$$

mit einer wohldefinierten Punktfolge

$$P_1', P_2', \ldots, P_n', \ldots \tag{3}$$

in $\mathfrak{G}$ *verbindet so, daß* P_{i+n} *mit* P'_{i_1+n} (i, i_1 entsprechende Anfangsindizes der beiden Punktfolgen in bezug auf S) *durch den Streckenzug* s_n *verbunden wird. Das Grenzgebilde* T_s *von* S *sei in der Berandung* Γ *von* $\mathfrak{G}$ *enthalten. — Wir durchlaufen jeden Streckenzug* s_n *in der Richtung von* P_{i+n} *nach* P'_{i_1+n} *bis zum ersten* (*mit* P_{i+n} *evtl. identischen*) *Schnittpunkt* x_n^* *mit einer abgeschlossenen Hülle eines in* $\overline{\Pi}_\nu$ (ν *fest*) *enthaltenen Teilgebietes, das eine gegen das Grenzgebilde* T_s *des Streckenzugsystems* S *in* S *konvergierende* α*-Punktfolge enthält* (*vorausgesetzt, daß ein solcher erster Punkt* x_n^* *existiert*); *existiert ein solcher erster Schnittpunkt* x_n^* *nicht, so durchlaufen wir* s_n *bis zum Endpunkt* P'_{i_1+n}. *Den durchlaufenen Teil des Streckenzuges* s_n *bezeichnen wir mit* s_n^*. *Wir behaupten, das System* $S^* = s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^* \ldots$ *ist ausgezeichnet.*

(4) Jeder fast aller Streckenzüge des Systems S trifft mindestens ein in $\overline{\Pi}_\nu$ enthaltenes Teilgebiet, das eine in S gegen T_s konvergierende α-Punktfolge enthält.

Nehmen wir an, unendlich viele Streckenzüge, die ein Teilsystem S' von S mit dem Grenzgebilde T'_s bilden, genügen dieser Behauptung nicht. Da S' kein ausgezeichnetes Streckenzugsystem sein kann, konvergiert gegen das Grenzgebilde T'_s in S' eine α-Punktfolge. Diese muß offenbar gegen das Grenzgebilde T_s in S konvergieren und ist wesentlich in einem Teilgebiet $\bar{\mathfrak{h}}$ von $\overline{\Pi}_\nu$ enthalten. Unendlich viele Streckenzüge des Systems S' treffen das Gebiet $\bar{\mathfrak{h}}$, was unserer Annahme widerspricht.

Nehmen wir an, es existiert in Widerspruch zu unserer Behauptung eine in S gegen T_s konvergierende α-Punktfolge

$$(5) \qquad R_1^{**}, R_2^{**}, \ldots, R_n^{**}, \ldots,$$

die einem Teilsystem $S^{**} = s_1^{**}, s_2^{**}, \ldots, s_n^{**}, \ldots$ des Systems S^* untergeordnet ist. Fast alle Punkte der Folge (5) von einem ersten Punkt $R_{\mu+1}^{**}$ ($n = \mu + 1$) ab liegen im Inneren eines in $\overline{\Pi}_\nu$ enthaltenen Teilgebietes $\bar{\mathfrak{h}}^*$ Es sei P_n^{**} der Anfangs- und x_n^{**} der Endpunkt des Streckenzuges s_n^{**}. Von einem gewissen ersten Punkt $P_{\mu_1}^{**}$ ab liegen fast alle Punkte der Folge

$$(6) \qquad P_1^{**}, P_2^{**}, \ldots, P_n^{**}, \ldots$$

außerhalb des abgeschlossenen Gebietes $\bar{\mathfrak{h}}^{*0}$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es unendlich viele Anfangspunkte des Systems S^{**}, welche die Eigenschaft des Punktes x_n^* hätten; ein Streckenzug des Systems S^{**} mit einem solchen Anfangspunkt wäre mit diesem letzteren selbst identisch. Ein aus einzelnen Punkten bestehendes Teilsystem von S^{**} wäre gleichzeitig mit einer Teilfolge der β-Punktfolge (2) und mit einer Teilfolge der α-Punktfolge (5) identisch, was offenbar unmöglich ist.

Wir durchlaufen jetzt einen Streckenzug s_m^{**} $(m > \mu, \mu_1)$ in der Richtung $\overrightarrow{P_m^{**} x_m^{**}}$ bis zum ersten Schnittpunkt x mit dem abgeschlossenen Teilgebiet $\bar{\mathfrak{h}}^{*0}$. Da eine gegen T_s in S konvergierende α-Punktfolge wesentlich in $\bar{\mathfrak{h}}^*$ enthalten ist, muß offenbar $x = x_m^{**}$ sein. Andererseits muß x_m^{**} ein Randpunkt des Teilgebietes $\bar{\mathfrak{h}}^*$ sein. Jeder von x_m^{**} verschiedene Punkt des Streckenzuges s_m^{**} wird bei seinem Durchlaufen vor dem Punkt x_m^{**} getroffen. Nun liegt R_m^{**} innerhalb $\bar{\mathfrak{h}}^*$ und x_m^{**} auf der Beranduug von $\bar{\mathfrak{h}}^*$; die beiden Punkte R_m^{**} und x_m^{**} des Streckenzuges s_m^{**} sind verschieden und R_m^{**} müßte beim Durchlaufen des Streckenzuges s_m^{**} vor x_m^{**} getroffen werden, was offenbar unmöglich ist.

Hilfssatz 7. *Es sei* $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$ *eine beliebige endliche Menge von paarweise verschiedenen Teilschnitten des Gebietes* $\mathfrak{G}$, *von welchen jeder in einem beliebigen der endlich vielen Gesamtheiten* $\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, \ldots, \overline{\Psi}_\nu$ *(ν fest) enthalten ist. Es sei* $\mathfrak{m}_\nu(\bar{\mathfrak{h}})$ *die Gesamtheit aller solchen Teilgebiete von* $\mathfrak{G}$, *von welchen jeder durch irgendeinen Teilschnitt der Menge* $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$ *bestimmt wird. Wir bilden den Schnitt des Gebietes* $\mathfrak{G}$ *mit der Vereinigungsmenge* Φ *aller Teilschnitte der Menge* $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$ *und setzen im nachfolgenden die Gesamtheit* $M_\nu(\mathfrak{H})$ *aller durch* Φ *bestimmten paarweise verschiedenen Teilgebiete von* $\mathfrak{G}$ *als unendlich voraus. Es sei*

(7) $$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

eine wohldefinierte Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$, *die entweder*

1. *einer beliebigen Folge*

(8) $$\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n, \ldots$$

von paarweise verschiedenen Gebieten der Menge $M_\nu(\mathfrak{H})$ *untergeordnet ist oder*

2. *wesentlich in* Φ *enthalten ist.*

Wir behaupten, es existiert ein Auflösungsgebiet eines Gebietes der Menge $\mathfrak{m}_\nu(\bar{\mathfrak{h}})$, *das entweder eine Teilfolge von* (7) *oder eine zu einer Teilfolge von* (7) *konjugierte Punktfolge enthält.*

I. Wir setzen zunächst voraus, (7) sei eine β-Punktfolge.

(9) Die Punktfolge (7) sei der Gebietsfolge (8) untergeordnet.

Mit Γ_n bezeichnen wir den das Gebiet $\mathfrak{H}_n$ bestimmenden Teilschnitt und verbinden jeden Punkt A_n mit einem beliebigen Punkt Y_n von Γ_n durch einen Streckenzug $s_n \subset \mathfrak{H}_n^0 \cdot \mathfrak{G}$. Das Streckenzugsystem $S = s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ verbindet die Punktfolge (7) mit der Punktfolge

(10) $$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots .$$

Wie leicht ersichtlich, liegt das Grenzgebilde von S auf Γ.

In bezug auf S unterscheiden wir zwei Fälle:

(11) 1. Es existiert kein ausgezeichnetes Teilsystem von S.

(12) 2. Ein Teilsystem $S' = s'_1, s'_2, \ldots, s'_n, \ldots$ von S, welches eine Teilfolge $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, \ldots$ von (7) mit einer konvergenten Teilfolge $Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_n, \ldots$ von (10) verbindet, ist ausgezeichnet.

Wir betrachten zunächst den Fall 1 (11). Ähnlich, wie im Hilfssatz 6 (4) ist es leicht ersichtlich, daß jeder Streckenzug $S_{\mu+n}$ $(n=1,2,\ldots)$ von einem ersten hinreichend großen μ ab ein solches Teilgebiet der Menge Π_ν trifft, das in seinem Inneren eine gegen das Grenzgebilde T_s von S in S konvergierende α-Punktfolge enthält. Wir durchlaufen jeden Streckenzug $s_{\mu+n}$ des Systems S' von seinem Anfangspunkt bis zum ersten Schnittpunkt x_n mit einem solchen abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{y}_n^0$ der Menge $\overline{\Pi}_\nu^0$. Den durchlaufenen Teil des Streckenzuges $s_{\mu+n}$ bezeichnen wir mit s_n^*. Nach dem Hilfssatz 6 ist das Streckenzugsystem $S^* = s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*, \ldots$ ausgezeichnet. Zwei (nicht notwendig verschiedene) Punkte B_n und B'_n, die zwei verschiedenen Streckenzügen des Systems S angehören und beide in $\mathfrak{y}_n$ liegen, verbinden wir für jeden Wert $n=1, 2, \ldots$ durch einen Streckenzug t_n innerhalb $\mathfrak{y}_n$. Da die Punkte B_n und B'_n den Hüllen zwei verschiedenen Gebieten der Folge (8) angehören und je zwei Gebiete von (8) zueinander fremd sind, muß der Streckenzug t_n mindestens einen Punkt y_n der Schnittmenge Φ treffen. Eine unendliche Teilfolge

(13) $$y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, \ldots$$

der Folge (nicht notwendig paarweise verschiedener Punkte) $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ist in einem und demselben Teilschnitt $\overline{\varphi}_i$ der Menge $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$ enthalten. Die Punktfolge (13) ist einer unendlichen Teilfolge

(14) $$\overline{\mathfrak{y}}'_1, \overline{\mathfrak{y}}'_2, \ldots, \overline{\mathfrak{y}}'_n, \ldots$$

der Folge $\overline{\mathfrak{y}}_1, \overline{\mathfrak{y}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{y}}_n, \ldots$ untergeordnet. Bezeichnen wir ein durch $\overline{\varphi}_i$ bestimmtes Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ mit $\overline{\mathfrak{h}}_i$, so gilt für jedes n die Beziehung $\overline{\mathfrak{y}}'_n \cdot \overline{\mathfrak{h}}_i^0 \neq 0$. Nach der Folgerung (1) aus der Definition der Auflösungsgebiete gilt die Beziehung $\overline{\mathfrak{y}}_n'^0 \cdot \mathfrak{G} \subset \overline{\mathfrak{h}}_i$. Eine β-Teilfolge

(15) $$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$$

der Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ist der Folge $\{\overline{\mathfrak{y}}_n'^0 \cdot \mathfrak{G}\}$ untergeordnet. Wir erhalten die Beziehung

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots \subset \overline{\overline{\mathfrak{h}}}_i .$$

Die Punktfolge (15) muß (nach der Folgerung 2 § 5) zu einer Teilfolge von (7) konjugiert sein und genügt im Falle 1 (11) unserer Behauptung.

Im Falle 2 (12) können wir analog wie oben zeigen, daß eine β-Teilfolge der Folge $Y_1', Y_2', \ldots, Y_n', \ldots$ im Auflösungsgebiet eines durch einen Teilschnitt der Menge $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$ bestimmten Teilgebietes enthalten ist. Eine solche Teilfolge von $Y_1', Y_2', \ldots, Y_n', \ldots$ muß zu einer Teilfolge von (7) konjugiert sein und genügt ebenfalls unserer Behauptung.

(16) Nehmen wir jetzt an, die Punktfolge (7) sei wesentlich in Φ enthalten. Oben sahen wir, daß das Auflösungsgebiet $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}_i$ eines durch den Teilschnitt $\overline{\varphi}_i$ von $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$ bestimmten Teilgebietes $\bar{\mathfrak{h}}_i$ die Teilfolge (13) der in Φ liegenden Punktfolge $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ enthält. Ganz analog ist im jetzigen Falle (16) eine Teilfolge von (7) im Auflösungsgebiet eines durch einen Teilschnitt von $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$ bestimmten Teilgebietes enthalten.

II. Ist (7) eine α-Punktfolge, so existiert ein gewisses Teilgebiet $\mathfrak{h}_\nu^*$ der Menge $\overline{\Pi}_\nu$, in welchem wesentlich die Punktfolge (7) enthalten ist. Da im Falle 1 je zwei Punkte der Folge (7) verschiedenen Gebieten der Folge (8) angehören, so muß in $\mathfrak{h}_\nu^*$ jedenfalls ein Punkt x der Schnittmenge Φ enthalten sein. Es sei $\overline{\varphi}_i^*$ ein Teilschnitt von $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$, der x enthält und $\bar{\mathfrak{h}}_i^*$ ein durch $\overline{\varphi}_i^*$ bestimmtes Teilgebiet von $\mathfrak{G}$. Fast alle Punkte von (7) sind nach der Folgerung (1) im Gebiet $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}_i^*$ enthalten und genügen im vorausgesetzten Falle unserer Behauptung.

Hilfssatz 8. *Es sei eine endliche oder unendliche Folge wohldefinierter Punktfolgen*

$$(17)\quad O_1', O_2', \ldots, O_n', \ldots;\ O_1'', O_2'', \ldots, O_n'', \ldots;\ O_1^{(\nu)}, O_2^{(\nu)}, \ldots, O_n^{(\nu)}, \ldots$$

so gegeben, daß die Punktfolge $O_1^{(\nu)}, O_2^{(\nu)}, \ldots, O_n^{(\nu)}, \ldots$ *für jedes* ν *zu einer Teilfolge der Punktfolge* $O_1^{(\nu-1)}, O_2^{(\nu-1)}, \ldots, O_n^{(\nu-1)}, \ldots$ *konjugiert ist. Wir behaupten, es existiert eine Teilfolge der Punktfolge* $O_1', O_2', \ldots, O_n', \ldots$, *deren jede beliebige Teilfolge für jedes* ν *zu einer Teilfolge der Folge* $O_1^{(\nu)}, O_2^{(\nu)}, \ldots, O_n^{(\nu)}, \ldots$ *konjugiert ist.*

Zur Abkürzung bezeichnen wir die Punktfolge $O_1^{(\nu)}, O_2^{(\nu)}, \ldots, O_n^{(\nu)}, \ldots$ für jedes ν mit $(O^{(\nu)})$. Die zu $(O^{(\nu)})$ konjugierte Teilfolge von $(O^{(\nu-1)})$ bezeichnen wir mit $(O^{(\nu-1)})'$. Zunächst wollen wir mit Hilfe des Schlusses der vollständigen Induktion zeigen, daß für jedes ν eine zu der Folge $(O^{(\nu)})$ konjugierte Teilfolge $(O')_\nu \subset (O')$ existiert, wobei für jedes $\nu > 1$ $(O')_\nu \subset (O')_{\nu-1}$ ist.

Die Punktfolge $(O') \equiv (O')_1$ ist zu sich selbst konjugiert und enthält die zu (O'') konjugierte Teilfolge $(O')_2 \equiv (O')'$. Nehmen wir an, die Behauptung sei für jeden Wert $\leqq (\nu - 1)$ erfüllt. Nach der Folgerung 2 § 5 ist eine Teilfolge $(O')_{\nu-1}'$ von $(O')_{\nu-1}$ zu $(O^{(\nu-1)})'$ konjugiert. Die beiden Punktfolgen $(O')_{\nu-1}'$ und $(O^{(\nu)})$ sind zu der Punktfolge $(O^{(\nu-1)})'$ konjugiert und müssen nach der Folgerung 3 § 5 zueinander konjugiert

sein. Berücksichtigen wir die Beziehung $(O')'_{\nu-1} \subset (O')_{\nu-1}$, so können wir schließen, daß die Punktfolge $(O')_\nu \equiv (O')'_{\nu-1}$ unserer Behauptung genügt.

Es sei O_1^* ein beliebiger Punkt von $(O')_1$, $O_2^* \neq O_1^*$ ein beliebiger Punkt von $(O')_2$ und allgemein $O_\nu^* \neq O_1^*, O_2^*, \ldots, O_{\nu-1}^*$ ein beliebiger Punkt von $(O')_\nu$ usw. Wegen der Beziehung

(18) $$(O')_1 \supset (O')_2 \supset \ldots \supset (O')_\nu \ldots$$

sind fast alle Punkte der Folge

(19) $$O_1^*, O_2^*, \ldots, O_n^*, \ldots$$

und fast alle Punkte jeder beliebigen ihrer Teilfolgen in jeder der Punktfolgen (18) enthalten. Nach der Folgerung 2 § 5 ist eine beliebige Teilfolge von (19) für jedes ν zu einer Teilfolge von $(O^{(\nu)})$ konjugiert. Die Punktfolge (19) genügt unserer Behauptung.

§ 10.

Beweis der Vollständigkeit des Systems der Komplexe.

Satz VIII. *Eine beliebige gegen einen Randpunkt des Gebietes $\mathfrak{G}$ konvergierende Punktfolge enthält eine normierte Teilfolge.*

I. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem die gegebene beliebige gegen einen Punkt des Randes Γ von $\mathfrak{G}$ konvergierende Punktfolge des Gebietes eine β-Teilfolge

(1) $$O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$$

enthält.

Für jedes ν bilden wir auf Grund der simplizialen Zerlegung des Raumes die Gebietsmengen $\overline{\Pi}_\nu$ und $\overline{\overline{\Pi}}_\nu$. Nehmen wir an, mindestens eine zu einer beliebigen Teilfolge von (1) konjugierte Punktfolge $O_1', O_2', \ldots, O_n', \ldots$ ist in einem abgeschlossenen Teilgebiet der Menge $\overline{\Pi}_1^0$, das wir mit $\bar{\mathfrak{h}}'^{0}$ bezeichnen wollen, enthalten. Ebenso sei $O_1'', O_2'', \ldots, O_n'', \ldots$ eine zu einer Teilfolge von $O_1', O_2', \ldots, O_n', \ldots$ konjugierte Punktfolge, die in einem abgeschlossenen Teilgebiet der Menge $\overline{\Pi}_2^0$, das wir mit $\bar{\mathfrak{h}}''^{0}$ bezeichnen, enthalten. Denken wir uns diese Definition weiter fortgesetzt und die Punktfolge $O_1^{(\nu)}, O_2^{(\nu)}, \ldots, O_n^{(\nu)}, \ldots$ bestimmt, so können wir folgende zwei Fälle unterscheiden:

1. Für jedes noch so große ν können wir eine zu einer Teilfolge von $O_1^{(\nu)}, O_2^{(\nu)}, \ldots, O_n^{(\nu)}, \ldots$ konjugierte Punktfolge $O_1^{(\nu+1)}, O_2^{(\nu+1)}, \ldots, O_n^{(\nu+1)}, \ldots$ bestimmen, die im abgeschlossenen Teilgebiet von $\overline{\Pi}_{\nu+1}^0$, das wir mit $\bar{\mathfrak{h}}^{(\nu+1)0}$ bezeichnen, enthalten ist.

2. Es existiert ein erster Wert $\nu = \mu$, für welchen die Bedingung 1 nicht erfüllt ist, d. h. kein abgeschlossenes Gebiet der Menge $\overline{\Pi}_{\nu+1}^0$ enthält eine zu einer Teilfolge von $O_1^{(\mu)}, O_2^{(\mu)}, \ldots, O_n^{(\mu)}, \ldots$ konjugierte Punktfolge.

Wir wollen zunächst den Fall 1 voraussetzen. Den Durchmesser des Gebietes $\bar{\mathfrak{y}}^{(\nu)0}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) bezeichnen wir allgemein mit $d^{(\nu)}$. Aus der Beziehung

$$d', d'', \ldots, d^{(\nu)}, \ldots \to 0$$

folgt, daß eine unendliche Teilfolge

$$\bar{\bar{\mathfrak{y}}}'^{*0}, \bar{\bar{\mathfrak{y}}}''^{*0}, \ldots, \bar{\bar{\mathfrak{y}}}^{(\nu)*0}, \ldots \tag{2}$$

der Folge $\{\bar{\mathfrak{y}}^{(\nu)0}\}$ gegen einen Punkt ξ der Berandung Γ von $\mathfrak{G}$ konvergiert. Die der Folge (2) untergeordnete Teilfolge der Folge von Punktfolgen $\{O_1^{(\nu)}, O_2^{(\nu)}, \ldots, O_n^{(\nu)}, \ldots\}$ schreiben wir in der Form

$$O_1'^*, O_2'^*, \ldots, O_n'^*, \ldots;\ O_1''^*, O_2''^*, \ldots, O_n''^*, \ldots; \ldots;\ O_1^{(\nu)*}, O_2^{(\nu)*}, \ldots, O_n^{(\nu)*}, \ldots. \tag{3}$$

Es sei

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots \tag{4}$$

eine beliebige einer Teilfolge von (2) untergeordnete wohldefinierte Punktfolge.

Nach dem Hilfssatz 8 existiert eine Teilfolge

$$O_1^*, O_2^*, \ldots, O_n^*, \ldots \subset O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots, \tag{5}$$

deren jede Teilfolge zu einer Teilfolge einer jeden Punktfolge von (3) konjugiert ist. Ist nun Δ die in bezug auf die Punktfolge (5) definierte konjugierte f-Menge, so ist eine gewisse Teilfolge der Folge $O_1^{(\nu)*}, O_2^{(\nu)*}, \ldots, O_n^{(\nu)*}, \ldots$ für jedes ν in Δ enthalten. Das gleiche gilt aber auch für jede konjugierte f-Menge $\bar{\Delta}$, die eine Teilfolge von (5) enthält. Darnach besteht nach der Folgerung 2^{**} § 4 die Beziehung

$$\Delta^0 \cdot \bar{\Delta}^0 \supset R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots.$$

Die Punktfolge (5) ist also in der konjugierten Ausgangsmenge eines Komplexes erster Ordnung enthalten.

Wir betrachten jetzt den Fall 2. Es ist leicht ersichtlich, daß eine Teilfolge von (1)

$$\bar{O}_1, \bar{O}_2, \ldots, \bar{O}_n, \ldots \tag{6}$$

bestimmt werden kann, die zu der Folge $O_1^{(\mu)}, O_2^{(\mu)}, \ldots, O_n^{(\mu)}, \ldots$ konjugiert ist. (7) Wegen der Bedingung 2 existiert kein Teilgebiet der Menge $\bar{\Pi}_{\mu+1}^0$, in welchem eine zu einer Teilfolge von (6) konjugierte Punktfolge enthalten ist.

Die Menge $\bar{\Psi}_{\mu+1}$ aller Teilschnitte von in $\bar{\Pi}_{\mu+1}$ enthaltenen Teilgebieten ordnen wir beliebig in einer Folge

$$\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_\nu, \ldots.$$

Wir bilden jetzt die folgenden Mengen

$$F_1 = \overline{\varphi}_1$$
$$F_2 = \overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F_\nu = \overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2 + \cdots + \overline{\varphi}_\nu$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und bezeichnen die endliche Gesamtheit $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_\nu$ für jedes ν mit $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$. Für jeden Wert $\nu = 1, 2, \ldots$ bilden wir den Schnitt $F_\nu \cdot \mathfrak{G}$. Wir wollen uns jetzt überzeugen, daß eine beliebige Teilfolge von (6) immer eine weitere Teilfolge enthält, welche in einem und demselben durch den Schnitt $F_\nu \cdot \mathfrak{G}$ (ν beliebig) bestimmten nicht abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist. Wäre dies nicht der Fall, so müßte eine unendliche Teilfolge

(9) $$\overline{O}_1^*, \overline{O}_2^*, \ldots, \overline{O}_n^*, \ldots$$

von (6) in F_ν enthalten oder einer Folge paarweise verschiedener nicht abgeschlossener durch $F_\nu \cdot \mathfrak{G}$ (ν fest) bestimmter Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ untergeordnet sein. Dann gäbe es nach dem Hilfssatz 7 ein der Menge $\overline{\overline{\Pi}}_{\mu+1}$ angehörendes Teilgebiet, welches eine zu einer Teilfolge von (6) konjugierte Punktfolge enthalten müßte, was der Feststellung (7) widerspricht.

Der Schnitt $F_1 \cdot \mathfrak{G}$ bestimmt ein Teilgebiet $\mathfrak{G}'$, das eine Punktfolge $\overline{O}_1', \overline{O}_2', \ldots, \overline{O}_n', \ldots \subset \overline{O}_1, \overline{O}_2, \ldots, \overline{O}_n, \ldots$ enthält. Der Schnitt $F_2 \cdot \mathfrak{G}$ bestimmt ein Teilgebiet $\mathfrak{G}''$ von $\mathfrak{G}$, das eine Teilfolge $\overline{O}_1'', \overline{O}_2'', \ldots, \overline{O}_n'', \ldots \subset \overline{O}_1', \overline{O}_2', \ldots, \overline{O}_n', \ldots$ enthält usw. Es sei P_1 ein Punkt der Folge $\overline{O}_1', \overline{O}_2', \ldots, \overline{O}_n', \ldots$, $P_2 \neq P_1$ ein Punkt der Folge $\overline{O}_1'', \overline{O}_2'', \ldots, \overline{O}_n'', \ldots$ und allgemein $P_\nu \neq P_1, P_2, \ldots, P_{\nu-1}$ sei ein Punkt der Folge $\overline{O}_1^{(\nu)}, \overline{O}_2^{(\nu)}, \ldots, \overline{O}_n^{(\nu)}, \ldots$. Die Punktfolge

(10) $$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$$

ist wesentlich in jedem Gebiet der Folge

(11) $$\mathfrak{G}_1', \mathfrak{G}_2'', \ldots, \mathfrak{G}_\nu^{(\nu)}, \ldots$$

enthalten. Es sei

(12) $$P_1^*, P_2^*, \ldots, P_\nu^*, \ldots$$

eine beliebige Teilfolge von (10), die der letzteren entsprechend geordnet ist (d. h. sind $P_{\mu_1}^*$ und $P_{\mu_2}^*$ zwei Punkte der Folge (12), so ist immer $\mu_2 > \mu_1$, falls $P_{\mu_2}^*$ dem Punkt $P_{\mu_1}^*$ in der Folge (10) nachfolgt). Die beiden Punkte P_ν und P_ν^* ($\nu = 1, 2, \ldots$) können wir durch einen Streckenzug $\mathfrak{f}_\nu \subset \mathfrak{G}^{(\nu)}$ für jedes ν verbinden. Das Streckenzugsystem $\mathfrak{S} = \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_\nu, \ldots$ ist der Folge (11) untergeordnet.

(13) Wir wollen uns jetzt überzeugen, daß das Streckenzugsystem $\mathfrak{S} = \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n, \ldots$ ausgezeichnet ist. — Wir werden zeigen, daß in $\mathfrak{S}$ keine α-Punktfolge gegen das Grenzgebilde $T_{\mathfrak{f}}$ von $\mathfrak{S}$ konvergiert, während die Beziehung $T_{\mathfrak{f}} \subset \Gamma$ auf ähnliche Weise gefolgert werden kann. Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall und

(14) $$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

sei eine in $\mathfrak{S}$ gegen $T_{\mathfrak{f}}$ konvergierende α-Punktfolge. Der Teilschnitt eines Gebietes von $\overline{\Pi}_{\mu+1}$, welches die Punktfolge (14) wesentlich enthält, ist in der Menge $\overline{\Psi}_{\mu+1}$ bzw. in der Folge (8) enthalten; es sei dies der Teilschnitt $\overline{\varphi}_k$ $(\nu = k)$ der Folge (8). Der Teilschnitt $\overline{\varphi}_k$ ist sicher in jeder Schnittmenge der Folge $F_k, F_{k+1}, \ldots, F_{k+\nu}, \ldots$ enthalten. Das durch $\overline{\varphi}_k$ bestimmte und die Punktfolge (14) wesentlich enthaltende Teilgebiet bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{y}}_k$.

(15) Der Durchschnitt $\mathfrak{G}^{(k+\nu)0} \cdot \overline{\mathfrak{y}}_k$ ist für jedes ν leer.

Wäre dies nicht der Fall, so müßte nach dem Hilfssatz 1 wegen der Beziehung $\overline{\varphi}_k \subset F_{k+\nu}$ das Gebiet $\mathfrak{G}^{(k+\nu)}$ ganz in $\overline{\mathfrak{y}}_k$ enthalten sein. Dies ist aber unmöglich, da $\overline{\mathfrak{y}}_k$ keine Teilfolge der Folge (6) enthalten kann. — Nach (15) liegt die Punktfolge (14) wesentlich außerhalb fast aller Gebiete der Folge (11), während das Streckenzugsystem $\mathfrak{S}$ in jedem Gebiet der Folge (11) wesentlich enthalten ist. Aus diesem Widerspruch ergibt sich die Behauptung (13). — Damit ist gezeigt, daß im Falle 2 die Punktfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \subset O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ zu jeder ihrer beliebigen Teilfolgen konjugiert ist und muß, wie leicht ersichtlich (vgl. die Folgerung 2 der Definition A), in der konjugierten Ausgangsmenge eines Komplexes erster Ordnung enthalten sein.

II. Eine gegen einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$ konvergierende Punktfolge, die keine β-Teilfolge enthält, muß immer eine α-Teilfolge enthalten.

Aus der Folgerung 3 der Definition A können wir schließen, daß jede α-Punktfolge normiert und in der konjugierten Ausgangsmenge eines Komplexes erster Ordnung enthalten ist.

Nach dem Obigen kann der bewiesene Satz noch folgendermaßen verschärft werden.

Korollar. *Jede gegen einen Randpunkt des Gebietes $\mathfrak{G}$ konvergierende Punktfolge enthält eine Teilfolge, die in der konjugierten Ausgangsmenge eines Komplexes erster Ordnung enthalten ist.*

Satz IX. *Zwei Primenden E_q^{τ} und $E_q^{\bar{\tau}'}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ liegen außerhalb einander oder sie sind identisch und von gleicher Ordnung.*

Nehmen wir an, E_8^{τ} und $E_8^{\bar{\tau}'}$ seien verschieden und der Durchschnitt $E_8^{\tau} \cdot E_8^{\bar{\tau}'} \neq 0$. Die normierten f-Mengen von E_8^{τ} und $E_8^{\bar{\tau}'}$ sind zwei vollkommen gesättigte Komplexe Δ_{τ} und $\Delta_{\bar{\tau}}$, die verschieden sein müssen: eine normierte Teilfolge einer Punktfolge, die nur gegen das eine der beiden Primenden konvergiert, existiert nach dem Satz VIII immer und kann in der normierten f-Menge nur des gleichen Primendes enthalten sein. Eine Teilfolge einer beliebigen Punktfolge des Durchschnittes $f(E_8^{\tau}) \cdot f(E_8^{\bar{\tau}'})$ existiert ebenfalls und ist im Durchschnitt $\Delta_{\tau} \cdot \Delta_{\bar{\tau}}$ enthalten. Nach der Folgerung 2 § 8 müßten die beiden Komplexe identisch sein, was offenbar unmöglich ist.

§ 11.

Der Hauptsatz über die Primenden.

Satz X. *Jede normierte Teilfolge einer gegen einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$ konvergierenden Punktfolge konvergiert gegen ein Primende.*

I. Es sei

(1)
$$O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$$

eine beliebige Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$, die gegen einen Randpunkt konvergiert, und Δ_{τ} ein vollkommen gesättigter Komplex, der eine beliebige Teilfolge von (1) enthält. Wir müssen zeigen, daß eine solche (offenbar normierte) Teilfolge von (1) gegen ein Ende des Gebietes $\mathfrak{G}$ konvergiert, deren normierte f-Menge mit dem Komplex Δ_{τ} identisch ist. Wir werden ein solches Ende konstruieren.

Für jeden Wert $\nu = 1, 2, \ldots$ ordnen wir die Gebietsmenge $\overline{\Pi}_{\nu}$ in eine (evtl. endliche) Folge

(2)
$$\bar{\mathfrak{y}}_1^{(\nu)}, \bar{\mathfrak{y}}_2^{(\nu)}, \ldots, \bar{\mathfrak{y}}_n^{(\nu)}, \ldots .$$

Mit $\overline{\Psi}_{\nu}^{*}$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller paarweise verschiedenen Teilschnitte der Menge $\overline{\Psi}_{\nu}$, die der folgenden Bedingung genügen:

(3) Ein Teilschnitt von $\overline{\Psi}_{\nu}$ ist dann und nur dann in $\overline{\Psi}_{\nu}^{*}$ enthalten, wenn er kein Teilgebiet der Menge $\overline{\Pi}_{\nu}$ bestimmt, dessen Auflösungsgebiet wesentlich eine Punktfolge von Δ_{τ} enthält.

Die Menge $\overline{\Psi}_{\nu}^{*}$ ordnen wir beliebig in eine Folge

(4)
$$\bar{\varphi}_1^{(\nu)}, \bar{\varphi}_2^{(\nu)}, \ldots, \bar{\varphi}_n^{(\nu)}, \ldots,$$

die für ein festes ν von einem ersten n ab aus leeren Mengen bestehen kann. Wir wollen aber voraussetzen, daß die Kante des Einheitswürfels der simplizialen Zerlegung W_1 so klein gewählt ist, daß schon für $\nu = 1$ die Folge (4) nicht leer ist.

Wir bilden nun die Vereinigungsmengen

$$
\begin{aligned}
F' &= \bar\varphi_1', \\
F'' &= (\bar\varphi_1' \dotplus \bar\varphi_2') \dotplus \bar\varphi_1'', \\
F''' &= (\bar\varphi_1' \dotplus \bar\varphi_2' \dotplus \bar\varphi_3') \dotplus (\bar\varphi_1'' \dotplus \bar\varphi_2'') \dotplus \bar\varphi_1''', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F^{(\nu)} &= (\bar\varphi_1' \dotplus \bar\varphi_2' \dotplus \cdots \dotplus \bar\varphi_\nu') \dotplus (\bar\varphi_1'' \dotplus \bar\varphi_2'' \dotplus \cdots \dotplus \bar\varphi_{\nu-1}'') \dotplus \cdots \dotplus \bar\varphi_1^{(\nu)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Die Menge endlich vieler Teilschnitte $(\bar\varphi_1', \bar\varphi_2', \ldots, \bar\varphi_\nu'; \bar\varphi_1'', \bar\varphi_2'', \ldots, \bar\varphi_{\nu-1}''; \ldots; \bar\varphi_1^{(\nu)})$, die in den Mengen $F^{(\nu)}$ vereinigt werden, bezeichnen wir kurz mit $\mathfrak{m}_\nu(\bar\varphi)$. Der Schnitt $F^{(\nu)} \cdot \mathfrak{G}$ bestimmt offenbar mindestens zwei Teilgebiete von $\mathfrak{G}$, und da $F^{(\nu)}$ in der simplizialen Zerlegung W_ν enthalten ist, muß der Schnitt $F^{(\nu)} \cdot \mathfrak{G} = F^{(\nu)}$ regulär sein. Die Gesamtheit aller paarweise verschiedenen, durch den Schnitt $F^{(\nu)}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ ordnen wir für jedes ν in eine (eventuell endliche) Folge

$$\mathfrak{G}_1^{(\nu)}, \mathfrak{G}_2^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{G}_n^{(\nu)}, \ldots \tag{5}$$

und bezeichnen allgemein mit $\Gamma_n^{(\nu)}$ den Teilschnitt von $\mathfrak{G}_n^{(\nu)}$.

II. *Es sei*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \tag{6}$$

eine Punktfolge des Komplexes $\varDelta_\tau$, *die in der konjugierten Ausgangsmenge eines Komplexes* $\varDelta_1 \subset \varDelta_\tau$ *enthalten ist. Wir behaupten, für ein beliebiges festes* ν *ist eine unendliche Teilfolge von* (6) *in einem Gebiet* $\mathfrak{G}_n^{(\nu)} \equiv \mathfrak{G}^{(\nu)}$ *der Folge* (5) *enthalten.*

Nehmen wir an, dies sei nicht erfüllt. Es existiert dann eine unendliche Teilfolge von (6)

$$A_1', A_2', \ldots, A_n', \ldots, \tag{7}$$

die entweder in $F^{(\nu)}$ enthalten ist oder einer unendlichen Teilfolge

$$\mathfrak{G}_1^{(\nu)\prime}, \mathfrak{G}_2^{(\nu)\prime}, \ldots, \mathfrak{G}_n^{(\nu)\prime}, \ldots \tag{8}$$

von (5) untergeordnet ist. Nach dem Hilfssatz 7 existiert ein Teilschnitt $\bar\varphi_\nu^*$ der Menge $\mathfrak{m}_\nu(\bar\varphi)$, der ein Teilgebiet $\mathfrak{h}_\nu^*$ so bestimmt, daß das Auflösungsgebiet $\bar{\mathfrak{h}}_\nu^*$ eine zu einer Teilfolge von (7) konjugierte Punktfolge enthält. Eine solche Punktfolge ist aber auch in $\varDelta_1 \subset \varDelta_\tau$ enthalten, und wir erhalten einen Widerspruch zur Definition (3), wonach $\bar{\mathfrak{h}}_\nu^*$ keine Punktfolge von $\varDelta_\tau$ enthalten kann.

III. Es sei $\varDelta_*^0 \subset \varDelta_\tau$ ein abgeschlossener Komplex beliebiger Ordnung oder eine abgeschlossene konjugierte f-Menge. Es sei

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots \to \xi \tag{9}$$

eine beliebige Punktfolge von $L^*(\Delta_*)$. Um den Häufungspunkt ξ von (9) als Mittelpunkt legen wir eine Kugel K mit einem Radius $r < \frac{1}{8} a_\nu$ (ν beliebig und fest). $\mathfrak{U}(\xi)$ sei die durch K bestimmte Umgebung von ξ. Jeden fast aller Punkte der Folge (9) können wir von einem ersten Wert $n = \mu + 1$ ab mit fast allen Punkten einer Punktfolge von Δ_* innerhalb $\mathfrak{U}(\xi)$ verbinden. Das durch $K \cdot \mathfrak{G}$ bestimmte und den Punkt $R_{\mu+n}$ enthaltende Teilgebiet bezeichnen wir mit $\mathfrak{h}_n$.

(10) Der Folge der Teilgebiete

(11) $$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_n, \ldots$$

ist eine Folge von Punktfolgen von Δ_* untergeordnet (je zwei dieser Punktfolgen bzw. je zwei Gebiete der Folge (11) können auch identisch sein).

(12) Der Gebietsfolge (11) bzw. einer beliebigen Teilfolge von (11) kann keine in $F^{(\nu)}$ enthaltene Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Punkten untergeordnet sein.

Nehmen wir an, (12) sei nicht erfüllt. Es existiert dann eine Punktfolge

(13) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

innerhalb der Umgebung $\mathfrak{U}(\xi)$, die einer Teilfolge von (11) untergeordnet ist und in $F^{(\nu)}$ bzw. in einem Teilschnitt $\bar{\varphi}_i^*$ der Menge $\mathfrak{m}_\nu(\bar{\varphi})$ enthalten ist. Nun gilt die Beziehung

$$\bar{\mathfrak{h}}_i^{*0} \cdot \mathfrak{G} < \bar{\bar{\mathfrak{h}}}_i^*,$$

wobei $\bar{\mathfrak{h}}_i^*$ ein durch $\bar{\varphi}_i^*$ bestimmtes Teilgebiet ist. Es muß also auch die Beziehung gelten

(14) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots < \bar{\bar{\mathfrak{h}}}_i^*.$$

Die Entfernung des Punktes ξ von der Oberfläche des das Teilgebiet $\bar{\mathfrak{h}}_i^*$ bestimmenden Würfels $\overline{W}_i^*$ ist $< \frac{1}{8} a_\nu$, woraus folgt, daß die Umgebung $\mathfrak{U}(\xi)$ ganz innerhalb des Auflösungswürfels $\overline{\overline{W}}_i^*$ enthalten ist. Es muß darnach eine unendliche Teilfolge solcher Gebiete der Folge (11), die einen Punkt der Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ enthalten, im Gebiet $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}_i^*$ enthalten sein. Im Gebiet $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}_i^*$ ist dann nach (10) jedenfalls eine Punktfolge von Δ_* enthalten, was nach der Definition (3) unmöglich ist. Aus diesem Widerspruch ergibt sich (12).

Aus (12) können wir folgende wichtige Schlüsse ziehen:

(15) 1. *Ist $\Delta_* < \Delta_\tau$ ein Komplex beliebiger Ordnung oder eine konjugierte f-Menge und ist wesentlich in einem Gebiet $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ eine Punktfolge von $L^*(\Delta_*)$ enthalten, so ist wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ auch eine Punktfolge von Δ_* enthalten.*

(16) 2. *Ist $\varDelta_* \subset \varDelta_\tau$ ein Komplex beliebiger Ordnung oder eine konjugierte f-Menge und ist $\varDelta_*$ wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten, so muß auch $L^*(\varDelta_*)$ wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten sein.*

IV. *Ist eine beliebige Punktfolge*

(17) $$\overline{O}_1, \overline{O}_2, \ldots, \overline{O}_n, \ldots$$

eines abgeschlossenen Komplexes erster Ordnung $\varDelta_1^0 \subset \varDelta_\tau$ wesentlich im Gebiet $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ (ν fest) enthalten, so ist $\varDelta_1^0$ selbst wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten.

Um diese Behauptung nachzuweisen, genügt es, den Fall zu betrachten, in dem die Punktfolge (17) in $\varDelta_1$ enthalten ist. Wäre nämlich (17) in $L^*(\varDelta_1)$ enthalten, so könnten wir nach III. (15) auch eine wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthaltene Punktfolge von $\varDelta_1$ bestimmen, und wir hätten darnach wiederum den obigen Fall. Wir wollen zunächst folgendes zeigen:

(18) Die konjugierte f-Menge $\overline{\varDelta}^0$, die in der Grundmenge von $\varDelta_1$ enthalten ist und die die Punktfolge (17) enthält, ist wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten.

Um (18) nachzuweisen, genügt es ebenfalls wegen III. (15), den Fall zu betrachten, in dem die Punktfolge (17) in $\overline{\varDelta}$ enthalten ist. Wir zeigen zunächst, daß $\overline{\varDelta}$ selbst wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten sein muß. Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall, so gibt es außerhalb $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ eine unendliche Punktfolge

(19) $$B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots,$$

die in einer Punktfolge von $\overline{\varDelta}$ enthalten ist. Diese Punktfolge ist nach den Folgerungen 2 und 4 (§ 5) zu einer Teilfolge

(20) $$\overline{O}'_1, \overline{O}'_2, \ldots, \overline{O}'_n, \ldots \subset \overline{O}_1, \overline{O}_2, \ldots, \overline{O}_n, \ldots$$

konjugiert und läßt sich mit dieser durch ein ausgezeichnetes Streckenzugsystem $\mathfrak{S} = \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n, \ldots$ verbinden. Jeder Streckenzug $\mathfrak{f}_n$ von $\mathfrak{S}$ trifft den Teilschnitt $\Gamma^{(\nu)}$ von $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ in einem gewissen Punkt y_n. Eine wohldefinierte Teilfolge

(21) $$y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, \ldots$$

der Punktfolge $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ist offenbar zu einer Teilfolge der Punktfolge (20) bzw. zu einer Teilfolge einer Punktfolge der konjugierten Ausgangsmenge von $\varDelta_1$ konjugiert. Die Punktfolge (21) muß nach der Definition A der Komplexe in $\varDelta_1$ enthalten sein. Dies widerspricht aber der Bedingung (3), da die Punktfolge (21) in $\Gamma^{(\nu)} \subset F^{(\nu)}$ enthalten ist, und infolgedessen müßte in einem Auflösungsgebiet eines durch einen Teilschnitt der Menge $\mathfrak{m}_\nu(\overline{\varphi})$ bestimmten Teilgebietes eine Teilfolge von (21) enthalten sein. Damit ist gezeigt, daß die konjugierte f-Menge $\overline{\varDelta}$ in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist, und daraus ergibt sich auf Grund von III. (16) unsere Behauptung (18).

(22) Eine jede von $\bar{\Delta}^0$ verschiedene konjugierte f-Menge $\bar{\Delta}^{*0}$ der Grundmenge des Komplexes Δ_1 ist ebenfalls wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten.

Nach der Folgerung 1 der Definition A gilt die Beziehung $\bar{\Delta}^{*0} \cdot \bar{\Delta}^0 \neq 0$. Eine Punktfolge von $\bar{\Delta}^{*0}$ muß also wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten sein, und die gleiche Betrachtung wie im Falle von (18) führt zum Nachweis von (22). Aus (18) und (22) folgt, daß Δ_1 wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist, und nach III. (16) muß auch Δ_1^0 wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten sein.

V. Wir wollen jetzt beweisen, *daß für jedes feste ν der Komplex Δ_τ wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist.* Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall. — Ein abgeschlossener Komplex erster Ordnung, von dem mindestens eine Punktfolge wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist und welcher (nach IV.) deshalb selbst in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ wesentlich enthalten ist, existiert jedenfalls: ein solcher Komplex ist in erster Linie der in II. betrachtete Komplex $\Delta_1^0 > \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$. Mit $M(\sigma_\eta)$ bezeichnen wir die Menge paarweise verschiedener Zahlen $\leq \tau$, die der Bedingung genügen, daß jeder und mindestens ein Komplex $\Delta_{\sigma_\eta}^0 < \Delta_\tau$ von einer Ordnung σ_η bzw. jeder in Δ_τ enthaltene abgeschlossene Komplex von einer Ordnung $< \sigma_\eta$, von dem mindestens eine Punktfolge in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ wesentlich enthalten ist, auch selbst wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist. Die Menge $M(\sigma_\eta)$, in der mindestens die Zahl 1 enthalten ist, schreiben wir in der natürlichen Größenordnung in der Form

(23) $$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\eta, \ldots$$

und bezeichnen mit $M(\Delta_{\sigma_\eta}^0)$ die Gesamtheit der abgeschlossenen Komplexe von einer Ordnung σ_η, die selbst wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten sind. Mit η_* bezeichnen wir die kleinste der Menge (23) folgende Zahl mit der Eigenschaft, daß ein Komplex $\Delta_{\eta_*}^0 < \Delta_\tau$ existiert, von dem eine Punktfolge außerhalb $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ liegt und mindestens eine Punktfolge wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist. Gäbe es eine solche Zahl $< \tau$ nicht, so würde die Zahl τ selbst die erforderliche Eigenschaft aufweisen. Die Zahl η_* ist jedenfalls > 1.

(24) Nach III. (15) existiert auch immer eine Punktfolge des nicht abgeschlossenen Komplexes Δ_{η_*}, von dem eine Punktfolge wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist.

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß η_* einen unmittelbaren Vorgänger hat. Die Menge sämtlicher Komplexe, die in der Grundmenge des Komplexes Δ_{η_*} und zugleich in $M(\Delta_{\sigma_\eta})$ enthalten sind, bezeichnen wir mit $\bar{M}'(\Delta_{\sigma_\eta})$. Diese Menge ist wegen (24) nicht leer, und aus der Definition B können wir folgern, daß mindestens ein in bezug auf η_* gesättigter und zu einem Komplex von $\bar{M}'(\Delta_{\sigma_\eta}^0)$ benachbarter Komplex existiert. Ein jeder abgeschlossene, zu einem Komplex von $\bar{M}'(\Delta_{\sigma_\eta}^0)$ benachbarte und in bezug auf η_* gesättigte Komplex enthält auch eine wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ liegende

Punktfolge und ist in $M(\Delta^0_{\sigma_\eta})$ und darnach auch in $\overline{M}'(\Delta^0_{\sigma_\eta})$ enthalten. Die Gesamtheit $\overline{M}'(\Delta_{\sigma_\eta})$ genügt der Bedingung 1 der Definition B. — Die Grundmenge des Komplexes Δ_{η_*} bezeichnen wir mit $\overline{M}(\Delta_{\sigma_\chi})$ $(\sigma_\chi < \eta_*)$. Da jede Teilfolge einer Punktfolge des Komplexes Δ_{η_*} wiederum eine Punktfolge von Δ_{η_*} ist und wegen III. (16) mindestens eine Teilfolge einer Punktfolge von Δ_{η_*} außerhalb $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ liegen muß, so existiert ein Komplex $\Delta^{*0}_{\sigma_\chi}$ der Menge $\overline{M}(\Delta^0_{\sigma_\chi})$, von dem mindestens eine Punktfolge wesentlich außerhalb $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ liegt. Wir erhalten die Beziehungen

$$(25)\qquad \overline{M}'(\Delta_{\sigma_\eta}) \subset \overline{M}(\Delta_{\sigma_\chi}) \quad \text{und} \quad \neq \overline{M}(\Delta_{\sigma_\chi}),$$

die der Bedingung 2 der Definition B widersprechen.

Wir machen jetzt die Annahme, daß η_* eine Limeszahl sei. Es sei

$$(26)\qquad X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

eine Ausgangspunktfolge von Δ_{η_*} und $\overline{\Delta}^{*0}_{\sigma_\chi}$ ein Komplex von einer Ordnung $\sigma_\chi < \eta_*$, der die Punktfolge (26) enthält und von dem eine Punktfolge wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist. Einen solchen Komplex $\overline{\Delta}^{*0}_{\sigma_\chi}$ können wir immer bestimmen, und er muß wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten sein. Wir schließen daraus, daß die Punktfolge (26) wesentlich in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ enthalten ist. Wegen III. (16) existiert eine außerhalb $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ liegende Punktfolge des Komplexes Δ_{η_*}, die nach der Definition C die Komplexe ebenfalls in einem Komplex von einer Ordnung $\sigma_\chi < \eta_*$, der die Punktfolge (26) enthält, enthalten ist. Dieser Komplex müßte selbst in $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ wesentlich enthalten sein, was offenbar unmöglich ist.

Aus diesem Widerspruch und aus (25) folgt die Gültigkeit unserer Behauptung.

VI. Nach V. ist der Durchschnitt $\mathfrak{G}^{(\nu+1)} \cdot \mathfrak{G}^{(\nu)}$ nicht leer, und da der Teilschnitt $\Gamma^{(\nu)}$, der das Gebiet $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ bestimmt, in $F^{(\nu+1)}$ enthalten ist, muß nach dem Hilfssatz 1 für jedes ν die Beziehung gelten:

$$\mathfrak{G}^{(\nu)} \supset \mathfrak{G}^{(\nu+1)}.$$

(27) *Nach dem Satz* I *können wir jedes Gebiet* $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ (*ν beliebig*) *durch einen Querschnitt* $q^{(\nu)} \subset F^{(\nu)}$ *von einem beliebigen außerhalb* $\mathfrak{G}'^{0}$ *liegenden Punkt O des Gebietes* $\mathfrak{G}$ *so trennen, daß jeder Punkt von* $\mathfrak{G}$, *der außerhalb* $\mathfrak{G}^{(\nu)0}$ *liegt, ebenfalls durch* $q^{(\nu)}$ *von* $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ *getrennt wird, falls er mit O durch einen Streckenzug, der* $\Gamma^{(\nu)}$ *nicht trifft, innerhalb* $\mathfrak{G}$ *sich verbinden läßt.*

Es sei $\mathfrak{g}^{(\nu)}$ das durch den Querschnitt $q^{(\nu)}$ bestimmte und den Punkt O nicht enthaltende Teilgebiet. Für jedes ν besteht die Beziehung

$$(28)\qquad \mathfrak{g}^{(\nu)0} \supset \mathfrak{g}^{(\nu+1)0}.$$

Wir berücksichtigen nämlich zunächst die Beziehung

$$\mathfrak{g}^{(\nu)0} > \mathfrak{G}^{(\nu)0}.$$

Ein Punkt R des Gebietes $\mathfrak{G}$, der außerhalb $\mathfrak{g}^{(\nu)0}$ liegt, läßt sich immer mit dem Punkt O außerhalb $\mathfrak{G}^{(\nu)0}$ durch einen Streckenzug s so verbinden, daß der Streckenzug s keinen Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}^{(\nu+1)0} < \mathfrak{G}^{(\nu)0}$ trifft. Der Querschnitt $q^{(\nu+1)}$ trennt nach (27) das Gebiet $\mathfrak{g}^{(\nu+1)}$ vom Punkt R. — Jeder Punkt von $q^{(\nu)}$ ist zweiseitig, und wir können aus (28) schließen, daß in $\mathfrak{g}^{(\nu+1)}$ kein Punkt von $q^{(\nu)}$ enthalten sein kann. Darnach gilt die Beziehung

$$\mathfrak{g}^{(\nu)} > \mathfrak{g}^{(\nu+1)},$$

und wir erhalten auf diese Weise eine Gebietskette

(29) $$\mathfrak{g}' > \mathfrak{g}'' > \dots > \mathfrak{g}^{(\nu)} > \dots,$$

die durch eine Kette von Querschnitten

(30) $$q', q'', \dots, q^{(\nu)}, \dots$$

bestimmt wird. Die Gebietskette (bzw. die Querschnittskette) bestimmt ein Ende $\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{g}^{(\nu)} > \mathfrak{G}^{(\nu)}$ muß für jedes ν der Komplex Δ_τ wesentlich in $\mathfrak{g}^{(\nu)}$ enthalten sein.

(31) Daraus folgt, daß jede Punktfolge von Δ_τ gegen das Ende $\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}}$ konvergiert.

VII. *Jede α-Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$, die gegen das* (*in* VI. *bestimmte*) *Ende $\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}}$ konvergiert, ist im Komplex Δ_τ enthalten.*

Nehmen wir an,

(32) $$R_1, R_2, \dots, R_n, \dots \to \xi$$

sei eine α-Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$, die gegen $\mathfrak{E}_{\mathfrak{g}}$ konvergiert und in Δ_τ nicht enthalten ist.

Für jeden Wert $\nu = 1, 2, \dots$ ist die Punktfolge (32) wesentlich in einem Gebiet $\bar{\mathfrak{h}}^{(\nu)}$ der Menge $\overline{\Pi}_\nu$ enthalten. Den $\bar{\mathfrak{h}}^{(\nu)}$ bestimmenden Teilschnitt bezeichnen wir mit $\bar{\varphi}^{(\nu)}$. Es existiert ein erster, hinreichend großer Wert $\nu = \mu_1$ so, daß $\bar{\varphi}^{(\mu_1)}$ kein Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ bestimmt, dessen Auflösungsgebiet eine Punktfolge von Δ_τ enthält. Wäre dies nicht der Fall, so müßte in einer noch so kleinen Kugelumgebung des Punktes ξ das Auflösungsgebiet eines für ein hinreichend großes ν durch $\bar{\varphi}^{(\nu)}$ bestimmten Teilgebietes liegen, welches zugleich die Punktfolge (32) und eine Punktfolge von Δ_τ wesentlich enthält. Darnach müßte, wie leicht ersichtlich, die Punktfolge (32) in Δ_τ enthalten sein, was offenbar unmöglich ist. — Der Teilschnitt $\bar{\varphi}^{(\mu_1)}$ muß in der in (4) bestimmten Folge

$$\bar{\varphi}_1^{(\mu_1)}, \bar{\varphi}_2^{(\mu_1)}, \dots, \bar{\varphi}_n^{(\mu_1)}, \dots \qquad (\nu = \mu_1)$$

enthalten sein. Wir können einen ersten hinreichend großen Wert $\mu_2 > \mu_1$ so angeben, daß der Teilschnitt $\bar{\varphi}^{(\mu_1)}$ in jeder Schnittmenge der Folge $F^{(\mu_2+1)}, F^{(\mu_2+2)}, \ldots, F^{(\mu_2+\nu)}, \ldots$ enthalten ist. Für jeden Wert $\nu = 1, 2, \ldots$, besteht die Beziehung

$$(33) \qquad \mathfrak{G}^{(\mu_2+\nu)0} \cdot \bar{\mathfrak{h}}^{(\mu_1)} = 0 .$$

Wäre nämlich ein Punkt von $\Gamma^{(\mu_2+\nu)}$ in $\bar{\mathfrak{h}}^{(\mu_1)}$ enthalten, so müßte offenbar auch $\mathfrak{G}^{(\mu_2+\nu)} \cdot \bar{\mathfrak{h}}^{(\mu_1)} \neq 0$ sein. Wegen der Beziehung $\bar{\varphi}^{(\mu_1)} < F^{(\mu_2+\nu)}$ müßte das Gebiet $\mathfrak{G}^{(\mu_2+\nu)}$ nach dem Hilfssatz 1 in $\mathfrak{h}^{(\mu_1)}$ enthalten sein. Dies ist aber unmöglich, da das Gebiet $\mathfrak{G}^{(\mu_2+\nu)}$ den Komplex Δ_τ wesentlich enthält, dagegen ist in $\bar{\mathfrak{h}}^{(\mu_1)}$ keine einzige Punktfolge von Δ_τ wesentlich enthalten. — Einen Punkt O' von $\bar{\mathfrak{h}}^{(\mu_1)}$ verbinden wir mit einem außerhalb $\mathfrak{g}'^0$ liegenden Punkt O von $\mathfrak{G}$ durch einen Streckenzug s, der ganz in $\mathfrak{G}$ verläuft. Wir bestimmen eine erste hinreichend große Zahl $\mu_3 > \mu_2$ so, daß $a_{\mu_3} < \frac{1}{81} d(s, \Gamma)$ wird, wobei wir mit $d(s, \Gamma)$ den Abstand der beiden Mengen bezeichnen. Mit $M(\overline{W})$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller solchen Auflösungswürfel von W_{μ_3}, die in ihrem Inneren oder auf ihrer Oberfläche einen Punkt des Streckenzuges s enthalten. Jeder dieser Würfel liegt im Inneren des Gebietes $\mathfrak{G}$; wir bilden die Vereinigungsmenge aller Würfel der Menge $M(\overline{W})$ und erhalten einen Polyeder $\mathfrak{P}$, in dessem Inneren der Streckenzug s verläuft. Wir können jetzt einen ersten hinreichend großen Wert $\mu_4 > \mu_3$ so bestimmen, daß jede Würfelfläche eines Würfels der Menge $M(\overline{W})$ in $F^{(\mu_4)}$ enthalten ist. Die Oberfläche des Polyeders $\mathfrak{P}$ ist darnach in jeder Schnittmenge $F^{(\mu_4+\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ enthalten und wir können aus dem Hilfssatz 1 analog wie im Falle der Beziehung (33) folgern, daß in keinem abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{G}^{(\mu_4+\nu)0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ein Punkt des Inneren des Polyeders $\mathfrak{P}$ enthalten ist. Der Streckenzug s kann also keinen der Teilschnitte der Folge $\Gamma^{(\mu_4+1)}, \Gamma^{(\mu_4+2)}, \ldots, \Gamma^{(\mu_4+\nu)}, \ldots$ treffen. Nach dem Satz I liegt der Punkt O' außerhalb eines jeden Gebietes der Folge

$$(34) \qquad \mathfrak{g}^{(\mu_4+1)0}, \mathfrak{g}^{(\mu_4+2)0}, \ldots, \mathfrak{g}^{(\mu_4+\nu)0}, \ldots .$$

Wegen (33) läßt sich jeder Punkt von $\bar{\mathfrak{h}}^{(\mu_1)}$ (also auch jeder fast aller Punkte von (32)) durch je einen in $\mathfrak{G}$ verlaufenen Streckenzug, der keinen der abgeschlossenen Gebiete der Folge (34) trifft, mit O' verbinden. Die Punktfolge (32) muß wesentlich außerhalb eines jeden Gebietes der Folge (34) liegen und kann nicht gegen $\mathfrak{E}_3$ konvergieren. Dieses Resultat widerspricht unserer Annahme, wonach (32) gegen $\mathfrak{E}_3$ konvergiert, weshalb wir die Gültigkeit unserer Behauptung folgern können. — Es ist ohne weiteres klar, daß wir auf ähnliche Weise wie oben beweisen können, daß

(35) $\mathfrak{E}_3$ *keine inneren Punkte des Gebietes* $\mathfrak{G}$ *enthalten kann.*

VIII. *Es sei*

(36) $$O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$$

eine normierte β-Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$, die gegen das Ende $\mathfrak{E}_g$ konvergiert. Wir behaupten, die Punktfolge (36) *ist im Komplex Δ_τ enthalten.*

Es sei

(37) $$O_1', O_2', \ldots, O_n', \ldots$$

eine Teilfolge von (36), die der $\mathfrak{E}_g$ bestimmenden Gebietskette $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \ldots, \mathfrak{g}^{(n)}, \ldots$ untergeordnet und in der konjugierten Ausgangsmenge Δ eines Komplexes Δ_1 erster Ordnung enthalten ist[18]). Eine beliebige, derselben Gebietskette untergeordnete Punktfolge des nicht leeren Durchschnittes $\Delta_\tau \cdot f(\mathfrak{E}_g)$ bezeichnen wir mit

(38) $$P_1', P_2', \ldots, P_n', \ldots.$$

(39) Für jeden Wert $n = 1, 2, \ldots$ verbinden wir die beiden Punkte O_n und P_n' durch einen in $\mathfrak{g}^{(n)}$ verlaufenden Streckenzug $\mathfrak{f}_n$. Das Streckenzugsystem $\mathfrak{S} = \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n, \ldots$ verbindet die beiden Punktfolgen (37) und (38). Das Streckenzugsystem $\mathfrak{S}$ ist ebenfalls der Gebietskette $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \ldots, \mathfrak{g}^{(n)}, \ldots$ untergeordnet und wir schließen daraus, daß jede im System S gegen sein Grenzgebilde $T_{\mathfrak{f}}$ konvergierende Punktfolge auch gegen das Ende $\mathfrak{E}_g$ konvergiert.

(40) Nehmen wir jetzt an, die Punktfolge (36) sei in Δ_τ nicht enthalten.

(41) Aus dieser Annahme folgt zunächst, daß auch keine unendliche Teilfolge von (36) in Δ_τ enthalten sein kann.

Wäre dies nicht der Fall, so müßte jedenfalls (wegen Satz III) der die normierte Punktfolge (36) enthaltende Komplex erster Ordnung zu dem Komplex Δ_τ benachbart sein, was aber unmöglich ist, da darnach auch ein in bezug auf die Zahl $\tau + 1$ gesättigter und zu Δ_τ benachbarter Komplex existieren müßte.

Ziehen wir (41) in Betracht, so können wir auch leicht sehen, daß das Streckenzugsystem $\mathfrak{S}$ kein ausgezeichnetes Teilsystem enthalten kann. Es müßte sonst wiederum eine gewisse Teilfolge von (36) und eine in Δ_τ enthaltene Teilfolge von (38) in einem und demselben Komplex erster Ordnung enthalten sein. Ein solcher Komplex wäre wiederum zu Δ_τ benachbart, was offenbar unmöglich ist.

Ähnlich wie im Hilfssatz 6 können wir folgern, daß jeder fast aller Streckenzüge des Systems $\mathfrak{S}$

(42) $$\mathfrak{f}_{\mu_\nu+1}, \mathfrak{f}_{\mu_\nu+2}, \ldots, \mathfrak{f}_{\mu_\nu+n}, \ldots$$

[18]) Nach dem Korollar des Satzes VIII existiert eine solche Teilpunktfolge immer.

von einem gewissen (der Zahl ν entsprechenden) ersten Wert $n = \mu_\nu + 1$ ab, mindestens einen Punkt eines Gebietes der Menge $\overline{\Pi}_\nu$ (ν beliebig und fest) trifft, das in seinem Inneren eine gegen $T_\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ konvergierende α-Punktfolge wesentlich enthält.

Jeden Streckenzug $\mathfrak{f}_{\mu_\nu+n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ durchlaufen wir für jeden Wert ν in der Richtung $\overrightarrow{O'_{\mu_\nu+n} P'_{\mu_\nu+n}}$ bis zum ersten Schnittpunkt $x^{(\nu)}_{\mu_\nu+n}$ mit einem abgeschlossenen Teilgebiet $\overline{\mathfrak{y}}^{(\nu)*0}_{\mu_\nu+n}$ der Menge $\overline{\Pi}^0_\nu$, welches in seinem Inneren eine gegen $T_\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ konvergierende α-Punktfolge $z^{(\nu)}_{1\mu_\nu+n}, z^{(\nu)}_{2\mu_\nu+n}, \ldots, z^{(\nu)}_{k\mu_\nu+n}, \ldots$ enthält. Den durchlaufenen Teil des Streckenzuges $\mathfrak{f}_{\mu_\nu+n}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}^{(\nu)*}_{\mu_\nu+n}$. Zur Vereinfachung der Schreibweise ersetzen wir $\mu_\nu + n$ durch n und erhalten für jeden Index ν der simplizialen Zerlegung W_ν die Punktfolge

$$(43) \qquad x^{(\nu)}_1, x^{(\nu)}_2, \ldots, x^{(\nu)}_n, \ldots,$$

das Streckensystem

$$\mathfrak{S}^{(\nu)*} = \mathfrak{f}^{(\nu)*}_1, \mathfrak{f}^{(\nu)*}_2, \ldots, \mathfrak{f}^{(\nu)*}_n, \ldots,$$

und schließlich die f-Folge

$$(44) \quad z^{(\nu)}_{11}, z^{(\nu)}_{21}, \ldots, z^{(\nu)}_{k1}, \ldots; z^{(\nu)}_{12}, z^{(\nu)}_{22}, \ldots, z^{(\nu)}_{k2}, \ldots; \ldots; z^{(\nu)}_{1n}, z^{(\nu)}_{2n}, \ldots, z^{(\nu)}_{kn}, \ldots,$$

die der Gebietsfolge

$$(45) \qquad \overline{\mathfrak{y}}^{(\nu)*}_1, \overline{\mathfrak{y}}^{(\nu)*}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{y}}^{(\nu)*}_n, \ldots$$

untergeordnet ist. — Die Gebietsfolge (45) braucht nicht aus paarweise verschiedenen Gebieten zu bestehen, wir heben hier aber hervor, daß unendlich viele dieser Gebiete nur dann einen gemeinsamen Punkt haben können, wenn fast alle von ihnen identisch sind.

Das Streckenzugsystem $\mathfrak{S}^{(\nu)*}$ ist (für jedes ν) nach dem Hilfssatz 6 ausgezeichnet. Das Grenzgebilde von $\mathfrak{S}^{(\nu)*}$ bezeichnen wir mit $T^{(\nu)*}_\mathfrak{f}$ und mit $x^{(\nu)*}_1, x^{(\nu)*}_2, \ldots, x^{(\nu)*}_n, \ldots$ eine β-Teilfolge der Folge (43).

Der (oben definierte) Komplex Δ_1 erster Ordnung enthält sämtliche β-Punktfolgen

$$x'^*_1, x'^*_2 \ldots, x'^*_n, \ldots; x''^*_1, x''^*_2, \ldots, x''^*_n \ldots; \ldots; x^{(\nu)*}_1, x^{(\nu)*}_2, \ldots, x^{(\nu)*}_n, \ldots.$$

In bezug auf diese f-Folge unterscheiden wir jetzt zwei Fälle:

1. Es existiert eine erste Zahl $\nu = \mu$ so, daß eine unendliche Teilfolge

$$(46) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \subset x^{(\mu)*}_1, x^{(\mu)*}_2, \ldots, x^{(\mu)*}_n, \ldots$$

die Eigenschaft hat, daß die Teilfolge

$$(47) \qquad \overline{\mathfrak{y}}^0_1, \overline{\mathfrak{y}}^0_2, \ldots, \overline{\mathfrak{y}}^0_n, \ldots$$

der Folge $\overline{\mathfrak{y}}^{(\mu)*0}_1, \overline{\mathfrak{y}}^{(\mu)*0}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{y}}^{\mu*0}_n, \ldots$, welcher sie untergeordnet ist, gegen ein Grenzgebilde $T_\mathfrak{y}$ konvergiert, wobei jede gegen $T_\mathfrak{y}$ in (47) konvergierende Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$ eine β-Punktfolge ist.

2. In bezug auf keine noch so große Zahl ν ist die Bedingung 1 erfüllt.

Wir setzen zunächst den Fall 1 voraus.

Es sei $z_{1n}, z_{2n}, \ldots, z_{kn}, \ldots (n = 1, 2, \ldots)$ diejenige Punktfolge von (44), die im Gebiet $\bar{\mathfrak{y}}_n$ enthalten ist. Mit ζ_n bezeichnen wir den Häufungspunkt der Folge $z_{1n}, z_{2n}, \ldots, z_{kn}, \ldots$; diese letztere ist eine α-Punktfolge und muß wesentlich in einem Teilgebiet $\mathfrak{h}_n$, das durch eine noch so kleine Kugel K_n mit dem Mittelpunkt ζ_n bestimmt wird, enthalten sein. Den Radius r_n der Kugel K_n $(n = 1, 2, \ldots)$ setzen wir gleich $\frac{1}{2} r_{n-1}$. Es sei z_n ein Punkt des Durchschnittes $\mathfrak{h}_n \cdot \bar{\mathfrak{y}}_n$. Die Punktfolge $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ist der Folge (47) untergeordnet und enthält eine normierte β-Teilfolge

(48) $$z_1', z_2', \ldots, z_n', \ldots,$$

die einer unendlichen Teilfolge

(49) $$\bar{\mathfrak{y}}_1'^{0}, \bar{\mathfrak{y}}_2'^{0}, \ldots, \bar{\mathfrak{y}}_n'^{0}, \ldots$$

der Folge (47) bzw. einer unendlichen Teilfolge

(50) $$\mathfrak{h}_1', \mathfrak{h}_2', \ldots, \mathfrak{h}_n', \ldots$$

der Folge $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_n, \ldots$ untergeordnet ist und deren Häufungspunkt wir mit ζ bezeichnen. In einer noch so kleinen Kugelumgebung des Punktes ζ ist die Gebietsfolge (50) wesentlich enthalten und wir können daraus schließen (vgl. Folgerung 2^{**} § 4), daß die Punktfolge (48) eine unbewallte Grenzpunktfolge einer f-Teilmenge der f-Folge (44) ist.

(51) Bemerken wir noch, daß sämtliche gegen $\mathfrak{E}_\beta$ konvergierende α-Punktfolgen der Folge (44) nach VII in Δ_τ enthalten sind, so können wir schließen, daß die Punktfolge (48) in Δ_τ ebenfalls enthalten sein muß.

Jeden Punkt z_n' der Folge (48) können wir mit einem Punkt $y_n' \subset \bar{\mathfrak{y}}_n'^{0}$ der Folge (46) durch einen Streckenzug s_n' verbinden, der ganz im Durchschnitt $\bar{\mathfrak{y}}_n'^{0} \cdot \mathfrak{G}$ verläuft. Wegen der Bedingung 1 ist das Streckenzugsystem $S' = s_1', s_2', \ldots, s_n', \ldots$, das der Teilfolge (49) von (48) untergeordnet ist, ausgezeichnet. Die die Punktfolge $y_1', y_2', \ldots, y_n', \ldots$ enthaltende konjugierte f-Menge ist in Δ_1 enthalten, woraus folgt, daß auch die Punktfolge (48) in Δ_1 enthalten sein muß. Der in bezug auf $\tau + 1$ gesättigte und Δ_1 enthaltende Komplex müßte wegen (41) zu dem Komplex Δ_τ benachbart sein, was offenbar unmöglich ist.

Wir setzen jetzt den Fall 2 voraus. In diesem Falle können wir für jedes feste ν eine Teilfolge

(52) $$\bar{\mathfrak{y}}_1^{(\nu)**0}, \bar{\mathfrak{y}}_2^{(\nu)**0}, \ldots, \bar{\mathfrak{y}}_n^{(\nu)**0}, \ldots$$

der Folge (45) angeben, welcher eine α-Punktfolge

(53) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

untergeordnet ist, wobei jedes der nicht abgeschlossenen Gebiete der Folge (52) innerhalb eines und desselben Auflösungswürfels $\overline{W}_{\nu i}$ der simplizialen Zer-

legung W_ν liegt. Die Punktfolge (53) liegt wesentlich innerhalb eines und desselben durch den Auflösungswürfel $\overline{\overline{W}}_{\nu t}$ bestimmten Teilgebietes $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}^{(\nu)}$. Fast jeder Durchschnitt $\mathfrak{y}_n^{(\nu)**0} \cdot \mathfrak{G}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist in $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}^{(\nu)}$ enthalten. Wir schließen daraus, daß in $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}^{(\nu)}$ für das gegebene ν eine unendliche Teilfolge

(54) $$y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu)}, \ldots, y_n^{(\nu)}, \ldots$$

der Folge (43) und außerdem eine α-Punktfolge des Komplexes Δ_r

(55) $$R_1^{(\nu)}, R_2^{(\nu)}, \ldots, R_n^{(\nu)}, \ldots$$

enthalten ist. — Wir betrachten jetzt die Gebietsfolge

(56) $$\bar{\bar{\mathfrak{y}}}', \bar{\bar{\mathfrak{y}}}'', \ldots, \bar{\bar{\mathfrak{y}}}^{(\nu)}, \ldots.$$

Den Durchmesser von $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}^{(\nu)0}$ bezeichnen wir mit $d^{(\nu)}$; es ist offenbar $d^{(\nu)} < 27 a_\nu \sqrt{3}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so daß die Beziehung bestehen muß

$$d', d'', \ldots, d^{(\nu)}, \ldots \to 0.$$

Es existiert also eine unendliche Teilfolge

(57) $$\bar{\bar{\mathfrak{y}}}'^{*}, \bar{\bar{\mathfrak{y}}}''^{*}, \ldots, \bar{\bar{\mathfrak{y}}}^{(\nu)*}, \ldots$$

der Folge (56), die gegen einen Randpunkt ξ^* konvergiert. Es sei

(58) $$c', c'', \ldots, c^{(\nu)}, \ldots$$

eine beliebige, der Teilfolge (57) untergeordnete Punktfolge. Der Folge (57) ist eine Teilfolge der f-Folge $\{R_1^{(\nu)}, R_2^{(\nu)}, \ldots, R_n^{(\nu)}, \ldots\}$. $(\nu = 1, 2, \ldots)$ bzw. eine f-Teilfolge der f-Folge $\{y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu)}, \ldots, y_n^{(\nu)}, \ldots\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ untergeordnet. Nun sind sämtliche Punktfolgen der ersten f-Folge in Δ_r und sämtliche Punktfolgen der zweiten f-Folge in Δ_1 enthalten und wir können schließen, daß eine normierte Teilfolge von (58) in Δ_r bzw. in Δ_1^0 enthalten ist. Wegen (41) müssen die beiden Komplexe Δ_r und Δ_1 benachbart sein, was offenbar unmöglich ist. Damit ist (40) widerlegt.

Aus (35), VII und VIII ergibt sich der Satz X: Das Ende $\mathfrak{E}_\beta = E_\beta'$ ist das zu bestimmende Primende.

§ 12.

Beweis der Abzählbarkeit der Ordnung eines Primendes.

Satz XI. *Es sei Δ_η^0 ein abgeschlossener Komplex von einer beliebigen Ordnung η. Es existiert immer ein Ende $\mathfrak{E}_\beta$, welches einer der folgenden Beziehungen genügt:*

$$f(\mathfrak{E}_\beta) = \Delta_\eta^0$$

oder

$$\Delta_\eta^0 < f(\mathfrak{E}_\beta) < \Delta_{\eta+1},$$

wobei $\Delta_{\eta+1}$ ein gewisser Komplex von der Ordnung $\eta + 1$ ist.

Wir führen die Konstruktion des Endes $\mathfrak{E}_g$ in bezug auf den Komplex Δ_η^0 aus, ganz analog der Konstruktion des Primendes E_g^r in § 11 in bezug auf den vollkommen gesättigten Komplex Δ_r. Wir bemerken nur, daß die sämtlichen Behauptungen I bis VII und Betrachtungen des Beweises des Satzes X im vorigen Paragraphen sich unmittelbar zur Bestimmung des Endes $\mathfrak{E}_g$, hier, übertragen lassen. Darnach genügt es zu zeigen, daß, falls die Beziehung $f(\mathfrak{E}_g) = \Delta_\eta^0$ nicht gilt, jede normierte gegen $\mathfrak{E}_g$ konvergierende und zu Δ_η^0 fremde β-Punktfolge $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ eine Teilfolge enthält, die entweder selbst in Δ_η^0 oder in einem zu Δ_η^0 benachbarten Komplex Δ_1^0 erster Ordnung enthalten ist. Enthält Δ_η^0 keine Teilfolge von $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$, so können wir analog wie in VIII, § 11 einen zu Δ_η^0 benachbarten und eine Teilfolge von $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ enthaltenden Komplex erster Ordnung bestimmen. In beiden Fällen ist der $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ enthaltende Komplex erster Ordnung in einem Komplex der Grundmenge eines Komplexes $\Delta_{\eta+1} \supset \Delta_\eta^0$ enthalten.

Aus den Betrachtungen des Satzes IX können wir noch die folgenden Schlüsse ziehen.

Korollar 1. Ist eine jede gegen ein auf der Berandung Γ von $\mathfrak{G}$ liegendes Ende $\mathfrak{E}_g$ konvergierende α-Punktfolge in einem und demselben abgeschlossenen Komplex $\Delta_\eta^0 \subset f(\mathfrak{E}_g)$ von einer beliebigen Ordnung η enthalten oder ist die Menge solcher α-Punktfolgen leer, so ist auch eine jede normierte gegen $\mathfrak{E}_g$ konvergierende β-Punktfolge in Δ_η^0 enthalten oder es ist eine ihrer Teilfolgen in einem zu Δ_η^0 benachbarten Komplex erster Ordnung enthalten.

Ist Δ_η^0 ein abgeschlossener Komplex einer beliebigen Ordnung η, so nennen wir das Ende $\mathfrak{E}_g$ des Gebietes $\mathfrak{G}$, welches auf der Berandung Γ von $\mathfrak{G}$ liegt und der Bedingung $\Delta_\eta^0 \subset f(\mathfrak{E}_g)$ genügt, das den Komplex Δ_η^0 *einschließende* Ende, falls jede gegen $\mathfrak{E}_g$ konvergierende α-Punktfolge in Δ_η^0 enthalten ist.

Korollar 2. In bezug auf jeden abgeschlossenen Komplex Δ_η^0 von einer Ordnung η kann ein ihn einschließendes Ende konstruiert werden, und zwar nach dem in I und VI (§ 11) geschilderten Verfahren.

Ein besonders wichtiges Ergebnis der im § 11 bewiesenen und auf den Fall beliebiger abgeschlossener Komplexe angewandten Behauptungen (I bis VIII) ist der

Satz XII. *Es seien zwei Komplexe Δ_η^0 und $\Delta_{\eta+2}^0$ (η endlich oder transfinit) gegeben, die der Bedingung genügen $\Delta_\eta^0 \subset \Delta_{\eta+2}^0$. Wir behaupten, es existiert mindestens eine α-Punktfolge des Komplexes $\Delta_{\eta+2}^0$, die in Δ_η^0 nicht enthalten ist.*

Nehmen wir an, unsere Behauptung sei nicht erfüllt. Es sei $\mathfrak{E}_\vartheta$ das den Komplex $\Delta^0_{\eta+2}$ einschließende Ende. Der Komplex $\Delta^0_{\eta+2}$ muß laut Annahme mindestens eine β-Punktfolge enthalten, die in Δ^0_η nicht enthalten ist. Es gäbe sonst nach dem Hilfssatz 3 einen Komplex $\Delta^0_{\eta+1} < \Delta_{\eta+2}$ so, daß $\Delta_{\eta+1} \cdot \Delta^0_\eta \neq 0$ wäre, d. h. Δ^0_η wäre nach dem Satz V in $\Delta_{\eta+1}$ enthalten. Es müßte darnach auch die Beziehung $\Delta^0_{\eta+2} < \Delta_{\eta+1}$ gelten, die dem Hilfssatz 5 widerspricht. Es existiert also eine gegen $\mathfrak{E}_\vartheta$ konvergierende und in Δ^0_η nicht enthaltene normierte β-Punktfolge $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$. Wegen unserer Annahme ist $\mathfrak{E}_\vartheta$ auch das den Komplex Δ^0_η einschließende Ende, obwohl es in bezug auf $\Delta^0_{\eta+2}$ konstruiert wurde. Nach dem Korollar 1 des Satzes XI ist die Punktfolge $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ in einem Komplex $\Delta_{\eta+1} > \Delta^0_\eta$ enthalten. Wir erhalten die Beziehung $\Delta_{\eta+1} > f(\mathfrak{E}_\vartheta) > \Delta^0_{\eta+2}$, die wiederum dem Hilfssatz 5 widerspricht.

Damit ist die unserer Behauptung entgegengesetzte Annahme widerlegt.

Satz XIII. *Die Ordnung τ eines beliebigen Primendes E^τ_ϑ (bzw. des entsprechenden von ihm eingeschlossenen Komplexes Δ_τ) des Gebietes $\mathfrak{G}$ ist höchstens abzählbar.*

Diese Eigenschaft der Primenden werden wir mit Hilfe des Satzes XII beweisen, und zwar indem wir zeigen, daß die Ordnung *eines beliebigen* Komplexes Δ_τ nur endlich oder abzählbar sein kann. Die Zahl τ setzen wir $\geqq 6$ voraus.

Für jeden Wert $\nu = 1, 2, \ldots$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Teilgebiete der Menge $\overline{\Pi}_\nu$, in welchen mindestens eine α-Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}$ wesentlich enthalten ist, mit $\overline{\Pi}_\nu^*$. Die Vereinigung

$$\overline{\Pi}_1^* \dot{+} \overline{\Pi}_2^* \dot{+} \ldots \dot{+} \overline{\Pi}_\nu^* \dot{+} \ldots = \overline{\Pi}^*$$

besteht aus abzählbar unendlich vielen Teilgebieten von $\mathfrak{G}$. Mit

(1) $$1, 2, \ldots, \eta, \ldots$$

bezeichnen wir die der Größe nach geordnete Menge aller Ordnungszahlen $\leqq \tau$. Jede Zahl der Menge (1), die einen unmittelbaren Vorgänger hat, läßt sich in der Form darstellen $\eta = \chi + n$, wobei χ eine Limeszahl oder 0 und n eine endliche Zahl ist. Wir bilden jetzt die Menge aller solchen Zahlen von (1), die sich in der Form $\eta = \chi + 3n$ schreiben lassen, also (für $\tau > 12$)

(2) $$3, 6, \ldots, \ldots, \chi + 3n, \chi + 3(n+1), \ldots.$$

Wie leicht ersichtlich, ist im Falle des Transfiniten die Menge (2) mit der Menge (1) gleichmächtig. Zum Beweis unseres Satzes genügt es, die Abzählbarkeit der Menge (2) nachzuweisen. Dies geschieht, indem wir folgendes beweisen: *Es läßt sich immer eine Teilmenge paarweise verschiedener Gebiete der Menge $\overline{\Pi}^*$ zu der Zahlenmenge* (2) *ähnlich ordnen.*

(3) Es ist immer möglich, eine Teilmenge von Gebieten von $\overline{\Pi}^*$

(4) $$\mathfrak{y}_3, \mathfrak{y}_6, \ldots, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi+3n}, \ldots$$

der Menge der Zahlen $3, 6, \ldots, \ldots, \chi+3n, \ldots$ ähnlich zuzuordnen, so daß jedes Gebiet $\mathfrak{y}_{\chi+3n}$ mindestens eine α-Punktfolge wesentlich enthält, die dem Komplex Δ_τ angehört und die in keinem nachfolgenden Gebiete der Menge (4) wesentlich enthalten ist.

Die Gültigkeit unserer Behauptung für den Fall $\tau = 6$ folgt unmittelbar aus dem Satze XII: In einem Komplex $\Delta_6 > \Delta_3^0$ ist eine α-Punktfolge enthalten, die wesentlich in einem Gebiet von $\overline{\Pi}^*$ liegt, welches so klein gewählt werden kann, daß es keine Punktfolgen von Δ_3^0 wesentlich enthält[19]).

(5) Wir setzen die Gültigkeit unserer Behauptung für jeden Wert $< \tau$ (τ beliebig) voraus.

1. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem τ einen unmittelbaren Vorgänger hat. Läßt sich die Zahl τ nicht in der Form $\chi+3n$ darstellen, so bestimmen wir einen Komplex $\Delta_{\tau-1}^0 < \Delta_\tau$ und können laut Annahme (5) eine der Menge $3, 6, \ldots, \ldots, \chi+3n, \ldots$ umkehrbar eindeutig zugeordnete Menge paarweise verschiedener Gebiete der Menge $\overline{\Pi}^*$, die unserer Behauptung (3) in bezug auf die Zahl $\tau-1$ (und den Komplex $\Delta_{\tau-1}$) genügt, bestimmen. Dieselbe Gebietsmenge genügt aber unserem Satz auch in bezug auf die Zahl τ selbst. Hat dagegen die Zahl $\tau > 6$ die Form $\chi+3n$, so existiert jedenfalls eine Zahl $\tau-3$ und wir können die Komplexe $\Delta_{\tau-3}^0 < \Delta_{\tau-1}^0 < \Delta_\tau$ bestimmen. Laut Annahme (5) können wir der Menge aller Zahlen $\leqq \tau-3$ von der Form $\chi+3n$

$$3, 6, \ldots, \ldots, \chi+3n, \ldots$$

eine Menge paarweise verschiedener Gebiete aus $\overline{\Pi}^*$

$$\mathfrak{y}_3, \mathfrak{y}_6, \ldots, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi+3n}, \ldots$$

so zuzuordnen, daß jedes Gebiet dieser Menge mindestens eine α-Punktfolge wesentlich enthält, die dem Komplex $\Delta_{\tau-3}^0$ angehört und die in keinem nachfolgenden Gebiet dieser Menge wesentlich enthalten ist. Nach dem Satz XII können wir im Komplex $\Delta_{\tau-1}^0$ eine solche α-Punktfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ bestimmen, die in $\Delta_{\tau-3}^0$ nicht enthalten ist, und darnach existiert auch ein Gebiet $\mathfrak{y}$ von $\overline{\Pi}^*$, das $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, aber keine Punktfolge von $\Delta_{\tau-3}^0$ wesentlich enthält (wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ in $\Delta_{\tau-3}$ oder in $L^*(\Delta_{\tau-3})$ enthalten sein). Das Gebiet $\mathfrak{y}$ ordnen wir der Zahl τ zu und bezeichnen es mit $\mathfrak{y}_\tau$. Die Menge

$$\mathfrak{y}_3, \mathfrak{y}_6, \ldots, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi+3n}, \ldots, \ldots, \mathfrak{y}_\tau$$

genügt im betrachteten Fall unserer Behauptung (3) bzw. unserem Satz.

---

[19]) Hier wie auch weiter müssen wir die Beziehung $L^*(\Delta_\varrho^0) = 0$ für einen Komplex beliebiger Ordnung in Betracht ziehen [vgl. (5), § 6].

2. Wir betrachten jetzt den Fall, in dem τ eine Limeszahl ist. Mit

(6) $$\varDelta_{\sigma_1} \subset \varDelta_{\sigma_2} \subset \ldots, \ldots \subset \varDelta_{\sigma_\lambda} \subset \ldots \qquad (\sigma_\lambda > 1)$$

bezeichnen wir (vgl. Folgerung 1, § 7) die Grundmenge des Komplexes $\varDelta_\tau$. In bezug auf jede Zahl $\eta < \tau$ der Menge (2) definieren wir einen Komplex $\varDelta_{\sigma_\lambda}$ der Grundmenge (6) von $\varDelta_\tau$ als ***speziell anliegend,*** falls er einer der folgenden Bedingungen genügt:

1) Existiert kein Komplex $\varDelta_\eta$ von der Ordnung η der Grundmenge (6) von $\varDelta_\tau$, so ist $\varDelta_{\sigma_\lambda}$ der in bezug auf η anliegende Komplex der Menge (6)[20]).

2) Existiert ein Komplex $\varDelta_\eta$ der Grundmenge (6) von $\varDelta_\tau$ von der Ordnung η, so ist $\varDelta_{\sigma_\lambda}$ der in bezug auf die Zahl $(\eta + 2)$ anliegende Komplex der Grundmenge von $\varDelta_\tau$.

Die Gesamtheit aller auf diese Weise als speziell anliegend definierten Komplexe der Menge (6) bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}(\varDelta_{\sigma_\lambda})$. Die Gesamtheit aller paarweise verschiedenen Zahlen der Menge (2), in bezug auf welche ein und derselbe Komplex $\varDelta_{\sigma_\lambda}$ von einer festen Ordnung σ_λ speziell anliegend ist, bezeichnen wir (für jedes σ_λ) mit $M_{\sigma_\lambda}(\eta)$.

Eine beliebige Zahl $\eta < \tau$ der Menge (2) ist in mindestens einer und nur einer Menge $M_{\sigma_\lambda}(\eta)$ enthalten.

In bezug auf jeden Komplex $\varDelta_{\sigma_\lambda}$ der Menge $\mathfrak{M}(\varDelta_{\sigma_\lambda})$ unterscheiden wir zwei Fälle:

(a) Es existiert ein Komplex $\varDelta^0_{\sigma_\lambda - 1} \subset \varDelta_{\sigma_\lambda}$ der Grundmenge (6) von $\varDelta_\tau$.

(b) Die Bedingung (a) ist nicht erfüllt.

(7) Ist η eine feste Zahl von $M_{\sigma_\lambda}(\eta)$ (σ_λ fest), so können wir nach 1) und 2) schließen, daß im Falle (a) ein Komplex $\varDelta_\eta$ der Grundmenge (6) von der Ordnung η existieren muß und darnach muß auch nach 2) $\sigma_\lambda - 1 = \eta + 2$ sein.

Wegen (7) enthält die Menge $M_{\sigma_\lambda}(\eta)$ im betrachteten Fall (a) nur die einzige Zahl η.

Je nachdem in bezug auf die Zahl σ_λ die Bedingung (a) oder (b) erfüllt ist, legen wir folgendes fest:

($\bar{\text{a}}$) Im Falle (a) bestimmen wir nach dem Satz XII eine α-Punktfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ des Komplexes $\varDelta_{\sigma_\lambda}$, die im Komplex $\varDelta^0_{\sigma_\lambda - 3}$ ($\sigma_\lambda - 3 = \eta$) der Grundmenge (6) nicht enthalten ist, und geben uns ein die Punktfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ wesentlich enthaltendes Gebiet $\mathfrak{y}$ der Menge $\overline{\Pi}^*$ so an, daß in $\mathfrak{y}$ keine Punktfolge von $\varDelta^0_{\sigma_\lambda - 3}$ wesentlich enthalten ist. Dieses Ge-

[20]) Vgl. Hilfssatz 4. Nach diesem Satz hat der Index σ_λ immer einen Vorgänger. Nach der Folgerung 1, § 7 gibt es in bezug auf jede Zahl η nur einen einzigen anliegenden Komplex.

biet $\mathfrak{y}$ ordnen wir der einzigen Zahl η, aus welcher die Menge $M_{\sigma_\lambda}(\eta)$ besteht, zu und bezeichnen $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{y}_\eta$.

($\bar{\text{b}}$) Im Falle (b) existiert ein in der Grundmenge von $\varDelta_\tau$ nicht enthaltener Komplex $\varDelta^0_{\sigma_\lambda - 1} \subset \varDelta_{\sigma_\lambda}$. Die Gesamtheit aller Zahlen $\leqq \sigma_\lambda - 1$ der Menge (2) schreiben wir der Größe nach geordnet wie folgt:

$$(8) \qquad 3, 6, \ldots, \ldots, (\chi + 3n)', \ldots$$

und bestimmen laut Annahme (5) eine der Menge (8) umkehrbar eindeutig zugeordnete Menge paarweise verschiedener Teilgebiete von $\overline{\Pi}^*$

$$(9) \qquad \mathfrak{y}^*_3, \mathfrak{y}^*_6, \ldots, \ldots, \mathfrak{y}^*_{(\chi+3n)'}, \ldots$$

so, daß jedes Gebiet $\mathfrak{y}^*_{(\chi+3n)'}$ mindestens eine α-Punktfolge von $\varDelta_{\sigma_\lambda - 1}$ wesentlich enthält, die in keinem der nachfolgenden Gebiete von (9) wesentlich enthalten ist. Bezeichnen wir für jedes $(\chi + 3n)'$ eine solche α-Punktfolge mit $(P)_{(\chi+3n)'}$, so bemerken wir, daß keine einzige dieser Punktfolgen in einem Komplex $\varDelta^0_{\sigma'_\lambda} \subset \varDelta_{\sigma_\lambda}$ $(\sigma'_\lambda < \sigma_\lambda)$ der Grundmenge (6) von $\varDelta_\tau$ enthalten ist.

Da wegen (b) $\sigma'_\lambda < \sigma_\lambda - 1$ ist, so muß nach Satz V $\varDelta^0_{\sigma'_\lambda} \cdot \varDelta_{\sigma_\lambda - 1} = 0$ sein: sonst wäre $\varDelta^0_{\sigma'_\lambda} \subset \varDelta_{\sigma_\lambda - 1}$ und der Komplex $\varDelta_{\sigma_\lambda - 1}$ müßte entgegen unserer Voraussetzung in der Grundmenge von $\varDelta_\tau$ enthalten sein. — Wir können also in jedem Gebiet $\mathfrak{y}_{(\chi+3n)'}$ der Menge (9) ein Teilgebiet $\mathfrak{y}^{**}_{(\chi+3n)'} \subset \mathfrak{y}^*_{(\chi+3n)'}$ bestimmen, welches keine Punktfolge eines Komplexes $\varDelta^0_{\sigma'_\lambda}$,[20a]) andererseits aber die Punktfolge $(P)_{(\chi+3n)'}$ wesentlich enthält. Die so definierte Menge $\mathfrak{y}^{**}_3, \mathfrak{y}^{**}_6, \ldots, \ldots, \mathfrak{y}^{**}_{(\chi+3n)'}, \ldots$ besteht ebenfalls aus paarweise verschiedenen Gebieten. Jeder Zahl η der Menge $M_{\sigma_\lambda}(\eta)$ ordnen wir nun dasjenige Gebiet $\mathfrak{y}^{**}_{(\chi+3n)'}$ zu, welches den Index $(\chi + 3n)' = \eta$ hat, und bezeichnen $\mathfrak{y}^{**}_{(\chi+3n)'}$ mit $\mathfrak{y}_\eta$.

Nach ($\bar{\text{a}}$) oder ($\bar{\text{b}}$) wird jeder Zahl η der Menge (2) in umkehrbar eindeutiger Weise ein Teilgebiet $\mathfrak{y}_\eta$ zugeordnet. Wir behaupten nämlich, die Menge

$$\mathfrak{y}_3, \mathfrak{y}_6, \ldots, \ldots, \mathfrak{y}_{\chi+3n}, \ldots$$

genügt unserer Forderung im Falle einer Limeszahl τ. In der Tat: sind η und ϑ zwei verschiedene Zahlen der Menge (2), z. B. $\vartheta > \eta$, und bezeichnen wir mit $\varDelta_{\bar{\sigma}_\lambda}$ und $\varDelta_{\bar{\bar{\sigma}}_\lambda}$ die in bezug auf η und ϑ speziell anliegende Komplexe der Grundmenge von $\varDelta_\tau$, so können (der Fall $\bar{\bar{\sigma}}_\lambda < \bar{\sigma}_\lambda$ ist offenbar unmöglich) wir die beiden Fälle $\bar{\bar{\sigma}}_\lambda = \bar{\sigma}_\lambda$ und $\bar{\sigma}_\lambda < \bar{\bar{\sigma}}_\lambda$ unterscheiden. — Nach ($\bar{\text{a}}$) oder ($\bar{\text{b}}$) enthält das Teilgebiet $\mathfrak{y}_\eta$ mindestens eine α-Punktfolge des Komplexes $\varDelta_{\bar{\sigma}_\lambda}$ und $\mathfrak{y}_\vartheta$ mindestens eine α-Punktfolge von $\varDelta_{\bar{\bar{\sigma}}_\lambda}$. Ist

[20a]) Da kein Komplex der Grundmenge (6) die Ordnung $\sigma_\lambda - 1$ hat, so müssen sämtliche Komplexe $\varDelta\, \sigma'_\lambda$ $(\sigma'_\lambda < \sigma_{\lambda-1})$ der Grundmenge (6) in einem **letzten** Komplex der Grundmenge von einer Ordnung $< \sigma_\lambda - 1$ enthalten sein.

$\bar{\sigma}_\lambda = \bar{\bar{\sigma}}_\lambda$, so sind die beiden Zahlen η und ϑ in einer und derselben Menge $M_{\sigma_\lambda}(\eta)$ enthalten und nach ($\bar{\text{b}}$) werden den beiden Zahlen zwei verschiedene Gebiete $\mathfrak{y}_\eta$ und $\mathfrak{y}_\vartheta$ zugeordnet, wobei mindestens eine α-Punktfolge von $\mathfrak{y}_\eta$ in $\mathfrak{y}_\vartheta$ nicht enthalten ist. Ist dagegen $\bar{\sigma}_\lambda < \bar{\bar{\sigma}}_\lambda$, so existiert, falls in bezug auf ϑ die Bedingung (a) erfüllt ist, ein Komplex $\Delta_\vartheta > \Delta^0_{\bar{\sigma}_\lambda}$ und nach ($\bar{\text{a}}$) enthält das Gebiet $\mathfrak{y}_\eta$ mindestens eine α-Punktfolge des Komplexes Δ^0_ϑ, die in $\mathfrak{y}_\vartheta$ nicht enthalten ist. — Ist in bezug auf ϑ die Bedingung (b) erfüllt, so folgt aus dem Obigen (vgl. ($\bar{\text{b}}$)), daß auch in diesem Fall eine α-Punktfolge von $\mathfrak{y}_\eta$ in $\mathfrak{y}_\vartheta$ nicht enthalten ist. Damit ist die Gültigkeit unseres Satzes für den Fall einer Limeszahl erwiesen.

Aus dem Satz XIII ergibt sich unmittelbar der

Satz XIV. *Die Ordnung eines beliebigen Gebietes $\mathfrak{G}$ kann höchstens $\leqq \Omega$ sein, wobei Ω die Anfangszahl der dritten Zahlenklasse ist.*

§ 13.

Die Unteilbarkeitseigenschaften der Primenden.

Zwischen der Definition der wohldefinierten Punktfolgen und dem Begriff des *Einschnittes* (vgl. Carathéodory) eines beliebigen Gebietes $\mathfrak{G}$ besteht ein unmittelbarer einfacher Zusammenhang. Unter einem Einschnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$ verstehen wir einen Weg, der mit Ausnahme eines auf dem Gebietsrande liegenden Endpunkts ganz im Innern des Gebietes $\mathfrak{G}$ verläuft. —

(1) Wir wollen uns zunächst überzeugen, daß *jede auf einem Einschnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$ liegende wohldefinierte Punktfolge eine α-Punktfolge ist.*

Es sei ξ der auf dem Gebietsrande liegende Endpunkt des Einschnittes t und $\{K_\nu\}$ eine konzentrische gegen ξ konvergierende Folge von Kugeln. Der Durchschnitt $K_\nu \cdot t$ (für jedes beliebige ν) ist abgeschlossen und genügt der Beziehung $d(K_\nu \cdot t, \Gamma) \neq 0$. Es sei $\overline{AB}$ ein umkehrbar eindeutiges Streckenbild des Einschnittes t so, daß der Punkt A dem Punkt ξ entspricht. Das Urbild einer beliebigen Teilstrecke von $\overline{AB}$, die den Punkt A, aber keinen Bildpunkt von $K_\nu \cdot t$ (ν beliebig und fest) enthält, verläuft ganz innerhalb der durch K_ν bestimmten Umgebung des Punktes ξ und enthält sämtliche auf t liegende wohldefinierte Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$. Damit ist gezeigt, daß für jedes noch so große ν jede auf t liegende wohldefinierte Punktfolge wesentlich in einem durch den Schnitt $K_\nu \cdot \mathfrak{G}$ bestimmten Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ liegen muß. —

Einen Querschnitt q des Gebietes $\mathfrak{G}$ nennen wir *einfach*, falls er folgender Bedingung genügt: jede auf dem Querschnitt liegende und gegen einen Randpunkt ξ konvergierende Punktfolge enthält eine auf einem Ein-

schnitt des Gebietes liegende Teilfolge[21]). Eine Kette von einfachen Querschnitten, deren abgeschlossene Hüllen *paarweise zueinander fremd* sind, nennen wir eine *einfache Querschnittkette.* Ein durch eine einfache Querschnittkette bestimmtes Ende nennen wir entsprechend ein *einfaches Ende.* Zu den einfachen Enden gehören in erster Linie die Carathéodoryschen Enden. Zwischen einfachen Enden und der Teilbarkeit der Primenden besteht ein enger Zusammenhang, der sich darin äußert, daß ein Primende keine einfachen Teiler hat, gegen welche nur ein Teil der Punktfolgen eines Komplexes erster Ordnung oder eines nicht abgeschlossenen Komplexes zweiter Ordnung konvergiert.

Hilfssatz 9. *Es sei ein beliebiges durch die Gebietskette*

$$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$$

bestimmtes einfaches Ende $\mathfrak{E}_\mathfrak{g}$ *und eine beliebige* β*-Punktfolge*

$$(2) \qquad O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$$

des Gebietes $\mathfrak{G}$ *gegeben. Läßt sich in jedem Gebiet* $\mathfrak{g}_n$ *eine beliebige zu der Punktfolge* (2) *konjugierte Punktfolge bestimmen, so konvergiert die Punktfolge* (2) *gegen* $\mathfrak{E}_\mathfrak{g}$.

Es sei $\mathfrak{S}_n$ ein ausgezeichnetes Streckenzugsystem, welches die Punktfolge (2) mit einer zu ihr konjugierten Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{g}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ verbindet. Auf dem das Gebiet $\mathfrak{g}_n$ bestimmten einfachen Querschnitt kann keine β-Punktfolge liegen, woraus folgt, daß ein solcher Querschnitt nur von endlich vielen Streckenzügen des Systems $\mathfrak{S}_n$ getroffen werden kann. Fast alle Punkte der Folge (2) müssen darnach für jedes n in $\mathfrak{g}_n$ liegen.

Satz XV. *Konvergiert irgendeine Punktfolge* $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ *eines abgeschlossenen Komplexes* Δ_1^0 *oder eines nicht abgeschlossenen Komplexes* Δ_2 *gegen ein einfaches Ende* $\mathfrak{E}_\mathfrak{g}$, *so konvergiert auch* j e d e *Punktfolge von* Δ_1^0 *bzw.* Δ_2 *gegen* $\mathfrak{E}_\mathfrak{g}$.

Es seien

$$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$$

bzw.

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n, \ldots$$

die das einfache Ende $\mathfrak{E}_\mathfrak{g}$ bestimmenden Gebiets- bzw. Querschnittketten. Wir betrachten zunächst den Fall des Komplexes Δ_1^0. Enthält Δ_1 keine β-Punktfolge, so gilt die Beziehung $\Delta_1^0 = \mathfrak{P}_f$, wobei $\mathfrak{P}_f$ eine nur α-Punktfolgen enthaltende unbewallte f-Gesamtheit ist. Die Gültigkeit unserer Be-

---

[21]) Nach (1) sind einfache Querschnitte solche, die keine β-Punktfolgen enthalten. Die Randpunkte eines einfachen Querschnittes sind (nach der Definition) jedenfalls erreichbare Punkte.

hauptung in diesem Falle ist infolge der Beziehung $q_\nu^0 \cdot q_{\nu+1}^0 = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ohne weiteres ersichtlich.

Enthält Δ_1^0 auch β-Punktfolgen, so bezeichnen wir mit $M(\Delta)$ die Grundmenge von Δ_1. — Es ist besonders bemerkenswert, daß ein einfaches Ende in bezug auf eine konjugierte f-Menge bzw. einen Komplex erster Ordnung manche ähnliche Eigenschaften aufweist wie ein in bezug auf einen beliebigen (abgeschlossenen) Komplex nach dem Verfahren des § 11 konstruiertes einschließendes Ende. —

Aus der Beziehung $q_\nu^0 \cdot q_{\nu+1}^0 = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ können wir nämlich leicht die folgenden Schlüsse ziehen.

(3) Liegt eine Teilfolge einer Punktfolge von $L^*(\Delta)$ $(\Delta \varepsilon M(\Delta))$ oder von $L^*(\Delta_1)$ wesentlich außerhalb eines Gebietes $\mathfrak{g}_\nu^0$, so liegt wesentlich außerhalb $\mathfrak{g}_{\nu+1}^0$ auch eine Punktfolge von Δ bzw. von Δ_1.

(4) Liegt die konjugierte f-Menge Δ oder der Komplex Δ_1 erster Ordnung selbst wesentlich außerhalb eines Gebietes $\mathfrak{g}_\nu^0$, so liegt Δ^0 bzw. Δ_1^0 wesentlich außerhalb $\mathfrak{g}_{\nu+1}^0$.

(5) Ähnlich wie im Hilfssatz 9 können wir noch schließen, daß eine konjugierte f-Menge $\Delta \varepsilon M(\Delta)$, deren eine Punktfolge wesentlich außerhalb eines Gebietes $\mathfrak{g}_\nu^0$ liegt, selbst wesentlich außerhalb $\mathfrak{g}_\nu^0$ liegen muß. Darnach muß die abgeschlossene konjugierte f-Menge Δ^0 nach (4) wesentlich außerhalb $\mathfrak{g}_{\nu+2}^0$ liegen, falls eine ihrer Punktfolgen wesentlich außerhalb $\mathfrak{g}_\nu^0$ liegt.

Nehmen wir nun an, die Beziehung $\Delta_1^0 \subset f(\mathfrak{E}_g)$ sei nicht erfüllt. Darnach liegt eine Teilfolge einer Punktfolge von Δ_1^0 wesentlich außerhalb eines ersten Gebietes $\mathfrak{g}_\mu$ $(\nu = \mu)$. Diese Teilfolge ist selbst eine Punktfolge von Δ_1^0 und wir können aus (3) folgern, daß eine Punktfolge von Δ_1 wesentlich außerhalb $\mathfrak{g}_{\mu+1}^0$ liegt. — Aus (5) und der Folgerung (1) aus der Definition A können wir folgern, daß mindestens je eine Punktfolge einer jeden abgeschlossenen konjugierten f-Menge von $M(\Delta^0)$ wesentlich außerhalb $\mathfrak{g}_{\mu+3}^0$ liegt.

Berücksichtigen wir nochmals (5), so können wir folgern, daß Δ_1 wesentlich außerhalb $\mathfrak{g}_{\mu+5}^0$ liegen muß. Aus (4) folgt nun die Beziehung $\Delta_1^0 \cdot f(\mathfrak{E}_g) = 0$, die offenbar unmöglich ist. — Damit ist unsere Behauptung für den Fall eines Komplexes Δ_1^0 erster Ordnung nachgewiesen.

Nach dem Erzeugungsprozeß der Komplexe (Satz IV) können wir von einem beliebigen Komplex $\Delta_1^0 \subset \Delta_2$ ausgehend den Komplex Δ_2 in der Form darstellen

$$\Delta_2 = \Delta_1^0 \dotplus V(M({}_1\Delta_1^0)) \dotplus \cdots \dotplus V(M({}_n\Delta_1^0)) \dotplus \cdots,$$

wobei mit $M({}_1\Delta_1^0)$ die Gesamtheit der zu Δ_1^0 und allgemein mit $M({}_n\Delta_1^0)$ die Gesamtheit der zu irgendeinem der Komplexe von $M({}_{n-1}\Delta_1^0)$ benach-

barten Komplexe erster Ordnung bezeichnet wird. Die Gültigkeit unserer Behauptung für den Fall eines nicht abgeschlossenen Komplexes Δ_2 zweiter Ordnung können wir laut dieses Erzeugungsprinzips aus ihrer Gültigkeit für den Fall eines abgeschlossenen Komplexes erster Ordnung mit Hilfe des Induktionsschlusses folgern.

§ 14.
Der Identitätsbeweis im Falle einfach zusammenhängender ebener Gebiete.

Wir wollen jetzt eine Reihe von Behauptungen beweisen, aus welchen sich die Identität der Primenden eines einfach zusammenhängenden Gebietes in der Ebene mit den Primenden (solcher Gebiete) im Sinne von Carathéodory ergibt. — Ein beliebiges einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_e$. Ein Primende eines Gebietes $\mathfrak{G}_e$ im Sinne von Carathéodory bezeichnen wir mit E_8. Unter einer Querschnitt- bzw. Gebietskette, die das Primende E_8 bestimmen, verstehen wir immer die Querschnitt- bzw. Gebietskette im Sinne von Carathéodory. Die Begriffe eines erreichbaren Punktes des Primendes E_8, eines gegen E_8 konvergierenden Einschnittes, wie auch die Unterscheidung der vier Primendenarten verstehen wir ebenfalls im Sinne von Carathéodory.

I. *Der Häufungspunkt ξ einer gegen ein Primende E_8 konvergierenden α-Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}_e$*

$$(1) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \to \xi$$

ist ein erreichbarer Punkt von E_8.

Eine Folge konzentrischer Kreise $\{K_\nu\}$ mit dem Mittelpunkt ξ bestimmt eine Folge von Teilgebieten des Gebietes $\mathfrak{G}_e$

$$(2) \qquad \mathfrak{h}', \mathfrak{h}'', \ldots, \mathfrak{h}^{(\nu)}, \ldots$$

so, daß jedes durch K_ν bestimmte Teilgebiet $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ wesentlich die Punktfolge (1) enthält. Den $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ bestimmenden Teilschnitt bezeichnen wir mit $\psi^{(\nu)}$ und wählen auf ihm einen beliebigen Punkt $x^{(\nu)}$. Der Punkt $x^{(\nu)}$ liegt offenbar auf einem gewissen Querschnitt $q_\nu \subset \psi^{(\nu)}$ des Gebietes $\mathfrak{G}_e$, welcher ein Teilgebiet $\mathfrak{g}_\nu \supset \mathfrak{h}^{(\nu)}$ bestimmt. Aus der Beziehung $\mathfrak{h}^{(\nu)} \supset \mathfrak{h}^{(\nu+1)0} \cdot \mathfrak{G}_e$ folgt $\psi^{(\nu+1)} \subset \mathfrak{g}_\nu$, woraus wir schließen können, daß $q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \ldots$ eine Querschnittkette ist, die das Primende E_8 bestimmt. Nun verbinden wir einen Punkt $x_1 \subset q_1$ mit einem Punkt $x_2 \subset q_2$ durch einen Streckenzug s_1, der mit Ausnahme des Punktes x_1 ganz in $\mathfrak{h}'$, aber nicht in $\mathfrak{h}''$ verläuft, und allgemein den Punkt $x_\nu \subset q_\nu$ $(\nu \geqq 2)$ verbinden wir mit einem Punkt $x_{\nu+1} \subset q_{\nu+1}$ durch einen Streckenzug s_ν, der mit Ausnahme des Punktes x_ν ganz in $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ verläuft und keinen Punkt von $\mathfrak{h}^{(\nu+1)}$ trifft. Wegen der Be-

ziehung $\mathfrak{h}^{(\nu)} \subset \mathfrak{g}_\nu$ verläuft der Streckenzug s_ν ganz innerhalb $\mathfrak{g}_\nu$; andererseits liegt $s_{\nu-1}$ außerhalb $\mathfrak{g}_\nu$. Die abgeschlossene Summe $(s_1+s_2+\ldots+s_\nu+\ldots)^0=s$ ist ein gegen E_8 konvergierender Einschnitt des Gebietes $\mathfrak{G}_e$. Der Punkt ξ ist darnach ein erreichbarer Punkt von E_8.

Aus I erhalten wir unmittelbar die

Folgerung. Eine α-Punktfolge des Gebietes $\mathfrak{G}_e$ konvergiert niemals gegen ein Primende E_8 dritter oder vierter Art.

II. *Es sei*

(3) $$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \to \xi$$

eine α-Punktfolge der normierten f-Menge $f(E_8)$ eines Primendes E_8 erster oder zweiter Art und $\mathfrak{P}_f$ die in bezug auf (3) *definierte unbewallte f-Gesamtheit. Wir behaupten:*

a) *Jede Punktfolge von $\mathfrak{P}_f$ ist in $f(E_8)$ enthalten.*

b) *Jede gegen E_8 konvergierende α-Punktfolge ist in $\mathfrak{P}_f$ enthalten.*

Nach I ist der Häufungspunkt ξ der Punktfolge (3) ein erreichbarer Punkt von E_8. Es sei $\{K_\nu\}$ die Folge konzentrischer Kreislinien mit dem Mittelpunkt ξ, welcher die E_8 bestimmende Querschnittkette untergeordnet ist. Jeder Schnitt $K_\nu \cdot \mathfrak{G}_e$ bestimmt ein Teilgebiet $\mathfrak{h}^{(\nu)}$, welches (nach (4) § 4) wesentlich $\mathfrak{P}_f$ enthält. Das die Punktfolge (3) wesentlich enthaltende Gebiet $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ muß in dem Gebiet $\mathfrak{g}_\nu$ ($\mathfrak{g}_\nu$ das durch $\mathfrak{q}_\nu$ bestimmte Teilgebiet der E_8 bestimmenden Gebietskette) enthalten sein. Damit ist die Behauptung II a) bestätigt.

Wir wollen jetzt die Behauptung II b) nachweisen. Nehmen wir an, es existiere eine gegen E_8 konvergierende α-Punktfolge

(4) $$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots,$$

die in $\mathfrak{P}_f$ nicht enthalten ist. — Zunächst bemerken wir, daß die Punktfolge (4) gegen ξ konvergieren muß, sonst müßte es nach I mindestens zwei erreichbare Punkte von E_8 geben. Wir können nun einen hinreichend kleinen Kreis K_μ ($\nu=\mu$) so angeben, daß die Punktfolge (4) in einem durch K_μ bestimmten und von $\mathfrak{h}^{(\mu)}$ verschiedenen Teilgebiet $\mathfrak{h}^{(\mu)'}$ wesentlich enthalten ist. Einen Punkt x' der Berandung von $\mathfrak{h}^{(\mu)'}$ innerhalb $\mathfrak{G}_e$ verbinden wir durch einen Streckenzug $s \subset \mathfrak{G}_e$ mit einem beliebigen außerhalb $\mathfrak{g}_1^0$ liegenden Punkt O von $\mathfrak{G}_e$. Wir bestimmen jetzt eine hinreichend große Zahl $n=\mu_1>\mu$ so, daß der Querschnitt q_{μ_1} den Streckenzug s in keinem einzigen Punkt trifft. Da $\mathfrak{h}^{(\mu_1)}$ in $\mathfrak{g}^{(\mu)}$ bzw. in $\mathfrak{h}^{(\mu)}$ enthalten ist, muß der Querschnitt q_{μ_1} ganz in $\mathfrak{h}^{(\mu)}$ liegen und trifft keinen einzigen Punkt des Gebietes $\mathfrak{h}^{(\mu)'}$. Jeden fast aller Punkte von (4) können wir mit dem Punkt x' durch einen Streckenzug so verbinden, daß dieser letztere mit Ausnahme des Punktes x' ganz in $\mathfrak{h}^{(\mu)'}$ verläuft. Fast alle

Punkte der Folge (4) liegen außerhalb $\mathfrak{g}_{\mu_1}$, was unserer Annahme widerspricht.

III. *Es sei $f'(E_\mathfrak{g})$ eine beliebige f-Menge, die in der normierten f-Menge $f(E_\mathfrak{g})$ eines Primendes $E_\mathfrak{g}$ enthalten ist. Wir behaupten, eine α-Punktfolge*

$$(5) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \to \xi,$$

die in $L^*(f'(E_\mathfrak{g}))$ enthalten ist, ist auch in $f(E_\mathfrak{g})$ enthalten.

Die Folge konzentrischer Kreislinien $\{K_\nu\}$ mit dem Mittelpunkt ξ bestimmt eine Folge von Teilgebieten

$$(6) \qquad \mathfrak{h}', \mathfrak{h}'', \ldots, \mathfrak{h}^{(\nu)}, \ldots$$

so, daß für jedes ν in $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ die Punktfolge (5) wesentlich enthalten ist. In jedem Gebiet $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ für ein noch so großes ν ist mindestens eine Punktfolge von $f'(E_\mathfrak{g})$ wesentlich enthalten. Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ bzw. $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$ die das Primende $E_\mathfrak{g}$ bestimmenden Querschnitts- bzw. Gebietsketten. Ist in $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ für ein beliebiges festes ν kein Punkt eines Querschnittes q_n (n fest) enthalten, so muß $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ in $\mathfrak{g}_n$ enthalten sein (da der Durchschnitt $\mathfrak{g}_n \cdot \mathfrak{h}^{(\nu)}$ nicht leer ist). Hätten unendlich viele Querschnitte der Kette $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ keine gemeinsame Punkte mit $\mathfrak{h}^{(\nu)}$, so müßte $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ in unendlich vielen Gebieten der Kette $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$ enthalten sein, was offenbar unmöglich ist. Haben nun fast alle Querschnitte der Kette $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ gemeinsame Punkte mit $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ für jedes noch so großes ν, so können wir eine der Folge (6) und einer Teilfolge der Kette $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ untergeordnete Punktfolge

$$(7) \qquad R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$$

bestimmen. Die Punktfolge (7) ist nach (6) § 4 eine α-Punktfolge und konvergiert gegen $E_\mathfrak{g}$. Nach der Folgerung aus I ist $E_\mathfrak{g}$ ein Primende erster oder zweiter Art. Ist $\mathfrak{P}_f$ die in bezug auf die Folge (7) definierte unbewallte f-Gesamtheit, so folgt aus (6) § 4 ebenfalls, daß die Punktfolge (5) in $\mathfrak{P}_f$ enthalten ist. Aus II können wir schließen, daß (5) gegen $E_\mathfrak{g}$ konvergiert.

IV. *Es sei $f'(E_\mathfrak{g})$ eine Teilmenge der normierten f-Menge eines beliebigen Primendes $E_\mathfrak{g}$ des Gebietes $\mathfrak{G}_e$. Wir behaupten, es ist immer $L_\beta(f'(E_\mathfrak{g})) = 0$.*

Es sei $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ die das Primende $E_\mathfrak{g}$ bestimmende Querschnittkette, die einer Folge konzentrischer gegen einen Punkt konvergierender Kreise untergeordnet ist. Die entsprechende Gebietskette sei $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$. Nehmen wir an, es existiere eine unbewallte β-Grenzpunktfolge

$$(8) \qquad R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots \to \xi$$

der Menge $f'(E_8)$. Ein hinreichend kleiner Kreis K^* mit dem Mittelpunkt ξ und dem Radius r^* bestimmt in seinem Inneren eine unendliche Folge verschiedener Teilgebiete, welcher eine unendliche Teilfolge der Folge (8) untergeordnet ist, wobei fast jedes der Teilgebiete eine Punktfolge von $f'(\mathfrak{E}_8)$ wesentlich enthält. Es sei $\mathfrak{h}^*$ ein durch K^* bestimmtes Gebiet, welches einen Punkt R^* der Folge (8) und fast alle Punkte

$$(9) \qquad P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*, \ldots$$

einer Punktfolge von $f'(E_8)$ enthält. Ein zu K^* konzentrischer Kreis K^{**} mit dem Radius $r^{**} = \frac{1}{2} r^*$ bestimmt in seinem Inneren wiederum ein Teilgebiet $\mathfrak{h}^{**}$, das fast alle Punkte

$$(10) \qquad P_1^{**}, P_2^{**}, \ldots, P_n^{**}, \ldots$$

einer Punktfolge von $f'(E_8)$ und einen von R^* verschiedenen Punkt R^{**} der Folge (8) enthält und das in einem zu $\mathfrak{h}^*$ fremden durch $K^* \cdot \mathfrak{G}_e$ bestimmten Teilgebiet enthalten ist. Das Gebiet $\mathfrak{h}^{**}$ genügt also der Beziehung

$$(11) \qquad (\mathfrak{h}^{**0} \cdot \mathfrak{G}_e) \cdot \mathfrak{h}^* = 0.$$

Es seien φ^* bzw. φ^{**} die Teilschnitte, die $\mathfrak{h}^*$ bzw. $\mathfrak{h}^{**}$ bestimmen. Einen Punkt O des Gebietes $\mathfrak{G}_e$, der außerhalb $\mathfrak{g}_1$ liegt, verbinden wir durch einen Streckenzug $s^* \subset \mathfrak{G}_e$ mit einem Punkt $J^* \subset \varphi^*$ und durch einen Streckenzug $s^{**} \subset \mathfrak{G}_e$ mit einem Punkt $J^{**} \subset \varphi^{**}$. Den Punkt J^* verbinden wir mit jedem Punkt P_n^* der Folge (9) durch einen Streckenzug $s_n^* \subset \mathfrak{h}^{*0} \cdot \mathfrak{G}$. Den Punkt J^{**} verbinden wir durch je einen Streckenzug $s_n^{**} \subset \mathfrak{h}^{**0} \cdot \mathfrak{G}_e$ mit jedem Punkt P_n^{**} der Folge (10). Nun können wir $n = \mu$ so groß wählen, daß ein Querschnitt $q_{\mu+n}$ (n beliebig) weder s^* noch s^{**} trifft. Da die beiden Punktfolgen (9) und (10) wesentlich in $\mathfrak{g}_{\mu+n}$, der Punkt O aber außerhalb $\mathfrak{g}_{\mu+n}$ liegt, so muß der Querschnitt $q_{\mu+n}$ für jedes n fast alle Streckenzüge der Folge $s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*, \ldots$ innerhalb h^* und fast alle Streckenzüge der Folge $s_1^{**}, s_2^{**}, \ldots, s_n^{**}, \ldots$ innerhalb $\mathfrak{h}^{**}$ treffen. Dies ist wegen (11) offenbar unmöglich, da die Beziehung gilt $d(\varphi^*, \varphi^{**}) \geqq \frac{1}{2} r^*$, während von einem ersten hinreichend großen n ab der Durchmesser des Querschnittes $q_{\mu+n}$ kleiner als $\frac{1}{2} r^*$ ist.

V. *Es sei*

$$(12) \qquad O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$$

eine beliebige normierte β-Punktfolge von $f(E_8)$ (E_8 Primende zweiter Art) und Δ_1 ein die Folge (12) *enthaltender Komplex erster Ordnung. $\mathfrak{P}_f$ sei die unbewallte Gesamtheit aller gegen E_8 konvergierender α-Punktfolgen. Wir behaupten, es gilt immer die Beziehung*

$$\mathfrak{P}_f \subset \Delta_1^0.$$

Aus dem Satz XV folgern wir zunächst die Beziehung $\Delta_1 < f(\mathfrak{E}_3)$.

(13) Es sei $M(\Delta)$ die Grundmenge des Komplexes Δ_1. Aus IV folgern wir, daß die Punktfolge (12) in einer nicht abgeschlossenen konjugierten f-Menge Δ^* von $M(\Delta)$ enthalten sein muß. Darnach muß auch jede zu einer beliebigen Teilfolge von (12) konjugierte Punktfolge selbst in Δ_1 enthalten sein.

Es sei

(14) $$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

eine beliebige Punktfolge von $\mathfrak{P}_f$. In der Menge $(\mathfrak{g}_{n-1} - \mathfrak{g}_n)$ ($\mathfrak{g}_n$ sei das n-te ($n > 1$) Gebiet der E_3 bestimmenden Gebietskette $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$) sind höchstens endlich viele Punkte der Folge (12) enthalten; die Menge dieser endlich vielen Punkte bezeichnen wir mit (p_n). Jeden Punkt von (p_n) verbinden wir durch einen Streckenzug innerhalb $\mathfrak{g}_{n-1}$ mit einem Punkt der Folge (14) so, daß je zwei verschiedene Punkte von (12) immer mit zwei verschiedenen Punkten der Folge (14) verbunden werden. Auf diese Weise wird die Punktfolge (12) mit einer Teilfolge

(15) $$P'_1, P'_2, \ldots, P'_n, \ldots$$

der Folge (14) durch ein Streckenzugsystem $\mathfrak{S} = \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n, \ldots$ verbunden, wobei $\mathfrak{f}_n$ den Punkt O_n mit dem Punkt P'_n verbindet.

(16) Jede in $\mathfrak{S}$ gegen das Grenzgebilde $T_{\mathfrak{f}}$ von $\mathfrak{S}$ konvergierende Punktfolge konvergiert auch gegen das Primende E_3.

Durch eine Folge konzentrischer Kreise $\{K_\nu\}$, dessen Mittelpunkt der Häufungspunkt von (14) ist, bestimmen wir die Folge von Teilgebieten

(17) $$\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'', \ldots, \mathfrak{h}^{(\nu)}, \ldots$$

so, daß das durch $K_\nu \cdot \mathfrak{G}_e$ bestimmte Teilgebiet $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ wesentlich die Punktfolge (14), aber keine Punkte der Folge (12) enthält.

(18) Wie leicht ersichtlich, gilt die Beziehung $\mathfrak{h}^{(\nu)} > \mathfrak{h}^{(\nu+1)0} \cdot \mathfrak{G}_e$.

Es sei $n = \mu_\nu$ eine erste hinreichend große Zahl, so daß für jedes ν fast alle Punkte $P'_{\mu_\nu}, P'_{\mu_\nu+1}, \ldots, P'_{\mu_\nu+n}, \ldots$ in $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ enthalten sind. Jeden Streckenzug $\mathfrak{f}_{\mu_\nu+n}$ (ν fest, $n = 1, 2, \ldots$) durchlaufen wir in der Richtung $\overrightarrow{O_{\mu_\nu+n} P_{\mu_\nu+n}}$ bis zum *ersten* Schnittpunkt $x_n^{(\nu)}$ mit der Berandung des Teilgebietes $\mathfrak{h}^{(\nu)}$. Den durchlaufenen Teil des Streckenzuges $\mathfrak{f}_{\mu_\nu+n}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}_n^{(\nu)}$. Das Streckenzugsystem $\mathfrak{S}^{(\nu)} = \mathfrak{f}_1^{(\nu)}, \mathfrak{f}_2^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{f}_n^{(\nu)}, \ldots$ hat die Eigenschaft, daß keine in ihm gegen sein Grenzgebilde $T_{\mathfrak{f}^{(\nu)}}$ konvergierende Punktfolge innerhalb $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ (ν beliebig) liegt. Nach (4) § 4 und II ist jede α-Punktfolge von $f(E_3)$ in $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ für ein noch so großes ν enthalten. Nach (16) folgt nun, daß keine α-Punktfolge in $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ gegen $T_{\mathfrak{f}^{(\nu)}}$ konvergiert.

Das Streckenzugsystem $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ ist ausgezeichnet und eine wohldefinierte Teilfolge der Folge

(19) $$x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}, \ldots \subset \mathfrak{h}^{(\nu)0} \cdot \mathfrak{G}_e$$

ist für jedes ν zu einer Teilfolge von (12) konjugiert und nach (13) in Δ_1 enthalten.

Wegen (18) und (19) können wir jeden fast aller Punkte der Folge (15) mit allen Punkten der Folge $x_1^{(\nu+1)}, x_2^{(\nu+1)}, x_n^{(\nu+1)}, \ldots$ innerhalb $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ verbinden. Darnach muß die Punktfolge (15) in Δ_1^0 enthalten sein. Aus (10) § 4 folgt die Beziehung $\mathfrak{P}_f \subset \Delta_1^0$.

VI. *Es sei $\mathfrak{P}_f$ die unbewallte f-Gesamtheit aller gegen ein Primende E_8 erster Art konvergierender α-Punktfolgen. Die normierte Menge $f(E_8)$ ist ein mit $\mathfrak{P}_f$ identischer Komplex erster Ordnung.*

Das Primende E_8 ist ein gewisser Punkt ξ des Randes des Gebietes $\mathfrak{G}_e$ und wird durch eine Gebietskette $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$ bestimmt. Eine Folge konzentrischer Kreise $\{K_\nu\}$ mit dem Mittelpunkt ξ bestimmt eine Gebietsfolge $\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'', \ldots, \mathfrak{h}^{(\nu)}, \ldots$, wobei das durch $K_\nu \cdot \mathfrak{G}_e$ bestimmte Teilgebiet $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ für ein noch so großes ν wesentlich die f-Gesamtheit $\mathfrak{P}_f$ enthält. Für ein noch so großes ν sind fast alle Gebiete der Kette $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$ in $\mathfrak{h}^{(\nu)}$ enthalten. Nach (6) § 4 ist jede Punktfolge von $f(E_8)$ in $\mathfrak{P}_f$ enthalten. Nach der Folgerung 3 der Definition A ist $\mathfrak{P}_f$ ein Komplex erster Ordnung.

VII. *Ist E_8 ein Primende dritter oder vierter Art, so ist $f(E_8)$ eine konjugierte f-Menge und ein Komplex erster Ordnung.*

Es seien

(20) $$P_1', P_2', \ldots, P_n', \ldots$$

und

(21) $$P_1'', P_2'', \ldots, P_n', \ldots$$

zwei beliebige Punktfolgen von $f(E_8)$ und

(22) $$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$$

die E_8 bestimmende Gebietskette. Es sei $\mathfrak{g}_{\mu_1}$ das letzte Gebiet der Kette (22), das den Punkt P_n', und $\mathfrak{g}_{\mu_2}$ das letzte Gebiet der gleichen Kette, das den Punkt P_n'' für ein festes n enthält, wobei wir annehmen, daß P_n' und P_n'' in $\mathfrak{g}_1$ enthalten sind. Die beiden Zahlen μ_1 und μ_2 können gleich oder verschieden sein, und wir nehmen zwischen ihnen eine ganz beliebige Beziehung, z. B. $\mu_1 \geqq \mu_2$ an. Wir verbinden die beiden Punkte P_n' und P_n'' für jedes n durch einen Streckenzug innerhalb des Gebietes $\mathfrak{g}_{\mu_2}$ und erhalten auf diese Weise ein Streckenzugsystem S, das die beiden Punktfolgen (20) und (21) verbindet. Das Streckenzugsystem S ist wesentlich in $\mathfrak{g}_n$ für ein noch so großes n enthalten; jede in S gegen das Grenzgebilde T_s von S konvergierende Punktfolge konvergiert auch gegen E_8

und kann nach der Folgerung aus I keine α-Punktfolge sein. Das Streckenzugsystem S ist ausgezeichnet und die Punktfolgen (20) und (21) sind zueinander konjugiert. Darnach ist auch eine beliebige Punktfolge von $f(E_3)$ *zu jeder ihrer Teilfolgen konjugiert,* da diese letztere ebenfalls in $f(E_3)$ enthalten ist. Nach der Folgerung 2 aus der Definition A ist eine in bezug auf eine beliebige Punktfolge von $f(E_3)$ definierte konjugierte f-Menge Δ immer eine konjugierte Ausgangsmenge eines Komplexes erster Ordnung Δ_1 und mit jeder konjugierten f-Menge der Grundmenge von Δ_1 identisch. Aus dem Satz XV können wir auch leicht folgern, daß Δ in $f(E_3)$ enthalten ist. Aus III und IV erhalten wir die Beziehung $\Delta \equiv \Delta^0$, woraus sich die Gleichheit

$$\Delta = \Delta_1$$

ergibt. Aus III und IV folgt ebenfalls $L^*(\Delta_1) = 0$, so daß auch die Gleichheit gelten muß:

$$f(E_3) = \Delta_1 = \Delta_1^0.$$

VIII. *Die normierte Menge $f(E_3)$ eines Primendes E_3 zweiter Art ist ein Komplex zweiter Ordnung, dessen unbewallte f-Grenzmenge leer ist.*

Die unbewallte f-Gesamtheit $\mathfrak{P}_f$ aller α-Punktfolgen von $f(E_3)$ bildet nach der Folgerung 3 aus der Definition A einen abgeschlossenen Komplex Δ_1^{*0} erster Ordnung. Eine beliebige normierte β-Punktfolge von $f(E_3)$ ist in einem Komplex Δ_1 erster Ordnung enthalten, wobei nach dem Satz XV die Beziehung $\Delta_1^0 \subset f(E_3)$ gilt. Nach V gilt die Beziehung

$$\Delta_1^0 \supset \Delta_1^{*0}. \tag{23}$$

Die Komplexe Δ_1 und Δ_1^* sind sicherlich verschieden (zum Unterschied von Δ_1 enthält Δ_1^* keine β-Punktfolgen), und da andererseits $\Delta_1^0 \cdot \Delta_1^{*0} \neq 0$, so können wir aus dem Satz IV folgern, daß die beiden Komplexe Δ_1^0 und Δ_1^{*0} in einem Komplex Δ_2 zweiter Ordnung enthalten sind. Mit $M(\Delta_1)$ bezeichnen wir die Grundmenge des Komplexes Δ_2 und mit $M'(\Delta_1^0)$ die Gesamtheit aller abgeschlossenen Komplexe erster Ordnung, die mindestens eine Punktfolge von $f(E_3)$ enthalten.

(24) Nach dem Satz XV sind sämtliche Komplexe der Gesamtheit $M'(\Delta_1^0)$ in $f(E_3)$ enthalten.

Mit Ausnahme des Komplexes Δ_1^{*0} enthalten alle Komplexe von $M'(\Delta_1^0)$ auch β-Punktfolgen. Nach (23) enthält jeder Komplex der Menge $M'(\Delta_1^0)$ den Komplex Δ_1^{*0}, und wir können laut Definition A der Komplexe folgern, daß jeder Komplex von $M'(\Delta_1)$ in der Menge $M(\Delta_1)$ enthalten ist. Nach (24) müßte ein zu einem Komplex $M'(\Delta_1)$ benachbarter und in $M'(\Delta_1^0)$ nicht enthaltener Komplex auch eine Punktfolge von $f(E_3)$ enthalten. Ein solcher Komplex kann nicht existieren: der Komplex müßte in solchem

Falle nach dem Satz XV selbst in $M'(\Delta_1^0)$ enthalten sein, was offenbar unmöglich ist. Die Menge $M'(\Delta_1^0)$ genügt also der Bedingung 1 der Definition B der Komplexe. Wir erhalten darnach die Identität $M'(\Delta_1^0) = M(\Delta_1^0)$. Berücksichtigen wir noch die Gleichheit $f(E_8) = V(M'(\Delta_1^0))$, so ergibt sich die Beziehung $f(E_8) = \Delta_2$.

Korollar. Nach dem Erzeugungsprinzip (Satz IV) läßt sich wegen (23) jedes Primende E_8 zweiter Art in besonders einfacher Art darstellen

$$\Delta_2 = \Delta_1^0 + V(M({}_1\Delta_1^0)),$$

wobei $M({}_1\Delta_1^0)$ die Gesamtheit aller zu einem in Δ_2 enthaltenen Komplex erster Ordnung benachbarten Komplexe erster Ordnung ist.

IX. *Ist Δ_1^0 ein abgeschlossener Komplex erster Ordnung, welcher eine Punktfolge der normierten Menge $f(E_8)$ eines Primendes erster, dritter oder vierter Art enthält, so ist immer*

$$\Delta = \Delta_1^0 = f(E_8).$$

Nach VI und VII ist $f(E_8)$ eine konjugierte f-Menge Δ. Nach dem Satz XV gilt die Beziehung $\Delta_1^0 \subset \Delta$, und wir erhalten unter Berücksichtigung der Folgerung 5 (§ 5) die Beziehung $\Delta_1^0 = \Delta = f(E_8)$.

X. *Es sei E_8 ein beliebiges Primende des Gebietes $\mathfrak{G}_e$ und $f(E_8)$ seine normierte f-Menge.*

Ist Δ_1^0 ein Komplex erster Ordnung des Gebietes $\mathfrak{G}_e$, von dem eine Punktfolge in $f(E_8)$ enthalten ist, so ist immer

a) $\Delta_1 = \Delta_1^0 = f(E_8)$ *ein vollkommen gesättigter Komplex erster Ordnung, falls E_8 von erster, dritter oder vierter Art ist.*

b) $\Delta_1 = \Delta_1^0 \subset f(E_8)$, *falls E_8 von zweiter Art ist*[21a]).

Ist Δ_2^0 ein Komplex zweiter Ordnung des Gebietes $\mathfrak{G}_e$, von dem eine

---

[21a]) Die Beziehung

$$\Delta_1 = \Delta_1^0$$

gilt auch im Falle eines Primendes E_8 zweiter Art. Sie stellt zugleich eine Verschärfung der Behauptung V dar: die unbewallte f-Gesamtheit aller α-Punktfolgen des Primendes E_8 muß in Δ_1 enthalten sein.

Für jedes Paar nicht identischer konjugierter f-Mengen Δ und Δ' der Grundmenge $M(\Delta)$ von Δ_1 gilt nach Folgerung 1 aus der Definition A der Beziehung $\Delta^0 \cdot \Delta'^0 \neq 0$. Wegen der (laut Satz XV bestehenden) Beziehung $\Delta_1^0 \subset f(E_8)$ gilt

$$L_\beta(\Delta) = 0 \quad \text{bzw.} \quad L_\beta(\Delta') = 0.$$

Wegen $\Delta \cdot \Delta' = 0$ muß

$$L_\alpha(\Delta) \cdot L_\alpha(\Delta') \neq 0$$

sein. Berücksichtigen wir noch (10) § 4, so erhalten wir die Beziehung $\mathfrak{P}_f \subset \Delta_1$. Wir könnten nun direkt beweisen, daß immer ein Paar nicht identischer konjugierter f-Mengen Δ und Δ' in $M(\Delta)$ enthalten sein muß. Dieser Beweis ist aber hier entbehrlich. Angenommen, $M(\Delta)$ enthält nur eine einzige konjugierte f-Menge Δ. Es müßte dann $\Delta^0 = \Delta_1$ sein. $\mathfrak{P}_f$ wäre dann jedenfalls in Δ_1 enthalten.

Punktfolge in $f(E_3)$ enthalten ist, so ist immer $\Delta_2 = \Delta_2^0 = f(E_3)$ ein vollkommen gesättigter Komplex zweiter Ordnung.

Die Behauptung ist das Ergebnis vorhergehender Betrachtungen. Der Satz XV und Ziffer IX besagen, daß kein zu einem Komplex erster Ordnung benachbarter Komplex erster oder zweiter Ordnung existieren kann, falls Δ_1^0 mit der normierten Menge eines Primendes erster, dritter oder vierter Art identisch ist. Der Komplex Δ_1 ist in diesem Falle in bezug auf die Zahl 3 gesättigt. Jeder andere Komplex erster Ordnung muß nach dem Satz XV in der normierten f-Menge eines Primendes zweiter Art enthalten sein. Ein Komplex Δ_2 zweiter Ordnung muß jedenfalls mit der normierten f-Menge $f(E_3)$ eines Primendes E_3 zweiter Art eine gemeinsame Punktfolge haben. Da nach VIII $f(E_3)$ selbst ein nicht abgeschlossener Komplex zweiter Ordnung ist, muß nach dem Satz VII Δ_2 mit diesem identisch sein. Darnach existieren keine zu Δ_2 benachbarten, in bezug auf die Zahl 3 gesättigten Komplexe. Im Gebiet $\mathfrak{G}_e$ können also keine Komplexe von einer Ordnung > 2 existieren, und wir können nun leicht unsere Behauptungen folgern. —

Unter Berücksichtigung des Satzes X erhalten wir den

Satz XVI. *Ein Primende erster, dritter oder vierter Art (im Sinne von Carathéodory) ist immer ein Primende erster Ordnung (in unserem Sinne) und umgekehrt. Ein Primende zweiter Art (im Sinne von Carathéodory) ist immer ein Primende zweiter Ordnung (in unserem Sinne) und umgekehrt.*

Folgerung. Jedes einfach-zusammenhängende Gebiet in der Ebene ist von erster oder zweiter Ordnung.

Kapitel IV.
Die Primendenarten.

§ 15.
Die Hauptpunkte.

Es sei $M(T_q)$ die Gesamtheit paarweise verschiedener Grenzgebilde aller beliebigen, ein Primende E_3^τ (von der Ordnung τ) bestimmenden Querschnittketten.

Enthält $H_q \varepsilon M(T_q)$ kein von ihm verschiedenes Grenzgebilde der Menge $M(T_q)$, so nennen wir H_q einen *Kern* des Primendes E_3^τ und jeden Punkt von H_q einen *Hauptpunkt* des Primendes E_3^τ. Einen Punkt von E_3^τ, der kein Hauptpunkt ist, nennen wir einen *Nebenpunkt* von E_3^τ.[21b])

[21b]) Ein Kern des Primendes kann alle oder nur einen Teil aller Hauptpunkte enthalten. Ein Primende kann eine Menge verschiedener Kerne von der Mächtigkeit des Kontinuums haben.

Die Gesamtheit aller Punkte des Primendes, die nicht in einem Kern enthalten sind, nennen wir das Komplementärgebilde des Primendes in bezug auf den gegebenen Kern.

Das nicht leere Komplementärgebilde eines Primendes kann nicht abgeschlossen sein.

Aus folgendem Satz ist ersichtlich, daß die Menge der Hauptpunkte eines Primendes nicht leer sein kann.

Satz XVII. *Es existiert mindestens ein Kern des Primendes* E_q^{I}.

Es sei $T_q' \varepsilon M(T_q)$ ein Grenzgebilde, welches ein anderes Grenzgebilde $T_q'' \varepsilon M(T_q)$ enthält, wobei $T_q' \neq T_q''$ ist. Mit Hilfe der transfiniten Induktion definieren wir für jede Zahl $\sigma \geqq 3$, die einen Abschnitt von Ordnungszahlen

$$(1) \qquad 1, 2, \ldots, \ldots, \eta, \ldots \qquad (\eta < \sigma)$$

bestimmt, ein Grenzgebilde $T_q^{\sigma} \varepsilon M(T_q)$ (vorausgesetzt, daß ein solches Grenzgebilde existiert), das in allen induktiv definierten Grenzgebilden der absteigenden Menge

$$(2) \qquad T_q' > T_q'' > \ldots, \ldots > T_q^{\eta}, \ldots$$

enthalten und von diesen verschieden ist.

Die so gebildete Menge ineinandergeschachtelter, paarweise verschiedener abgeschlossener Mengen ist jedenfalls abzählbar, und die Zahl σ gehört also höchstens der abzählbaren Zahlenklasse an. Nach abzählbar unendlich vielen Schritten gelangen wir zu einem ersten Wert $\sigma = \sigma_*$ (σ_* eventuell Limeszahl) mit der Eigenschaft, daß für σ_* kein Grenzgebilde der Menge $M(T_q)$ unserer Definition genügt. Um unsere Behauptung nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß die Zahl σ_* einen unmittelbaren Vorgänger besitzt: darnach wäre nämlich $T_q^{\sigma_*-1}$ ein Kern des Primendes E_q^{I}.

Nehmen wir an, σ_* sei eine Limeszahl. Wir bilden den Durchschnitt

$$D(T_q', T_q'', \ldots, \ldots, T_q^{\eta}, \ldots) = D \qquad (\eta < \sigma_*)$$

und wollen nachweisen, daß in D ein Grenzgebilde der Menge $M(T_q)$ enthalten ist; die Existenz eines solchen Grenzgebildes wäre ein Widerspruch zur Definition der Zahl σ_*.

Die Menge D ist abgeschlossen, und wir können sie durch einfache Würfelpolyeder approximieren. Für jede noch so kleine simpliziale Raumzerlegung W_ν ist die Menge D innerhalb endlich vieler paarweise fremder Würfelpolyeder $\mathfrak{m}_\nu(W)$ enthalten, wobei diese Würfelpolyeder sich aus allen mindestens einen Punkt von D enthaltenden Würfeln zusammensetzen. Für jedes ν bestimmt die Polyedergesamtheit $\mathfrak{m}_\nu(W)$ eine aus endlich vielen Gebieten bestehende offene Menge $\mathfrak{J}_\nu$, deren sämtliche Punkte innerhalb der Polyeder liegen. Das Grenzgebilde der Folge $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_\nu, \ldots$

ist offenbar mit D identisch. Innerhalb $\mathfrak{J}_\nu$ können wir für jedes ν ein Grenzgebilde ${}_\nu T_q \varepsilon M(T_q)$ so bestimmen, daß der Abstand des Grenzgebildes ${}_\nu T_q$ von allen Polyederflächen der Menge $\mathfrak{m}_\nu(W)$ größer eines gewissen Wertes ε_ν ist. Die ${}_\nu T_q$ bestimmende Querschnittkette bezeichnen wir mit $q_1^{(\nu)}, q_2^{(\nu)}, \ldots, q_n^{(\nu)}, \ldots$ und die entsprechende Gebietskette mit $\mathfrak{g}_1^{(\nu)}, \mathfrak{g}_2^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{g}_n^{(\nu)}, \ldots$. Innerhalb $\mathfrak{J}_1$ bestimmen wir einen Querschnitt q'_μ der Kette $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, \ldots$. Allgemein können wir innerhalb $\mathfrak{J}_\nu$ $(\nu > 1)$ einen Querschnitt $q_{\mu_\nu}^{(\nu)}$ so bestimmen, daß das Gebiet $\mathfrak{g}_{\mu_\nu}^{(\nu)}$ der Bedingung genügt:

$$\mathfrak{g}_{\mu_\nu}^{(\nu)} < \mathfrak{g}'_1, \mathfrak{g}'_2, \ldots, \mathfrak{g}'_\nu; \mathfrak{g}_{\mu_{\nu-1}}^{(\nu-1)}.$$

Das durch die Querschnittkette $q'_{\mu_1}, q''_{\mu_2}, \ldots, q_{\mu_\nu}^{(\nu)}, \ldots$ bzw. durch die Gebietskette $\mathfrak{g}'_{\mu_1}, \mathfrak{g}''_{\mu_2}, \ldots, \mathfrak{g}_{\mu_\nu}^{(\nu)}, \ldots$ bestimmte Ende ist mit $E_\mathfrak{g}^\tau$ identisch, und das Grenzgebilde T_q der Kette $q'_{\mu_1}, q''_{\mu_2}, \ldots, q_{\mu_\nu}^{(\nu)}, \ldots$ ist in $M(T_q)$ bzw. in D enthalten.

Satz XVIII. *Es sei*

(3) $$H'_q, H''_q, \ldots, H^n_q, \ldots$$

eine Folge verschiedener Kerne eines Primendes $E_\mathfrak{g}^\tau$ (von der Ordnung τ) und T_H das Grenzgebilde der Folge (4). *Wir behaupten, in T_H ist mindestens ein Kern H_q von $E_\mathfrak{g}^\tau$ enthalten.*

Der Beweis der Existenz eines Kernes $H_q < T_H$ ist ganz analog dem Beweis der Existenz des Grenzgebildes $T_q < D$, welchen wir am Ende des Beweises der Satzes XVII geführt haben.

Im nachfolgenden Satz werden wir zeigen, daß im Falle eines einfach-zusammenhängenden ebenen Gebietes die Hauptpunkte in unserem Sinne mit den Hauptpunkten im Carathéodoryschen Sinne identisch sind. Zunächst ist es unmittelbar klar, daß ein Hauptpunkt im Carathéodoryschen Sinne ein aus einem Hauptpunkt (in unserem Sinne) bestehender Kern eines Primendes eines einfach-zusammenhängenden Gebietes in der Ebene ist.

Satz XIX. *Ein Kern eines Primendes $E_\mathfrak{g}$ des einfach-zusammenhängenden ebenen Gebietes $\mathfrak{G}_e$ besteht immer aus einem einzigen Punkt, gegen welchen mindestens eine $E_\mathfrak{g}$ bestimmende Querschnittkette (im Carathéodoryschen Sinne) konvergiert.*

Um diese Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß in einem beliebigen Kern H_q des Primendes $E_\mathfrak{g}$ ein Hauptpunkt im Sinne von Carathéodory enthalten sein muß. Dies läßt sich am einfachsten mit Hilfe eines von Carathéodory bewiesenen Satzes[22]) beweisen. Wir können darnach ein Teilgebiet $\mathfrak{G}_e^*$ von $\mathfrak{G}$ so bestimmen, daß ein Primende $E_\mathfrak{g}^*$ von

[22]) C. Carathéodory (Fußnote [1])), Satz XIX, S. 361.

$\mathfrak{G}_e^*$ in E_8 enthalten ist und nur aus sämtlichen Hauptpunkten (im Carathéodoryschen Sinne) von E_8 besteht. Eine jede Punktfolge, die gegen E_8^* konvergiert, konvergiert auch gegen E_8. Eine solche in $\mathfrak{G}_e^*$ liegende und gegen E_8^* konvergierende Punktfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ verbinden wir innerhalb $\mathfrak{G}_e^*$ mit einem beliebigen festen Punkt von $\mathfrak{G}_e^*$ durch ein Streckenzugsystem S. Jeder fast aller Querschnitte einer gegen H_q konvergierenden und E_8 bestimmenden Querschnittkette muß unendlich viele Streckenzüge von S treffen und enthält mindestens einen Punkt von $\mathfrak{G}_e^*$. Das Grenzgebilde H_q muß also mindestens einen Punkt von E_8^* enthalten, und dies ist der gesuchte Hauptpunkt (im Carathéodoryschen Sinne), mit welchem H_q identisch sein muß.

Wir erwähnen hier noch folgende einfache Eigenschaft der Kerne: *Jede Kurve*[23]) (*im Raume und in der Ebene*), *die gegen eine Teilmenge eines Primendes konvergiert, approximiert mindestens je einen Punkt eines jeden Kernes des Primendes.* Im speziellen Falle, daß jeder Kern nur aus einem Punkt besteht, muß darnach die Kurve die Gesamtheit aller Hauptpunkte approximieren. (Dies letztere ist im Falle eines einfach-zusammenhängenden ebenen Gebietes immer der Fall, wie aus der Übereinstimmung der Carathéodoryschen und Studyschen Definition der Hauptpunkte bekannt ist.)

§ 16.

Die Einteilung der Primenden.

I. *Der Häufungspunkt ξ einer gegen ein Primende E_8^τ (von der Ordnung τ) konvergierenden α-Punktfolge ist ein erreichbarer Punkt von E_8^τ.*

Eine konzentrische Kugelfolge mit dem Mittelpunkt ξ bestimmt eine ineinandergeschachtelte und gegen ξ konvergierende Folge von Teilgebieten, die sämtlich die α-Punktfolge wesentlich enthalten. Dies ermöglicht eine einfache Konstruktion eines gegen ξ konvergierenden Einschnittes des Gebietes $\mathfrak{G}$, auf welchem eine unendliche Teilfolge der α-Punktfolge liegt. Ein solcher Einschnitt konvergiert gegen E_8^τ.

II. *Ein erreichbarer Punkt eines Primendes E_8^τ kann nicht Nebenpunkt von E_8^τ sein.*

In einer noch so kleinen Umgebung des Punktes ξ wird ein jeder gegen ξ und E_8^τ konvergierende Einschnitt des Gebietes $\mathfrak{G}$ von jedem fast aller Querschnitte einer E_8^τ bestimmenden Querschnittkette getroffen.

---

[23]) Über die Definition dieser Kurve (nach Study) vgl. C. Carathéodory, Fußnote [1]), S. 362.

III. *Die Gesamtheit aller Punkte der Komplementärmenge eines Kernes eines Primendes E_8^r, sofern sie nicht leer ist, ist von der Mächtigkeit des Kontinuums.*

In einer noch so kleinen Umgebung eines Punktes der in bezug auf einen Kern bestimmten Komplementärmenge liegt ein Teilkontinuum des Primendes E_8^r und in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes liegen keine Punkte des betreffenden Kernes.

IV. Zum Unterschied von den Primenden eines einfach-zusammenhängenden ebenen Gebietes existieren in den allgemeinen räumlichen und ebenen Gebieten Primenden, *die gleichzeitig erreichbare und unerreichbare Hauptpunkte enthalten.*

Aus II ergibt sich für solche Primenden die folgende Eigenschaft, die für die Kerne charakteristisch ist: *enthält ein Kern eines Primendes unerreichbare Punkte, so enthält auch jeder Kern dieses Primendes unerreichbare Punkte.*

Wir wollen nun ein Beispiel eines Primendes eines räumlichen Gebietes angeben, das gleichzeitig erreichbare und unerreichbare Hauptpunkte enthält. — In der x, y-Ebene eines räumlichen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems legen wir eine Kreisscheibe $\mathfrak{K}$ mit dem Radius $\bar{r} = 1$ und dem Anfangspunkt als Mittelpunkt. Die Kreisperipherie bezeichnen wir mit $\bar{K}$. In den Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ legen wir den Anfangspunkt eines in der x, y-Ebene liegenden Polarkoordinatensystems (r, φ), in welchem wir uns eine spiralartige Linie vom Typus der Kurve[24])

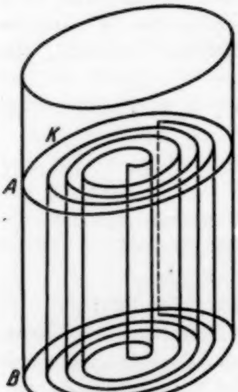


Fig. 12.

$$\varphi = \operatorname{tg}(r\pi) \qquad (0 \leqq r < 1)$$

geben. Wir führen nun die Translation der Kreislinie $\bar{K}$ und der beiden Kurven längs der ganzen positiven z-Halbachse durch und bezeichnen die Spurmenge der beiden Kurven mit $\mathfrak{B}$. Wir betrachten jetzt das folgende innerhalb des Kreiszylinders mit der Grundlinie $\bar{K}$ eingeschlossene Gebiet $\mathfrak{G}$, das aus sämtlichen Punkten mit folgenden Koordinaten besteht

$$-1 < x < +1; \quad 0 < z < 3; \quad -1 < y < +1,$$

jedoch mit Ausnahme derjenigen Punkte von $\mathfrak{B}$, deren z-Koordinate $\leqq 2$ ist. In dem so gebildeten Gebiet $\mathfrak{G}$ konvergieren sämtliche β-Punktfolgen

[24]) Siehe v. Kerékjártó, Topologie, S. 117.

gegen ein und dasselbe Primende zweiter Ordnung, dessen sämtliche erreichbaren Punkte die auf dem Gebietsrand liegende Kreislinie K (Fig. 12) bilden und der Bedingung $z = 2$ genügen und dessen sämtliche unerreichbare Punkte Hauptpunkte sind. Das Primende besteht aus einem Teil der Zylindermantelfläche mit $0 \leqq z \leqq 2$ und einer Mantellinienstrecke $\overline{AB}$ (Fig. 12).

Es ist leicht, durch Modifikation des Gebietes $\mathfrak{G}$ ein Gebiet $\mathfrak{G}^*$ zu konstruieren, welches nebst erreichbaren und unerreichbaren Hauptpunkten auch unendlich viele Nebenpunkte enthält. Innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ bilden wir eine Folge von Kugelumgebungen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_n, \ldots$, deren abgeschlossene Hüllen paarweise zueinander fremd sind und die gegen einen unerreichbaren Randpunkt von $\mathfrak{G}$ konvergiert. Das Gebiet $\mathfrak{G}$ vereinigen wir mit sämtlichen solchen Punkten des Raumes, die sich geradlinig durch Parallele zur z-Achse mit mindestens einem Punkt einer beliebigen der Umgebungen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_n, \ldots$ verbinden lassen und deren z-Koordinate der Bedingung genügt

$$-2 < z \leqq 0.$$

Sämtliche nicht erreichbaren Randpunkte des so gebildeten Gebietes $\mathfrak{G}^*$ mit $-2 < z < 0$ sind Nebenpunkte eines Primendes des Gebietes $\mathfrak{G}^*$, welches alle unerreichbaren Punkte des Randes von $\mathfrak{G}^*$ enthält. Das Primende enthält gleichzeitig erreichbare und unerreichbare Hauptpunkte.

Wir geben hier noch ein Beispiel (Fig. 13) eines Primendes sechster Art in der Ebene. In der in Polarkoordinaten (r, φ) in der Ebene durch die Beziehungen $0 \leqq r \leqq \frac{5}{4}$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ gegebenen Halbkreisscheibe $\overline{\mathfrak{K}}^0$ verbinden wir durch Strecken t_n den Punkt $(0, 0)$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ mit den Punkten e_n der Punktfolge

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = \left(1, \frac{1}{2}\pi\right), \quad e_3 = \left(1, \frac{3}{4}\pi\right), \quad \ldots, \quad e_n = \left(1 \, \frac{2^\nu - 1}{2^\nu}\pi\right), \ldots .$$

Weiterhin sei die Folge von Verbindungsstrecken („Stacheln") der Punktepaare $\left(\frac{5}{4}, \frac{2^\nu - 3}{2^\nu}\pi\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{2^\nu - 3}{2^\nu}\pi\right)$ $(\nu > 1)$ gegeben.

In den durch die Beziehungen

$$0 < r < \frac{5}{4}, \quad 0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$$

$$0 < r < \frac{5}{4}, \quad \frac{2^\nu - 1}{2^\nu}\pi < \varphi < \frac{2^{\nu+1} - 1}{2^{\nu+1}}\pi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gegebenen Teilgebieten sei eine Folge von einfachen Kurvenstücken gegeben, die paarweise zueinander und zu den oben bestimmten „Stacheln" fremd sind und gegen die Linien $(t_n \dotplus t_{n+1})$ sich häufen. Die inneren Punkte von $\overline{\mathfrak{K}}^0$, die auf keinen der oben definierten Strecken und Kurvenstücken liegen, bilden ein ebenes Gebiet von unendlich hohem Zusammen-

hang, dessen sämtliche unerreichbaren Punkte in einem und demselben Primende sechster Art enthalten sind. Die erreichbaren Hauptpunkte ε_n dieses Primendes häufen sich gegen einen unerreichbaren Hauptpunkt $(1, \pi) = u$.

V. Neben der Unterscheidung der erreichbaren und unerreichbaren Hauptpunkte lassen sich die letzteren noch unter folgendem Gesichtspunkt einteilen:

a) *solche Hauptpunkte eines Primendes, die in jedem Kern des Primendes enthalten sind,*

b) *solche Hauptpunkte, die in mindestens einem Kern des Primendes nicht enthalten sind.*

Die Hauptpunkte, die der Bedingung a) genügen, nennen wir *fixe* Hauptpunkte.

Zu den fixen Hauptpunkten *gehören in erster Linie alle erreichbaren Punkte sowie die Häufungspunkte der erreichbaren Punkte* eines Primendes. Im Falle einfach-zusammenhängender ebener Gebiete ist auch umgekehrt jeder fixe Hauptpunkt ein erreichbarer Punkt des Primendes. Ganz anders ist es bei Gebieten allgemeiner Natur: die Existenz unerreichbarer fixer Hauptpunkte läßt sich leicht an Beispielen ebener und räumlicher Gebiete feststellen, z. B. der Punkt $u = (1, \pi)$ im Beispiel eines Primendes in IV (Fig. 13).

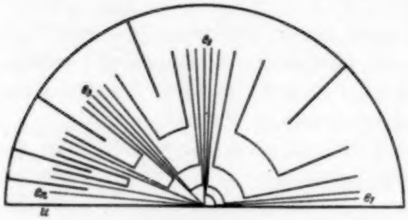


Fig. 13.

In bezug auf fixe Hauptpunkte gilt folgender bemerkenswerte und einfache

Satz XX. *Der Häufungspunkt ξ einer beliebigen unbewallten Grenzpunktfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ einer beliebigen Teilmenge $f^*(E_8^\tau)$ der normierten Menge $f(E_8^\tau)$ eines Primendes E_8^τ (von τ-ter Ordnung) ist immer ein Hauptpunkt, und zwar ein fixer Hauptpunkt von E_8^τ* [25]).

Denn: in einer noch so kleinen Kugelumgebung $\mathfrak{U}(\xi)$ läßt sich immer jeder Punkt P_n der Folge $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ von einem ersten hinreichend großen n ab mit einer Punktfolge von $f^*(E_8^\tau)$ oder mit fast allen Punkten

[25]) In diesem Satz äußert sich die konkrete Bedeutung der unbewallten Grenzpunktfolgen. Insbesondere ist auch das Nichtvorhandensein fixer, nicht erreichbarer Hauptpunkte im Falle der Carathéodoryschen Primenden ein konkreter Ausdruck der oben (IV, § 14) für solche Primenden nachgewiesenen Beziehung $L_\beta(f^*(E_8)) = 0$.

einer solchen Punktfolge durch ein in $\mathfrak{U}(\xi)$ ganz verlaufenes Streckenzugsystem $S^{(n)} = s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \ldots, s_n^{(n)}, \ldots$ verbinden. Sämtliche Querschnitte $q_\mu, q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+n}, \ldots$ einer E_ξ^r bestimmenden Kette von einem ersten hinreichend großen $n = \mu$ ab müssen fast alle Streckzüge eines jeden Systems $S^{(m+1)}, S^{(m+2)}, \ldots, S^{(m+n)}, \ldots$ (m hinreichend groß) treffen. In einer noch so kleinen Kugelumgebung des Punktes ξ sind Punkte fast aller Querschnitte einer *jeden* E_ξ^r bestimmenden Querschnittkette enthalten.

VI. Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich die Unterscheidung folgender sechs existierenden Arten von Primenden [26]), die immer aus einem Punkt oder aus einem Kontinuum bestehen.

1. *Primenden erster Art, bestehend aus lauter erreichbaren Hauptpunkten.* Besteht ein solches Primende aus einem einzigen Punkt, so ist es auch von erster Ordnung: alle gegen das Primende konvergierenden Punktfolgen sind α-Punktfolgen und bilden eine unbewallte f-Gesamtheit. Es ist uns nicht gelungen die Frage zu entscheiden, ob auch aus einem Kontinuum bestehende Primenden erster Art existieren. Solche müßten jedenfalls von mindestens zweiter Ordnung sein und eine überall dichte Menge von Punkten enthalten, die gleichzeitig Häufungspunkte von (gegen das Primende konvergierenden) α- und β-Punktfolgen sind.

2. *Primenden zweiter Art, bestehend aus einer abgeschlossenen Menge von erreichbaren Hauptpunkten und einer nicht leeren Menge von Nebenpunkten, deren sämtliche Komponenten mehr als einen Punkt enthalten.* Solche Primenden sind mindestens von zweiter Ordnung (können aber auch von transfiniter Ordnung sein).

3. *Primenden dritter Art, bestehend aus einem Kontinuum unerreichbarer Hauptpunkte.* Diese Primenden sind immer von erster Ordnung; gegen solche Primenden konvergieren nur β-Punktfolgen.

4. *Primenden vierter Art, bestehend aus nicht erreichbaren Hauptpunkten und einer nicht leeren Menge von Nebenpunkten.* Diese Primenden sind immer von erster Ordnung; gegen solche Primenden konvergieren nur β-Punktfolgen.

5. *Primenden fünfter Art, bestehend aus einem Kontinuum erreichbarer und nicht erreichbarer Hauptpunkte.* Diese Primenden sind mindestens von zweiter Ordnung (Beispiel in IV), doch können die Primenden auch von transfiniter Ordnung sein.

6. *Primenden sechster Art, bestehend aus erreichbaren und unerreichbaren Hauptpunkten und einer nicht leeren Menge von Nebenpunkten.*

---

[26]) Sämtliche nachfolgende Behauptungen lassen sich entweder aus den früheren Betrachtungen direkt gewinnen oder durch einfache Beispiele belegen.

Die Primenden sind von mindestens zweiter Ordnung (Beispiel in IV), doch kann die Ordnung auch transfinit sein.

Anmerkung 1. Die Frage der Abgeschlossenheit der Gesamtheit aller Hauptpunkte der Primenden vierter und sechster Art ist nicht entschieden. Nach dem Satz XVIII ist jeder Folge von Kernen eines jeden Primendes mindestens eine gegen einen Hauptpunkt des Primendes konvergierende Folge von Hauptpunkten untergeordnet. Es steht aber nicht fest, ob auch immer eine einer Folge von Kernen untergeordnete Folge von Hauptpunkten ebenfalls gegen einen Hauptpunkt konvergiert.

Anmerkung 2. Für sämtliche Primenden gilt folgende Aussage: Ein in einem Primende enthaltenes Ende $\mathfrak{E}_0$ (evtl. das Primende selbst) ist durch ein einfaches Ende unteilbar, falls die Gesamtheit aller gegen $\mathfrak{E}_0$ konvergierenden normierten Punktfolgen in einem Δ_1^0 oder Δ_2 enthalten ist (vgl. Satz XV). — Darnach sind die Primenden dritter und vierter Art und die aus einzelnen Punkten bestehenden Primenden erster Art durch einfache Enden überhaupt nicht teilbar.

Anmerkung 3. Primenden erster, zweiter, dritter, vierter und sechster Art existieren im Raume und in der Ebene; die Frage der Existenz der Primenden fünfter Art in der Ebene ist nicht geklärt.

(Eingegangen am 10. 7. 1929.)

Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten.

Von

Carl Bankwitz in Königsberg.

Im folgenden soll eine besondere Darstellung der Torsionszahlen des zweifach überdeckten Knotenaußenraumes entwickelt werden.

Es ergibt sich: Die Torsionszahlen lassen sich als die Elementarteiler von symmetrischen Determinanten darstellen (§ 1). Den Wert dieser Determinanten kann man unter gewissen Voraussetzungen nach unten abschätzen (§ 2). Man erhält hieraus für die alternierenden Knoten den von K. Reidemeister als Vermutung ausgesprochenen[1])

Satz: *„Die Minimalanzahl der Überkreuzungen der Projektion eines alternierenden Knotens ist höchstens so groß wie das Produkt seiner Torsionszahlen“* (§ 3).

§ 1.

Die Knotengruppe.

1. Vorgegeben sei irgendeine reguläre[2]) Projektion eines gerichteten Knotens. Die Projektion besteht aus n Doppelpunkten und $2n$ gerichteten Strecken. Die gerichteten Strecken wollen wir Abschnitte nennen. Jeder Abschnitt wird von zwei Doppelpunkten begrenzt. Die Projektionsebene wird durch die Projektion in Gebiete Γ, die von den Abschnitten und den Doppelpunkten begrenzt werden, eingeteilt. Bei einem Doppelpunkt stoßen vier Gebiete, längs eines Abschnittes stoßen zwei Gebiete aneinander.

Wir nehmen nun eine Einteilung der Gebiete Γ in zwei Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ derart vor, daß längs eines Abschnittes immer zwei Gebiete verschiedener Klassen aneinanderstoßen. — Nehmen wir ein Gebiet Γ_0, etwa das Gebiet, in dem das unendlich Ferne der Projektionsebene liegt, willkürlich zur Klasse $\mathfrak{A}$. Die Gebiete Γ_α, die mit Γ_0 einen

[1]) Herrn Reidemeister verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit.

[2]) K. Reidemeister, Hamburger Abhandlungen 1926, Heft 1/2, S. 24.

Abschnitt gemeinsam haben, gehören dann der Klasse 𝔅 an. Die Gebiete, die mit einem der Gebiete Γ_a einen Abschnitt gemeinsam haben, werden wieder zur Klasse 𝔄 gerechnet usw. Diese Einteilung ist widerspruchsfrei. Ein Weg, der von einem Gebiet einer Klasse zu einem anderen Gebiet derselben bzw. der anderen Klasse führt, muß nämlich eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Punkten mit der Knotenprojektion gemeinsam haben (Doppelpunkte zweifach gezählt). Wäre die Einteilung nun widerspruchsvoll, dann müßte also ein geschlossener Weg in der Projektionsebene eine ungerade Anzahl von Punkten mit der Knotenprojektion gemeinsam haben. Dies ist aber nicht der Fall. Deformieren wir nämlich den geschlossenen Weg über einen Abschnitt oder über einen Doppelpunkt, dann ändert sich die Anzahl der mit der Knotenprojektion gemeinsamen Punkte um 0, ± 2 bzw. ± 4. Wir können nun den Weg so deformieren, daß er ganz innerhalb eines Gebietes liegt, also keinen Punkt mit der Knotenprojektion gemeinsam hat.

An den Doppelpunkten liegen sich zwei Gebiete jeder Klasse kreuzweise gegenüber.

Wir wählen nun in jedem Gebiet der Klasse 𝔅 einen Grundpunkt und verbinden die Grundpunkte von je zwei an einem Doppelpunkte sich gegenüberliegenden Gebieten durch einen einfachen Streckenzug, der durch den Doppelpunkt hindurchgeht. *Die Gesamtheit der Streckenzüge und der Grundpunkte bilden einen ebenen Graphen* (ℭ).

Wir unterscheiden zwischen eigentlichen und uneigentlichen Grundpunkten. Einen Grundpunkt wollen wir uneigentlich nennen, wenn von ihm höchstens zwei Streckenzüge ausgehen. Ein Grundpunkt soll eigentlich heißen, wenn mindestens drei Streckenzüge von ihm ausgehen.

Geht von einem Grundpunkt nur ein Streckenzug aus, d. h. liegt an einem Gebiet der Klasse 𝔅 nur ein Doppelpunkt, dann können wir durch eine elementare Umformung des Knotens[3]) diesen Doppelpunkt beseitigen. Die Anzahl der Gebiete und die Anzahl der Doppelpunkte vermindert sich dabei um je eins (Fig. 1). Wir können demnach immer erreichen, daß die Grundpunkte dieser Art nicht mehr in der Projektion vorkommen.

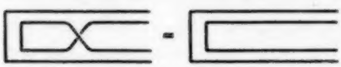


Fig. 1.

Stoßen an einem Grundpunkt genau zwei Streckenzüge aneinander, so wollen wir die beiden Streckenzüge miteinander vereinigen und den Grundpunkt zum Streckenzug hinzurechnen.

[3]) J. W. Alexander, Transactions of the American Mathematical Society, 30, Nr. 2, April 1928. — K. Reidemeister, Hamb. Abhandl. 1926, S. 25–28.

Der Graph $\mathfrak{C}$ besteht dann nur noch aus Streckenzügen (im erweiterten Sinn!) und aus eigentlichen Grundpunkten. Das Gebiet, in dem ein eigentlicher Grundpunkt liegt, wollen wir Verzweigungsgebiet nennen

In der Knotenprojektion entsprechen dann den Streckenzügen des Graphen die Projektionen von Zweierzöpfen[4]). Die Endstrecken der Zweierzöpfe sind so miteinander verknüpft, daß in der Knotenprojektion keine neuen Doppelpunkte hinzukommen. Die Endstrecken bestehen aus den Abschnitten, die die Verzweigungsgebiete begrenzen.

Fig. 2.

Die Zweierzöpfe können wir so deformieren, daß in der Projektion Unter- und Überkreuzungen miteinander abwechseln (Fig. 2).

Hat die Projektion eines Zweierzopfes nach dieser Deformation keine Überkreuzungen mehr, so wollen wir den entsprechenden Streckenzug mit seinen beiden Grundpunkten zu einem Grundpunkt zusammenziehen und die beiden entsprechenden Verzweigungsgebiete zu einem Verzweigungsgebiet vereinigen. Die Projektion des Zweierzopfes geht in die Berandung des Verzweigungsgebietes über; *der Knoten setzt sich* dann also *aus alternierenden Zweierzöpfen mit mindestens je einer Überkreuzung zusammen.*

So soll im folgenden jede Knotenprojektion aufgefaßt werden. Die Zweierzöpfe einschließlich der von ihnen begrenzten Gebiete der Klasse $\mathfrak{B}$ und eines Teiles der zugehörigen Verzweigungsgebiete sollen Stränge ($\gamma_{\lambda\mu}$) heißen. Die Gebiete der Klasse $\mathfrak{A}$ nennen wir im folgenden kurz Gebiete (Γ_ν). Der Strang $\gamma_{\lambda\mu}$ soll die Gebiete Γ_λ und Γ_μ voneinander trennen.

Wir können den Fall $\lambda = \mu$ ausschließen. $\lambda = \mu$ bedeutet geometrisch, daß in der Begrenzung des Gebietes Γ_λ der Strang $\gamma_{\lambda\lambda}$ zweimal auftritt. Die Knotenprojektion besteht in diesem Fall aus zwei Teilen (Fig. 3), die durch den Strang $\gamma_{\lambda\lambda}$ miteinander verknüpft sind. Drehen wir nun den einen Teil in einem bestimmten Sinn um eine Achse, die mit dem $\gamma_{\lambda\lambda}$ entsprechenden Streckenzug des Graphen $\mathfrak{C}$ zusammenfällt, so oft um 180°, als auf $\gamma_{\lambda\lambda}$ Überkreuzungen liegen, dann hat $\gamma_{\lambda\lambda}$ keine Überkreuzungen mehr und kann daher zur Berandung eines Verzweigungsgebietes gerechnet werden.

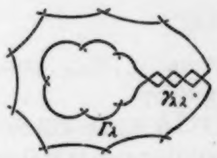


Fig. 3.

2. Wir stellen jetzt die Fundamentalgruppe des Knotens auf. Die aufeinanderfolgenden Abschnitte der Knotenprojektion von einer Unterkreuzung bis zur nächsten werden zu einer Fundamentalstrecke zusammengefaßt. Den Fundamentalstrecken wird formal ein System von Erzeugenden C_ν zugeordnet. Gehört aber eine Fundamentalstrecke mehr als

[4]) E. Artin, Hamb. Abhandl. 4, 1925, pg. 47—72.

zwei Strängen an, dann zerlegen wir sie in Teilstrecken derart, daß jede Teilstrecke genau zwei Strängen angehört. In diesem Fall ordnen wir jeder Teilstrecke ein besonderes C_ν zu.

Die C_ν entsprechen in der Fundamentalgruppe den geschlossenen Wegen, die eine zugehörige Fundamentalstrecke in einem positiv vorgegebenen Sinn umlaufen[5]). Die Projektion des Punktes, von dem die geschlossenen Wege ausgehen, möge dabei in das Gebiet Γ_0 — das Äußere der Knotenprojektion — fallen. Jedem Weg läßt sich in bestimmter Weise ein Potenzprodukt in den C_ν zuordnen.

Wir können diese Wege geometrisch auch folgendermaßen kennzeichnen: Zwischen den beiden Teilen des Knotens, die zu einem Strang gehören, spannen wir eine schlichte Fläche, ein Band. Dieses Band verwindet sich in der Längsrichtung so oft um 180°, als der Strang Doppelpunkte hat. Den Strang können wir als die Projektion des Bandes ansehen. Die Bänder werden nun in der Weise miteinander verknüpft, wie es die Verzweigungsgebiete der Knotenprojektion vorschreiben. Es entsteht dann eine mehrfach zusammenhängende einseitige, vom Knoten berandete Fläche.

Die C_ν entsprechen solchen geschlossenen Wegen, die diese Fläche genau einmal durchsetzen.

Die Relationen zwischen den C_ν erhalten wir bekanntlich[6]), indem wir die Doppelpunkte der Knotenprojektion in einem kleinen Kreis umlaufen. Diese Relationen sind von der Gestalt:

$$C_{\lambda+1} = C_\mu^\varepsilon C_\lambda C_\mu^{-\varepsilon} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{1}$$

und

$$C_{\varkappa+1} = C_\varkappa, \tag{2}$$

wenn $C_\varkappa, C_{\varkappa+1}$ zwei aneinanderstoßenden Teilfundamentalstrecken entsprechen.

3. Unser Ziel in diesem Paragraphen ist es nun, eine andere Darstellung dieser Gruppe zu geben, und zwar durch Erzeugende und Relationen, die sich enger an die von uns beschriebene Auffassung der Knotenprojektion anschließt.

Wir nehmen zunächst eine Erweiterung zweiter Art[7]) der Knotengruppe vor. Die Elemente $S_{\lambda\mu}$ der Fundamentalgruppe, die einmaligen Umschlingungen der Stränge $\gamma_{\lambda\mu}$ in einem beliebigen aber festen Sinne entsprechen, werden als Erzeugende zur Fundamentalgruppe hinzugenommen.

[5]) K. Reidemeister, Hamb. Abhandl. 5 (1926), S. 14.
[6]) K. Reidemeister, Hamb. Abhandl. 5 (1926), S. 8–23.
[7]) H. Tietze, Mon. f. Math. u. Phys., 19, S. 65—77.

Dem Strang $\gamma_{\lambda\mu}$ seien die Erzeugenden

$$C_{\lambda_1}, C_{\lambda_1+1}, \ldots, C_{\lambda_1+r},$$
$$C_{\mu_1}, C_{\mu_1+1}, \ldots, C_{\mu_1+r}$$

zugeordnet (Fig. 4). Jedem Doppelpunkt des Stranges entspricht eine der Relationen (1).

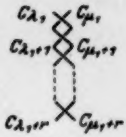


Fig. 4.

Es ist ferner

$$\text{(3a)} \qquad S^{\varepsilon}_{\lambda\mu} = C^{\varepsilon_\lambda}_{\lambda_1} C^{\varepsilon_\mu}_{\mu_1} = C^{\varepsilon_\mu}_{\mu_1+1} C^{\varepsilon_\lambda}_{\lambda_1} = \ldots = C^{\varepsilon_\lambda}_{\lambda_1+r} C^{\varepsilon_\mu}_{\mu_1+r} \qquad (\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu = \pm 1),$$

wenn der Strang $\gamma_{\lambda\mu}$ $2r$ Doppelpunkte hat, und

$$\text{(3b)} \qquad S^{\varepsilon}_{\lambda\mu} = C^{\varepsilon_\lambda}_{\lambda_1} C^{\varepsilon_\mu}_{\mu_1} = \ldots = C^{\varepsilon_\mu}_{\mu_1+r+1} C^{\varepsilon_\lambda}_{\lambda_1+r},$$

wenn der Strang $2r+1$ Doppelpunkte hat. Die Relationen (3) sind dabei bis auf eine, etwa $S_{\lambda\mu} = C^{\varepsilon_\lambda}_{\lambda_1} C^{\varepsilon_\mu}_{\mu_1}$, Folgerelationen dieser beibehaltenen Relationen und der Relationen (1) bzw. (2).

Wir wollen nun durch Reduktionen zweiter Art diejenigen C_ν ausdrücken, welche Fundamentalstrecken zugeordnet sind, die nicht Enden eines Stranges sind. Es folgt aus (1) unter Berücksichtigung der Relationen (3)

$$\text{(4a)} \qquad \begin{aligned} C_{\lambda_1+1} &= S^{\varepsilon}_{\lambda\mu} C_{\lambda_1} S^{-\varepsilon}_{\lambda\mu}, \\ C_{\lambda_1+2} &= S^{\varepsilon}_{\lambda\mu} C_{\lambda_1+1} S^{-\varepsilon}_{\lambda\mu} = S^{2\varepsilon}_{\lambda\mu} C_{\lambda_1} S^{-2\varepsilon}_{\lambda\mu}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{\lambda_1+r} &= S^{r\varepsilon}_{\lambda\mu} C_{\lambda_1} S^{-r\varepsilon}_{\lambda\mu}, \end{aligned}$$

und analog für $C_{\mu+\varrho}$ $(\varrho = 1 \ldots r$ bzw. $r+1)$

$$\text{(4b)} \qquad \begin{aligned} C_{\mu_1+1} &= S^{\varepsilon}_{\lambda\mu} C_{\mu_1} S^{-\varepsilon}_{\lambda\mu}, \\ C_{\mu_1+2} &= S^{2\varepsilon}_{\lambda\mu} C_{\mu_1} S^{-2\varepsilon}_{\lambda\mu}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{\mu_1+r} &= S^{r\varepsilon}_{\lambda\mu} C_{\mu_1} S^{-r\varepsilon}_{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Umgekehrt folgen aus der Definition von $S_{\lambda\mu}$ und aus (4a) und (4b) die Relationen (1).

Wir können jetzt $C_{\lambda_1+\varrho}$, $C_{\mu_1+\varrho}$ $(\varrho = 1 \ldots r-1)$ eliminieren. Die Relationen (4a) bzw. (4b) fallen dann bis auf die jeweils letzte heraus. Bei dem Strang $\gamma_{\lambda\mu}$ werden also nur noch die Erzeugenden

$$C_{\lambda_1}, C_{\mu_1}, C_{\lambda_1+r}, C_{\mu_1+r} \text{ (bzw. } C_{\mu_1+r+1})$$

und $S_{\lambda\mu}$ beibehalten. Zwischen ihnen bestehen die Relationen

$$\text{(5a)} \qquad S^{\varepsilon}_{\lambda\mu} = C^{\varepsilon_\lambda}_{\lambda_1} C^{\varepsilon_\mu}_{\mu_1} = C^{\varepsilon_\lambda}_{\lambda_1+r} C^{\varepsilon_\mu}_{\mu_1+r}$$

und

$$\text{(6a)} \qquad \begin{aligned} C_{\lambda_1+r} &= S^{r\varepsilon}_{\lambda\mu} C_{\lambda_1} S^{-r\varepsilon}_{\lambda\mu}, \\ C_{\mu_1+r} &= S^{r\varepsilon}_{\lambda\mu} C_{\mu_1} S^{-r\varepsilon}_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

bzw.

$$S_{\lambda\mu}^{\varepsilon} = C_{\lambda_1}^{\varepsilon_\lambda} C_{\mu_1}^{\varepsilon_\mu} = C_{\mu_1+r+1}^{\varepsilon_\mu} C_{\lambda_1+r}^{\varepsilon_\lambda} \tag{5b}$$

und

$$\begin{aligned} C_{\lambda_1+r} &= S_{\lambda\mu}^{r\varepsilon} C_{\lambda_1} S_{\lambda\mu}^{-r\varepsilon}, \\ C_{\mu_1+r+1} &= S_{\lambda\mu}^{(r+1)\varepsilon} C_{\mu_1} S_{\lambda\mu}^{-(r+1)\varepsilon}, \end{aligned} \tag{6b}$$

dabei ist je eine der Relationen (5a), (5b) Folgerelation der anderen Relation (5a), (5b) und der Relationen (6a), (6b).

Mit Hilfe von (5b) formen wir die Relationen (6b) noch etwas um. Wenn etwa $\varepsilon = \varepsilon_\lambda = \varepsilon_\mu = +1$ ist, schreiben wir

$$\begin{aligned} C_{\lambda_1+r} &= S_{\lambda\mu}^{r+1} C_{\mu_1}^{-1} S_{\lambda\mu}^{-r}, \\ C_{\mu_1+r} &= S_{\lambda\mu}^{r+1} C_{\lambda_1}^{-1} S_{\lambda\mu}^{-r}, \end{aligned} \tag{6c}$$

entsprechend in den anderen möglichen Fällen. Alsdann begrenzen C_{λ_1+r} und C_{μ_1}, sowie C_{μ_1+r} und C_{λ_1} je dasselbe Gebiet Γ.

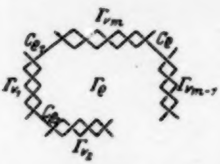


Fig. 5.

Das Gebiet Γ_ϱ sei von den Strängen $\gamma_{\varrho\nu_1} \dots \gamma_{\varrho\nu_m}$ begrenzt (Fig. 5).

Wir diskutieren den Fall, daß $s_{\varrho\nu_\lambda} = 2\,\bar{s}_{\varrho\nu_\lambda}$ $(\lambda = 1 \dots m-1)$ Überkreuzungen auf $\gamma_{\varrho\nu_\lambda}$ und $s_{\varrho\nu_m} = 2\,\bar{s}_{\varrho\nu_m} + 1$ Überkreuzungen auf $\gamma_{\varrho\nu_m}$ liegen.

C_{ϱ_μ} $(\mu = 1 \dots m)$ entspreche einer Fundamentalstrecke, die zwei aufeinanderfolgenden Strängen $\gamma_{\varrho\nu_{\mu-1}}, \gamma_{\varrho\nu_\mu}$ angehört und Γ_ϱ begrenzt. Es ist dann nach (5a)

$$\begin{aligned} C_{\varrho_2} &= S_{\varrho\nu_1}^{\varepsilon_{\nu_1}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_1}} \cdot C_{\varrho_1} \cdot S_{\varrho\nu_1}^{-\varepsilon_{\nu_1}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_1}}, \\ C_{\varrho_3} &= S_{\varrho\nu_2}^{\varepsilon_{\nu_2}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_2}} \cdot C_{\varrho_2} \cdot S_{\varrho\nu_2}^{-\varepsilon_{\nu_2}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_2}} \\ &= S_{\varrho\nu_2}^{\varepsilon_{\nu_2}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_2}} \cdot S_{\varrho\nu_1}^{\varepsilon_{\nu_1}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_1}} \cdot C_{\varrho_1} \cdot S_{\varrho\nu_1}^{-\varepsilon_{\nu_1}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_1}} \cdot S_{\varrho\nu_2}^{-\varepsilon_{\nu_2}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_2}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{\varrho_m} &= \prod_{\mu=m-1}^{1} S_{\varrho\nu_\mu}^{\varepsilon_{\nu_\mu}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_\mu}} \cdot C_{\varrho_1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m-1} S_{\varrho\nu_\mu}^{-\varepsilon_{\nu_\mu}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_\mu}}, \end{aligned} \tag{7a}$$

und nach (6c) $(\varepsilon_{\nu_m} = +1)$

$$C_{\varrho_1} = S_{\varrho\nu_m}^{\bar{s}_{\varrho\nu_m}+1} \cdot \prod_{\mu=m-1}^{1} S_{\varrho\nu_\mu}^{\varepsilon_{\nu_\mu}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_\mu}} \cdot C_{\varrho_1}^{-1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m-1} S_{\varrho\nu_\mu}^{-\varepsilon_{\nu_\mu}\cdot\bar{s}_{\varrho\nu_\mu}} \cdot S_{\varrho\nu_m}^{-\bar{s}_{\varrho\nu_m}}. \tag{7}$$

Umgekehrt folgen die Relationen (6), die den Γ_ϱ begrenzenden Fundamentalstrecken entsprechen, aus den Relationen (7a) und (7) und können daher fortgelassen werden. Die Ausdrücke (7a) für die C_{ϱ_μ} denken wir uns in (5a) bzw. (5b) eingesetzt; dann können die Relationen (7a) und damit die Erzeugenden C_{ϱ_μ} $(\mu \neq 1)$ fortgelassen werden. Analoges ergibt sich für den Fall, daß auf mehreren Strängen eine ungerade Anzahl von

Überkreuzungen liegen. *Jedem Strang $\gamma_{\lambda\mu}$ entspricht jetzt also eine Erzeugende $S_{\lambda\mu}$ und jedem Gebiet Γ_ϱ eine Erzeugende $C_{\varrho_1} = G_\varrho$.* Die Relationen (7) wollen wir **Gebietsrelationen** nennen.

Die Relationen (5) ordnen wir so an:

An dem Verzweigungsgebiet E_σ mögen die Fundamentalstrecken liegen, denen die Erzeugenden $C_{\sigma_1} \dots C_{\sigma_n}$ in zyklischer Folge zugeordnet sind. Dabei kommen alle Relationen (5a) bzw. (5b) je einmal vor, wenn alle Verzweigungsgebiete E_σ umlaufen werden. Es ist nach (5)

$$(8)\qquad \begin{aligned} C_{\sigma_1}^{-\varepsilon_{\sigma_1}}\ C_{\sigma_2}^{\varepsilon_{\sigma_2}} &= S_{\lambda_1\lambda_2}^{\varepsilon_{\lambda_1}}, \\ C_{\sigma_2}^{-\varepsilon_{\sigma_2}}\ C_{\sigma_3}^{\varepsilon_{\sigma_3}} &= S_{\lambda_2\lambda_3}^{\varepsilon_{\lambda_2}}, \\ \cdots&\cdots \\ C_{\sigma_{n-1}}^{-\varepsilon_{\sigma_{n-1}}}\ C_{\sigma_n}^{\varepsilon_{\sigma_n}} &= S_{\lambda_{n-1}\lambda_n}^{\varepsilon_{\lambda_{n-1}}}, \\ C_{\sigma_n}^{-\varepsilon_{\sigma_n}}\ C_{\sigma_1}^{\varepsilon_{\sigma_1}} &= S_{\lambda_n\lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

Aus (8) folgt

$$(8a)\qquad S_{\lambda_1\lambda_2}^{\varepsilon_{\lambda_1}}\, S_{\lambda_2\lambda_3}^{\varepsilon_{\lambda_2}} \dots S_{\lambda_{n-1}\lambda_n}^{\varepsilon_{\lambda_{n-1}}}\, S_{\lambda_n\lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_n}} = 1.$$

Eine der Relationen (8) — etwa die letzte — können wir durch (8a) ersetzen. Die C_σ in (8) seien durch die Relationen (7a) erklärt.

4. Wir wollen zeigen, daß die G_ϱ **bis auf eines durch Reduktionen zweiter Art eliminiert und allein die Relationen** (8a) **beibehalten** werden können.

Die Knotenprojektion habe e Verzweigungsgebiete, k Stränge und f Gebiete (ausschließlich Γ_0). Es ist dann nach dem **Eulerschen Satz**

$$(9)\qquad e + f = k + 1.$$

Wir legen in jedem Gebiet Γ_ϱ einen Punkt P_ϱ fest. Ein Punkt, etwa P_0, soll ausgezeichnet werden. Die Punkte P_α der Γ_0 benachbarten Gebiete Γ_α verbinden wir durch Streckenzüge mit P_0 so, daß ein Streckenzug nur Punkte des Stranges $\gamma_{0\alpha}$ mit der Knotenprojektion gemeinsam hat. Grenzt aber ein Gebiet $\Gamma_{\bar{\alpha}}$ längs mehreren Strängen an Γ_0, dann wird nur ein Streckenzug von P_0 nach $P_{\bar{\alpha}}$ willkürlich festgelegt. Wir nehmen dann die Gebiete Γ_β, die einem Gebiet Γ_{α_1} benachbart sind. Die Punkte P_β verbinden wir in derselben Weise mit P_{α_1}, wie P_α mit P_0 mit Ausnahme derjenigen Punkte $P_{\beta'}$, zu denen schon ein Streckenzug hinführt. Wir fahren so fort, bis zu jedem P_ϱ ein Streckenzug führt. Hierdurch wird ein Weg von P_0 aus zu jedem Gebiet in eindeutiger Weise festgelegt. **Die Gesamtheit dieser Streckenzüge bildet einen Baum** $\mathfrak{B}_1$. Es entspricht **jedem Gebiet** Γ_ϱ **eine gerichtete Strecke und umgekehrt.** Die Streckenzüge schneiden insgesamt also f Stränge je einmal.

Von den diesen Strängen zugeordneten Relationen (8) wird je eine — nach (5) gehören zu jedem Strang vorläufig 2 Relationen, wovon aber die eine überflüssig ist — beibehalten.

Nach (9) werden von den Streckenzügen $k - f = e - 1$ Stränge nicht geschnitten. Diesen Strängen können wir als Ersatz für die Relationen (5) $(e-1)$ Relationen (8a) zuordnen. Nehmen wir nämlich die von den Streckenzügen des Baumes $\mathfrak{B}_1$ geschnittenen Streckenzüge des Graphen $\mathfrak{C}$ (der ja die Knotenprojektion repräsentiert) aus dem Graphen heraus, dann bleibt ein Baum $\mathfrak{B}_2$ übrig. Wäre $\mathfrak{B}_2$ kein Baum, dann müßte man auf mindestens zwei verschiedenen Wegen von einem Eckpunkt Q_1 zu einem anderen Eckpunkt Q_2 gelangen können. Diese Wege würden dann mindestens ein Gebiet Γ einschließen, in das der Baum $\mathfrak{B}_1$ nicht hineinragt. Ebenso kann $\mathfrak{B}_2$ nicht in zwei Teile zerfallen; denn dann gäbe es in $\mathfrak{B}_1$ mindestens einen geschlossenen Weg, was nach der Definition von $\mathfrak{B}_1$ nicht möglich ist. Orientieren wir $\mathfrak{B}_2$, so endet jede Strecke von $\mathfrak{B}_2$ in einer bestimmten Ecke von $\mathfrak{B}_2$. Für die $(e-1)$ Stränge, die den Strecken des Baumes $\mathfrak{B}_2$ entsprechen, nehmen wir dann als Relationen (5a) die den Ecken entsprechenden Relationen (8a). Behalten wir alle e Relationen (8a) bei, so ist eine Relation Folgerelation der übrigen.

Wir können nun die G_ϱ mit Hilfe der beibehaltenen Relationen (8) durch G_0 und durch die $S_{\lambda\mu}$ in eindeutiger Weise bestimmen, wenn wir die Reduktion so durchführen, wie es die von P_0 ausgehenden Streckenzüge vorschreiben. Um etwa G_ϱ zu eliminieren, zeichnen wir im Baum $\mathfrak{B}_1$ den (eindeutig bestimmten) Weg, der von P_0 nach P_ϱ hinführt. Den Streckenzügen dieses Weges entspricht eine Folge von eindeutig bestimmten Relationen (8), welche durch die $S_{\lambda\mu}$ und G_ϱ ausgedrückt, die Form haben:

(8b) $$G_\beta = L_1 G_\gamma L_2, \quad L_\nu = L_\nu(S_{\lambda\mu}) \qquad (\beta \neq \gamma).$$

Ich kann daraus einen wohlbestimmten Ausdruck für G_ϱ

(8c) $$G_\varrho = M_1 G_0 M_2, \quad M_\nu = M_\nu(S_{\lambda\mu})$$

ableiten. Umgekehrt folgen die Relationen (8b) und (8) aus den Relationen (8c).

Setzen wir diese Werte in die Gebietsrelationen (6) ein, dann dürfen die Relationen (8c) fortgelassen werden. *Die Knotengruppe hat also nur noch die Erzeugenden G_0 und $S_{\lambda\mu}$. Zwischen ihnen bestehen die Gebiets- und die Eckrelationen.*

5. Den Weg von P_0 nach einem P_ν längs den Streckenzügen des Baumes $\mathfrak{B}_1$ können wir in der Fundamentalgruppe einem Weg L_ν zuordnen, der von P_0 kommend unter dem Knoten läuft, durch das Gebiet Γ_ν einmal hindurchgeht und oberhalb des Knotens nach P_0 zurückführt. Nehmen wir speziell einen Weg $P_0 P_{\alpha_1} P_{\alpha_2} \ldots P_{\alpha_n}$; und setzen

$$(10)\qquad \begin{aligned} L_{a_1} &= S_{0a_1}^{\varepsilon_{a_1}},\\ L_{a_2} &= S_{0a_1}^{\varepsilon_{a_1}} S_{a_1 a_2}^{\varepsilon_{a_2}},\\ &\dots\dots\dots\\ L_{a_n} &= S_{0a_1}^{\varepsilon_{a_1}} S_{a_1 a_2}^{\varepsilon_{a_2}} \dots S_{a_{n-1}a_n}^{\varepsilon_{a_n}}. \end{aligned}$$

Aus (10) folgt

$$(11)\qquad \begin{aligned} S_{0a_1}^{\varepsilon_{a_1}} &= L_{a_1},\\ S_{a_1 a_2}^{\varepsilon_{a_2}} &= L_{a_2} L_{a_1}^{-1},\\ &\dots\dots\dots\\ S_{a_{n-1}a_n}^{\varepsilon_{a_n}} &= L_{a_n} L_{a_{n-1}}^{-1}. \end{aligned}$$

Führen wir für alle Streckenzüge des Baumes $\mathfrak{B}_1$ die Elemente L_ν ein, so entspricht jedem Gebiet Γ_ν ein Element L_ν, und es ist allgemein

$$L_\lambda \cdot S_{\lambda\mu}^{\varepsilon_\lambda} = L_\mu,$$

also

$$(12)\qquad S_{\lambda\mu}^{\varepsilon_\lambda} = L_\mu L_\lambda^{-1},$$

wie sich aus (10) bzw. (11) und den Eckrelationen (8a) ergibt.

Wir führen nun die L_ν mittels der Relationen (11) und (12) für $S_{\lambda\mu}$ in die Relationen ein. Die Eckrelationen verschwinden identisch. Die Relationen (12), die Folgerelationen der Eckrelationen sind, verschwinden auch identisch; ebenfalls schließlich die Relationen (11).

Die Reduktion ist jetzt beendet. *Die Knotengruppe wird dargestellt durch die Erzeugenden G_0 und L_ν. Zwischen ihnen bestehen die Gebietsrelationen*

$$(13)\qquad G_\varrho = \prod_{\mu=m}^{1} (L_\varrho L_{\nu_\mu}^{-1})^{\varepsilon_{\nu_\mu}(\bar{s}_{\varrho\nu_\mu}+[1])} G_\varrho^{\varepsilon} \prod_{\mu=1}^{m} (L_\varrho L_{\nu_\mu}^{-1})^{-\varepsilon_{\nu_\mu}\bar{s}_{\varrho\nu_\mu}},$$

wo die G_ϱ durch (8c) als Produkte aus G_0 und $S_{\lambda\mu}$ bestimmt sind. Es ist $[1] = 0$ oder 1, je nachdem $s_{\varrho\nu_\mu} = 2\bar{s}_{\varrho\nu_\mu}$ oder $= 2\bar{s}_{\varrho\nu_\mu} + 1$. $s_{\varrho\nu_\mu}$ ist die Anzahl der Überkreuzungen des Stranges $\gamma_{\varrho\nu_\mu}$. Es ist $L_0 \equiv 1$. Die G_ϱ lassen sich nach (1) als Transformierte von G_0 schreiben: $G_\varrho = M_\varrho G_0 M_\varrho^{-1}$.

Wir beschränken uns im folgenden auf alternierende Knoten, d. h. wir nehmen an, daß beim Durchlaufen der Knotenprojektion Unter- und Überkreuzungen miteinander abwechseln. Die Stränge um ein Gebiet Γ sind in diesem Fall alle in gleichem Sinn verdrillt. Daraus folgt, daß alle ε_{ν_μ} in (13) einander gleich sind.

6. Die Gruppe $\mathfrak{K}_2$[*]) des zweifachen Überlagerungsraumes des Knotens hat als Erzeugende

$$(14)\qquad L_\nu,\quad G_0 L_\nu G_0^{-1} = \bar{L}_\nu \quad \text{und} \quad [G_0^2].$$

---

*) K. Reidemeister, Hamb. Abhandl. 5 (1926), S. 19 usf

Die Relationen erhält man, indem man (13) und die mit G_0 transformierten Relationen (13) durch die Erzeugenden (14) ausdrückt.

Machen wir diese Gruppe abelsch und setzen wir $[G_0^2] = 1$, dann ist

$$G_\varrho^2 = 1 \quad \text{und} \quad G_\varrho M G_\varrho = G_0 M G_0 = M^{-1},$$

wo M zu $\mathfrak{K}_2$ gehört. Es ist daher

$$\bar{L}_\nu = L_\nu^{-1},$$

und die Relationen, die man aus (13) erhält, sind:

$$(15) \qquad (L_\varrho L_{\nu_1}^{-1})^{s_{\varrho\nu_1}} \dots (L_\varrho L_{\nu_m}^{-1})^{s_{\varrho\nu_m}} = 1.$$

Grenzen zwei Gebiete Γ_ϱ, Γ_{ν_μ} längs mehreren Strängen $\gamma'_{\varrho\nu_\mu} \dots \gamma^{(\bar{\lambda})}_{\varrho\nu_\mu}$ mit den Überkreuzungen $s'_{\varrho\nu_\mu} \dots s^{(\bar{\lambda})}_{\varrho\nu_\mu}$ aneinander, dann können wir in (15) $\prod_{(\lambda)=1}^{(\bar{\lambda})} (L_\varrho L_{\nu_\mu}^{-1})^{s^{(\lambda)}_{\varrho\nu_\mu}}$ natürlich zu $(L_\varrho L_{\nu_\mu}^{-1})^{\sum_1^{\bar{\lambda}} s^{(\lambda)}_{\varrho\nu_\mu}}$ zusammenfassen. Diese Zusammenfassung sei in (15) bereits vorgenommen, dann bedeutet $s_{\varrho\nu_\mu}$ die Gesamtanzahl von Überkreuzungen auf den Strängen, welche Γ_ϱ und Γ_{ν_μ} voneinander trennen.

Bei einem nicht-alternierenden Knoten würde man analog die Relationen

$$(15\text{a}) \qquad (L_\varrho L_{\nu_1}^{-1})^{\varepsilon_{\nu_1} s_{\varrho\nu_1}} \dots (L_\varrho L_{\nu_m}^{-1})^{\varepsilon_{\nu_m} s_{\varrho\nu_m}} = 1$$

erhalten.

Die Relationen (15) können wir auch so schreiben:

$$(16) \qquad L_\varrho^{\sum_{\mu=1}^{m} s_{\varrho\nu_\mu}} L_{\nu_1}^{-s_{\varrho\nu_1}} \dots L_{\nu_m}^{-s_{\varrho\nu_m}} = 1.$$

Dabei können mehrere L_{ν_μ} gleich $L_0 = 1$ sein. Das ist immer dann der Fall, wenn ein Strang oder mehrere Stränge eines Gebietes zum Rand von Γ_0 gehören.

Die Γ_0 entsprechende Relation lautet:

$$(16\text{a}) \qquad L_{\alpha_1}^{-s_{0\alpha_1}} \dots L_{\alpha_m}^{-s_{0\alpha_m}} = 1.$$

7. Es möge noch darauf hingewiesen werden, daß in der Auszeichnung von Γ_0 eine Willkür enthalten ist. Wir haben bei der Aufstellung der Fundamentalgruppe vorausgesetzt, daß der Punkt, von dem die Wege der Fundamentalgruppe ausgehen, in der Projektionsebene in Γ_0 liegt. Wir können diesen Punkt natürlich auch innerhalb eines anderen Gebietes Γ_ν annehmen. Dann bilden die Stränge dieses Gebietes den Rand.

Die aus den Exponenten der Relationen (16) gebildete Matrix hat $(e+1)$ Zeilen und e Kolonnen. Wir können die Zeilen so anordnen, daß die Glieder $\sum s_{\varrho\nu_\mu}$ die **Hauptdiagonale** der aus den e ersten Zeilen gebildeten Determinante besetzen. Die Exponenten der Relation (16a) stehen

dann in der letzten Zeile der Matrix. Die Summe der Glieder jeder Kolonne ist Null. Folglich kann eine Zeile, also etwa die letzte, fortgelassen werden.

Man erkennt dann, da ihrer Bedeutung nach $s_{\varrho\nu_\mu} = s_{\nu_\mu\varrho}$ ist, daß die so entstehende e-reihige Determinante symmetrisch ist.

§ 2.

Über Determinanten.

1. Wir beweisen einige Sätze über Determinanten, die folgende Gestalt haben:

$$(1) \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} A_1 + \sum a_{1\nu} & -a_{12} \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & A_2 + \sum a_{2\nu} \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} \cdots & & A_n + \sum a_{n\nu} \end{vmatrix}$$

Dabei sollen die A_ν, $a_{\mu\nu} \geqq 0$ sein. $\sum a_{i\nu}$ bedeute $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}$ mit $a_{ii} = 0$.

Diejenigen Unterdeterminanten von Δ_n, deren Hauptdiagonale nur aus Gliedern der Hauptdiagonalen von Δ_n bestehen, bezeichnen wir als Hauptminoren. Die Hauptminoren sind wieder Determinanten von derselben Gestalt wie Δ_n.

Sind die a_{ik} von Δ_n, die in der λ-, μ-, ν-, ...-ten Reihe stehen, bis auf die Glieder, die in dem zugehörigen Hauptminor stehen, sämtlich gleich Null, dann kann man Δ_n als Produkt von zwei Hauptminoren darstellen. Beispielsweise ist

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |2| \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Diese Hauptminoren kann man u. U. weiter zerlegen und man wird schließlich Δ_n als ein Produkt von einer Anzahl von Hauptminoren Δ_ν, die sich nicht weiter auf diese Art zerlegen lassen, erhalten. Die Δ_ν wollen wir „irreduzibel" nennen.

Wir nehmen jetzt an, Δ_n sei irreduzibel. m Zeilen der Determinante bilden eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. In ihr kommt genau ein m-reihiger Hauptminor vor.

Ersetzt man eine Kolonne des m-reihigen Hauptminors nacheinander durch die übrigen Kolonnen der Matrix, dann erhält man $(n - m)$ Determinanten der Matrix, die eine Schar m-reihiger Nebenminoren genannt werden soll. Wir beweisen nun die Sätze:

Satz 1. *Der Hauptminor ist* > 0 $(m < n)$.

Satz 2. *Jeder Nebenminor ist* $\leqq 0$.

Satz 3. *Der absolute Betrag der Summe der $(n-m)$ Nebenminoren einer Schar ist höchstens gleich dem Hauptminor.*

Zusatz. *Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn sämtliche A_ν, die in der Matrix vorkommen, gleich Null sind.*

Diese Sätze stehen übrigens in engem Zusammenhang mit den Ergebnissen von Perron und Frobenius über Matrizen mit positiven Elementen[9]).

Beweis. Die Sätze sind richtig für $m=1$. Sie seien richtig für m Zeilen $(m<n-1)$. Wir beweisen sie für $(m+1)$ Zeilen.

Es genügt offenbar, den Beweis für die letzten $(m+1)$ Zeilen durchzuführen. Wir können uns außerdem auf den Fall beschränken, daß die erste Kolonne des $(m+1)$-reihigen Hauptminors durch die übrigen Kolonnen ersetzt wird. Denn durch Vertauschung der ν-ten Zeile mit der μ-ten Zeile und der ν-ten Spalte mit der μ-ten Spalte $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ kann jede Zeile von Δ_n nach unten und jede Spalte nach rechts gebracht werden, ohne daß Struktur und Vorzeichen der Determinante und der Minoren verändert wird.

Wir betrachten also die Matrix

$$\left\| \begin{array}{llll} -a_{n-m,1} \ \ldots A_{n-m}+\sum a_{n-m,\nu}, & -a_{n-m,n-m+1} & \ldots & -a_{n-m,n} \\ -a_{n-m+1,1} \ldots \ -a_{n-m+1,n-m}, & A_{n-m+1}+\sum a_{n-m+1,\nu} & \ldots & -a_{n-m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n,1} \ldots \ \ldots -a_{n,n-m} \ldots & \ldots -a_{n,n-m+1} & \ldots & A_n+\sum a_{n,\nu} \end{array} \right\| \tag{2}$$

Mit $\Delta_{\lambda,\mu,\nu\ldots}$ wollen wir den Minor bezeichnen, der aus der $\lambda, \mu, \nu \ldots$-ten Kolonne der angegebenen Matrix gebildet wird. Die m-reihigen Minoren werden nur den letzten m Zeilen der Matrix entnommen. Ferner soll der m-reihige Hauptminor mit Δ_M, der $(m+1)$-reihige Hauptminor mit Δ_{M+1} bezeichnet werden.

Nach Voraussetzung ist nun:

$$\Delta_M > 0, \tag{3a}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_{\nu,n-m+2\ldots n} & \leqq 0 \\ \Delta_{n-m+1,\nu,n-m+3\ldots n} & \leqq 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \Delta_{n-m+1,\ldots n-1,\nu} & \leqq 0 \end{array} \right. \qquad (\nu = 1 \ldots n-m), \tag{3b}$$

$$\begin{array}{ll} \sum_{\nu=1}^{n-m} |\Delta_{\nu,n-m+2\ldots n}| & \leqq \Delta_M, \\ \sum_{\nu=1}^{n-m} |\Delta_{n-m+1,\nu,n-m+3\ldots n}| & \leqq \Delta_M \quad \text{usw.} \end{array} \tag{3c}$$

---

[9]) Vgl. G. Frobenius, Berl. Ber. 1908, XXVI, S. 471—476.

Dabei gilt das Gleichheitszeichen in (3c) nur dann, wenn alle A_ν von Δ_M gleich Null sind.

Behauptet wird:

(4a) $$\Delta_{M+1} > 0,$$

(4b) $$\Delta_{\bar\nu,\, n-m+1 \dots n} \leqq 0 \qquad (\bar\nu = 1 \dots n-m+1),$$

(4c) $$\sum_{\bar\nu=1}^{n-m+1} |\Delta_{\bar\nu,\, n-m+1 \dots n}| \leqq \Delta_{M+1}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (4c) nur dann, wenn alle A_ν von Δ_{M+1} gleich Null sind.

Zum Beweis entwickeln wir die $(m+1)$-reihigen Minoren nach der ersten Zeile der Matrix (2). Es ist dann:

(5) $$\Delta_{M+1} = (A_{n-m} + \sum a_{n-m,\,\nu}) \cdot \Delta_M$$
$$+ a_{n-m,\, n-m+1} \cdot \Delta_{n-m,\, n-m+2 \dots n} - a_{n-m,\, n-m+2} \cdot \Delta_{n-m,\, n-m+1,\, n-m+3 \dots n}$$
$$\dots + - \dots (-1)^n \cdot a_{n-m,\, n} \cdot \Delta_{n-m \dots n-1}$$

oder

(5a) $$\Delta_{M+1} = (A_{n-m} + \sum a_{n-m,\,\nu}) \cdot \Delta_M + a_{n-m,\, n-m+1} \cdot \Delta_{n-m,\, n-m+2 \dots n}$$
$$+ a_{n-m,\, n-m+2} \cdot \Delta_{n-m+1,\, n-m,\, n-m+3 \dots n}$$
$$+ \dots + a_{n-m,\, n} \cdot \Delta_{n-m+1 \dots n-1,\, n-m}.$$

Andererseits ist:

(6) $$\Delta_{\bar\nu,\, n-m+1 \dots n} = - a_{n-m,\, \bar\nu} \cdot \Delta_M + a_{n-m,\, n-m+1} \cdot \Delta_{\bar\nu,\, n-m+2 \dots n}$$
$$+ \dots + a_{n-m,\, n} \cdot \Delta_{n-m+1 \dots n-1,\, \bar\nu}$$

und demnach

(7) $$\sum_{\bar\nu=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar\nu,\, n-m+1 \dots n} = - \sum_{\bar\nu=1}^{n-m-1} a_{n-m,\, \bar\nu} \cdot \Delta_M$$
$$+ a_{n-m,\, n-m+1} \cdot \sum_{\bar\nu=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar\nu,\, n-m+2 \dots n} + \dots + a_{n-m,\, n} \cdot \sum_{\bar\nu=1}^{n-m-1} \Delta_{n-m+1 \dots n-1,\, \bar\nu}.$$

Nach (3c) ist

(8) $$-\Big(\sum_{\bar\nu=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar\nu,\, n-m+2 \dots n}\Big) \leqq \Delta_M + \Delta_{n-m,\, n-m+2 \dots n}$$
$$-\Big(\sum_{\bar\nu=1}^{n-m-1} \Delta_{n-m+1,\, \bar\nu,\, n-m+3 \dots n}\Big) \leqq \Delta_M + \Delta_{n-m+1,\, n-m,\, n-m+3 \dots n} \text{ usw.}$$

Für (7) kann man folglich schreiben:

(9) $$\sum_{\bar\nu=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar\nu,\, n-m+1 \dots n} \geqq - \sum_{\bar\nu=1}^{n-m-1} a_{n-m,\, \bar\nu} \cdot \Delta_M$$
$$+ a_{n-m,\, n-m+1} \{-\Delta_M - \Delta_{n-m,\, n-m+2 \dots n}\} + \dots$$
$$+ a_{n-m,\, n} \{-\Delta_M - \Delta_{n-m+1 \dots n-1,\, n-m}\}$$

oder, wenn man die Glieder mit Δ_M zusammenfaßt:

$$\sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar{\nu}, n-m+1 \ldots n} \geqq - \sum_{\nu=1}^{n} a_{n-m, \nu} \cdot \Delta_M \tag{9a}$$

$$- a_{n-m, n-m+1} \cdot \Delta_{n-m, n-m+2 \ldots n} - \cdots - a_{n-m, n} \cdot \Delta_{n-m+1 \ldots n-1, n-m}.$$

Aus (5a) und (9a) folgt dann

$$\Delta_{M+1} + \sum_{\bar{\nu}=1}^{n-m-1} \Delta_{\bar{\nu}, n-m+1 \ldots n} \geqq A_{n-m} \cdot \Delta_M. \tag{10}$$

(4b) folgt aus (6), da nach (3) alle Summanden der Determinantenentwicklung höchstens gleich Null sind.

(4c) folgt aus (10). Wir diskutieren das Gleichheitszeichen. Ist $A_{n-m} > 0$, dann gilt in (4c) das Ungleichheitszeichen, da nach (3a) $\Delta_M > 0$. Ist $A_{n-m} = 0$ und gibt es in Δ_M mindestens ein $A_\nu \neq 0$, dann gilt in (3c) und folglich auch in (8) das Ungleichheitszeichen. Da wir Δ_n als nicht reduzierbar voraussetzen, muß mindestens ein $a_{n-m, \nu} > 0$ sein; es gilt also auch in (9) und folglich in (10) und (4c) das Ungleichheitszeichen. Sind schließlich alle A_ν von Δ_{M+1} gleich Null, dann steht wegen (3c) überall in den Determinantenentwicklungen das Gleichheitszeichen und folglich auch in (4c).

Aus (10) folgt in Verbindung mit (4b) natürlich $\Delta_{M+1} \geqq 0$. (4a) selbst, $\Delta_{M+1} > 0$, wird weiter unten bewiesen.

Für $m = n - 1$ folgt:

Jede $(n-1)$*-reihige Determinante einer* $(n-1)$*-reihigen Matrix ist ihrem absoluten Betrage nach höchstens gleich dem* $(n-1)$*-reihigen Hauptminor, der in der Matrix vorkommt.* Daraus ergibt sich für die n-reihige Determinante die Abschätzung:

$$\Delta_n \geqq A_1 \cdot \Delta_{n-1} \tag{11}$$

und aus der Diskussion des Gleichheitszeichens für (4c) folgt, falls in Δ_{n-1} mindestens ein $A_\nu \neq 0$ ist:

$$\Delta_n > A_1 \cdot \Delta_{n-1}. \tag{12}$$

Gleichung (11) gilt auch für reduzible Determinanten; Gleichung (12) gilt für reduzible Determinanten nur dann, wenn 1. in dem größten irreduziblen Hauptminor, der die erste Zeile enthält, mindestens ein $A_\nu \neq 0$ $(\nu \neq 1)$ vorkommt; 2. Δ_n in irreduzible Hauptminoren zerfällt, in denen mindestens je ein $A_\nu \neq 0$ ist.

Wenn alle $A_\nu = 0$ sind, ist natürlich

$$\Delta_n = 0.$$

Wenden wir diese Folgerungen auf Δ_{M+1} an, indem wir Δ_{M+1} in der Form der Determinante Δ_n schreiben und

$$A_{n-m+\mu} + \sum_{\lambda=1}^{n-m-1} a_{n-m+\mu,\lambda} = \bar{A}_{n-m+\mu}$$

setzen, dann sehen wir, daß Δ_{M+1} nur dann den Wert Null annehmen kann, wenn

$$\bar{A}_{n-m+\mu} = 0$$

ist. Da alle $A_\nu, a_{\nu,\mu} \geqq 0$ sind, folgt hieraus außer

$$A_{n-m+\mu} = 0$$

noch

$$a_{n-m+\mu,\lambda} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, m+1 \\ \mu = 1, 2, \ldots, m+1 \end{pmatrix},$$

also wäre Δ_n reduzierbar, was gegen die Voraussetzung ist. Folglich ist

$$\Delta_{M+1} > 0 \quad \text{(siehe (4a))}.$$

2. Wir wenden die bewiesenen Ungleichungen auf **Determinanten aus ganzen Zahlen** an und zeigen

Satz 4. *Wenn*

α) in Δ_n $\sum A_\nu \geqq 2$ ist;

β) in sämtlichen Hauptminoren für die $\bar{A}_\nu$ die gleichen Voraussetzungen gelten wie in Δ_n für die A_ν; dann ist

$$\Delta_n \geqq \sum_\nu A_\nu + \sum_{\mu,\nu}^{\mu>\nu} a_{\mu\nu}. \tag{13}$$

Beweis. Wir können die Zeilen und die Spalten so umordnen, daß $A_1 \neq 0$ ist; daß ferner, wenn wir die erste Zeile und die erste Spalte fortstreichen, $\bar{A}_2 = A_2 + a_{21} \neq 0$ ist, usw. Ist Δ_m eine reduzible Determinante mit $\bar{A}_m = 1$, so gibt es in dem größten irreduziblen Hauptminor, der die erste Zeile von Δ_m enthält, ein $\bar{A}_j \neq 0$ $(j \neq m)$. Es ist dann nach (11) und (12)

$$\Delta_n > \Delta_{n-1} \geqq \Delta_{n-1} + 1 \quad \text{für} \quad A_1 = 1,$$
$$\Delta_n \geqq A_1 \cdot \Delta_{n-1} \quad \text{für} \quad A_1 > 1,$$

falls $\Delta_{n-1} > 1$ ist, also allgemein

$$\Delta_n \geqq A_1 + \Delta_{n-1}.$$

Analog ist, falls $\Delta_{n-2} > 1$ ist,

$$\Delta_{n-1} \geqq \bar{A}_2 + \Delta_{n-2} = A_2 + a_{21} + \Delta_{n-2},$$

also

$$\Delta_n \geqq A_1 + A_2 + a_{21} + \Delta_{n-2}$$

usf. Da nach Voraussetzung $\Delta_1 > 1$ ist, gilt also (13).

§ 3.

Anwendung auf die Torsionszahlen der Knoten.

1. Die Matrix der Exponenten aus den Relationen (16) des § 1 ist eine Determinante von der Art (1) des § 2. Die $a_{\lambda\mu} = s_{\lambda\mu}$ sind die Anzahlen der Überkreuzungen des Stranges $\gamma_{\lambda\mu}$, der die beiden Gebiete Γ_λ und Γ_μ voneinander trennt. Die A_ν sind die Anzahlen der Überkreuzungen auf den Strängen, die Γ_0 begrenzen. — Die $\bar{A}_\nu$ $(n - m < \nu \leqq n)$ für den Hauptminor aus den letzten m Zeilen sind die Anzahlen der Überkreuzungen, welche die Gebiete Γ_μ $(0 \leqq \mu \leqq n - m)$ mit einem der Gebiete Γ_ν gemeinsam haben.

Liegen immer auf den Strängen, die einem geschlossenen Weg des Graphen $\mathfrak{C}$ entsprechen, mindestens zwei Überkreuzungen, so sind also gewiß für die zugehörige Determinante die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt und es ist also die Anzahl der Überkreuzungen höchstens gleich dem Produkt aus den Torsionszahlen des Knotens in der Gruppe $\mathfrak{K}_2$.

Liegt nun auf den Strängen, die einem geschlossenen Weg des Graphen $\mathfrak{C}$ entsprechen, nur eine Überkreuzung, dann läßt sich diese Überkreuzung immer herausdrillen; die Projektion bleibt alternierend. Seien nämlich Γ_{α_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$ die Gebiete, die von einem geschlossenen Weg des Graphen $\mathfrak{C}$ begrenzt werden (Fig. 6a). In E stößt dann ein Verzweigungsgebiet mit sich selbst zusammen. Wir drehen den Teil des Knotens, der Γ_{α_ν} entspricht, um 180° so, daß die Verdrillung bei E verschwindet (Fig. 6b). In den Gebieten, die nicht zu Γ_{α_ν} gehören, hat sich nichts geändert. In Γ_{α_ν} sind wegen der Drehung die Überkreuzungen in Unterkreuzungen verwandelt worden; der Knoten liegt also hier wieder alternierend. Das gleiche gilt für die E benachbarten Doppelpunkte. Der Knoten liegt also wieder alternierend. Die Gesamtzahl der Überkreuzungen der Knotenprojektion hat sich dabei um eins verringert. — Diese Deformation der Knotenprojektion ähnelt übrigens der auf S. 147 dieser Abhandlung angegebenen Deformation, wo der Fall ausgeschlossen wird, daß ein Strang je ein Gebiet Γ zweimal begrenzt. Nach endlich vielen Schritten müssen wir also zu einer Knotenprojektion gelangen, die die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt, oder zum Kreis.

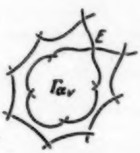


Fig. 6a.

Fig. 6b.

Insbesondere ist also die Minimalzahl m der Überkreuzungen eines alternierenden Knotens höchstens gleich dem Produkt der Torsionszahlen.

Der Kreis hat die Torsionszahl Eins. *Soll also eine vorgegebene alternierende Projektion die Projektion eines Kreises sein, dann müssen sich in endlich vielen Schritten mit Hilfe des angegebenen Verfahrens die Überkreuzungen herausdrillen lassen.*

In analoger Weise läßt sich entscheiden, ob eine vorgegebene alternierende Projektion die Projektion einer Kleeblattschlinge ist. Denn das Produkt der Torsionszahlen hat für dieselbe den Wert 3. Die Minimalzahl der Überkreuzungen muß also kleiner oder gleich 3, also 3 sein; und ein Knoten mit drei Überkreuzungen ist eine Kleeblattschlinge.

2. Für die nichtalternierenden Knoten erhält man nach (15a) des § 1 eine Determinante von der Form (1) des § 2, wenn man zuläßt, daß die $a_{\lambda\mu}$ und die A_ν auch negative Werte annehmen dürfen. Hier gelten die Abschätzungsformeln des § 2 nicht mehr. Die Determinante kann beliebige Werte annehmen.

Nehmen wir beispielsweise einen nichtalternierenden Brezelknoten mit zwei Gebieten und A bzw. B bzw. C Überkreuzungen auf den einzelnen Strängen (Fig. 7). Die Torsionszahl ist

$$t=\begin{vmatrix} A+B & -B \\ -B & B-C \end{vmatrix}=AB-C(A+B).$$

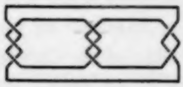


Fig. 7.

Für $A=B=3$, $C=2$ ist $t=3$. Von diesem Knoten gibt es übrigens keine alternierende Projektion. Gäbe es nämlich eine alternierende Projektion, so könnten wir sie mit Hilfe der von uns angegebenen Deformation in eine alternierende Projektion mit höchstens drei Überkreuzungen überführen. Der Knoten müßte also mit der Kleeblattschlinge oder dem Kreis identisch sein. Das ist aber nicht der Fall, denn seine Gruppe ist von der Gruppe der Kleeblattschlinge bzw. des Kreises verschieden.

(Eingegangen am 3. 5. 1929.)

Beiträge zur Differentialgeometrie zweidimensionaler allgemein-metrischer Flächen.

Von

Gerhard Grüß in Berlin.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit, die an die Finslerschen[1]) Untersuchungen der Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen anknüpft, bringt im Anschluß an meine Dissertation[2]) einige weitere Ergebnisse über Kurvennetze ohne Umwege; u. a. den Begriff der Tchebychefschen Gewebe[3]), die auch zu diesen Netzen gehören. Im zweiten Teil wird zunächst die Parallelübertragung auf allgemein-metrischen Flächen definiert, und zwar wesentlich anders als in den Berwaldschen[4]) Untersuchungen allgemein-metrischer Räume. Diese Abweichung ließ sich angesichts der grundsätzlichen Unterschiede zwischen den Entwicklungen von Finsler und Berwald nicht vermeiden, von denen der erste den Begriff des Parallelismus gar nicht einführt, während Berwald ihn (wie auch die Winkel- und Längenmessung usw.) bezüglich eines in der Mannigfaltigkeit gegebenen Feldes von ausgezeichneten Richtungen definiert, ein Gedanke, der den Finslerschen Untersuchungen und damit der vorliegenden Arbeit durchaus fremd ist. Ob sich die hier entwickelte Theorie der Parallelübertragung als ebenso fruchtbar erweist wie die Berwaldsche, muß allerdings dahingestellt bleiben. Als erste Anwendung ergibt sich die Verallgemeinerung eines Zusammenhanges, der auf

[1]) P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Inauguraldissertation, Göttingen 1918.

[2]) G. Grüß, Über Gewebe auf Flächen in dreidimensionalen allgemeinen metrischen Räumen, Math. Annalen **100**, Heft 1.

[3]) P. L. Tchebychef, Œuvres, 2, S. 708.

[4]) L. Berwald, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume, Journ. f. d. r. u. ang. Mathematik **156**, I, S. 191ff.; II, S. 211ff. Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Maßbestimmung, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. **34**, Heft 9 bis 12. Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Math. Zeitschr. **25**, S. 40ff.

Flächen Riemannscher Metrik zwischen Tchebychefschen Geweben und Parallelübertragung besteht[5]). Der dritte Teil enthält einige Bemerkungen über die Möglichkeit, Flächenelement und Oberfläche einer allgemein-metrischen Fläche zu definieren. Auch diese Fragen sind schon von Berwald[6]) untersucht worden, wobei wieder der Begriff des ausgezeichneten Linienelementes eine Rolle spielt, während die Finslersche Arbeit nichts über die Flächenmessung enthält.

I.

1. Vorbemerkungen. Auf der in den dreidimensionalen Raum der x_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ eingebetteten Fläche $x_\nu = x_\nu(u, v)$ wird durch das Grundintegral eines einfachsten regulären Variationsproblems die Längenmessung eingeführt: die Kurve $\{u(t), v(t)\}$ hat zwischen den durch t_1 und t_2 charakterisierten Punkten die Länge

$$(1)\qquad s = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x_\nu(u, v), \frac{\partial x_\nu}{\partial u} u' + \frac{\partial x_\nu}{\partial v} v'\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(u, v, u', v')\, dt$$
$$\left(u' = \frac{du}{dt},\ v' = \frac{dv}{dt}\right).$$

Der Übergang von den Parameterlinien $u =$ konst., $v =$ konst. zu anderen Parameterlinien geschieht durch die in einem Bereich (auf dessen Untersuchung wir uns im allgemeinen beschränken) reguläre Transformation

$$(2)\qquad u = u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = v(\bar{u}, \bar{v}) \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0$$

und führt das Linienelement

$$ds = f(u, v, u', v')\, dt \text{ über in } ds = \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}', \bar{v}')\, d\tau.$$

Bogenlänge, Winkel usw. sind gegenüber der Transformation invariant, daher kann man $f(u, v, u', v')$ als Maßbestimmung der Fläche bezeichnen.

Die Funktion f sei für alle u, v des Bereiches und für alle u', v' mit Ausnahme von $u' = v' = 0$ definiert; sie sei (positiv) definit und speziell von Null verschieden, doch kann es vorkommen, daß durch Einführung gewisser Parameterlinien einzelne Punkte singulär werden $(f = 0)$, und zwar dort, wo die Transformation (2) irregulär wird. Ferner soll f in u' und v' positiv-homogen erster Ordnung sein, so daß folgende Gleichungen gelten:

$$(3)\qquad \begin{cases} f(u, v, ku', kv') = k f(u, v, u', v') & (k > 0) \\ u' f_{u'} + v' f_{v'} = f, \quad \dfrac{f_{u'u'}}{v'^2} = \dfrac{f_{u'v'}}{-u'v'} = \dfrac{f_{v'v'}}{u'^2} \equiv f_1. \end{cases}$$

---

[5]) L. Bianchi, Le reti di Tchebychef sulle superficie ed il parallelismo nel senso di Levi-Civita, Bolletino della Unione matematica Italiana 1 (1922), p. 1 ff.

[6]) Außer den unter [4]) genannten Arbeiten vgl. P. Funk und L. Berwald, Flächeninhalt und Winkel in der Variationsrechnung, Lotos-Prag 67/68, S. 52 ff.

Endlich sei f genügend oft stetig differentiierbar nach allen Veränderlichen. Alle aus f durch die Transformation (2) erzeugten Funktionen $\bar{f}$ haben dann die entsprechenden Eigenschaften.

Finsler definiert den Winkel φ, unter dem sich die Kurven $(C)=(u_0(t), v_0(t))$ und $(\Gamma)=(u_1(t), v_1(t))$ schneiden, durch folgende Konstruktion: Auf der Kurve (Γ) wird von dem Schnittpunkt der Kurven aus eine Bogenlänge $\gamma=\int f\,dt$ abgetragen und ihr Endpunkt auf die Kurve (C) transversal projiziert; „transversal" heißt, daß die projizierende Kurve die Kurve (C) transversal im Sinn des Variationsproblems $\delta\int f\,dt=0$ schneidet. Die Länge der Projektion sei c. Dann ist nach der Finslerschen Definition

$$(4)\qquad \cos\varphi=\lim_{\gamma\to 0}\frac{c}{\gamma}=\frac{u_1' f_{u'}(\ldots u_0', v_0')+v_1' f_{v'}(\ldots u_0', v_0')}{f(\ldots u_1', v_1')}=\cos(\overrightarrow{\Gamma C}),$$

sgn φ bleibt willkürlich, $|\varphi|$ soll möglichst klein sein. Da der so definierte Winkel im allgemeinen von der Reihenfolge der Schenkel abhängig ist, unterscheiden wir den durch (4) definierten „von der Kurve (Γ) zur Kurve (C) gemessenen" Winkel φ von dem im umgekehrten Sinn gemessenen Winkel $(\overrightarrow{C\Gamma})$. Nur im Fall der Riemannschen Maßbestimmung ist stets $(\overrightarrow{C\Gamma})=(\overrightarrow{\Gamma C})$, bei beliebigem $f(u, v, u', v')$ nur, wenn sich die Kurven berühren $(\cos\overrightarrow{C\Gamma}=\cos\overrightarrow{\Gamma C}=1)$.

2. Ein Satz über Kurvennetze ohne Umwege [7]. Ein Kurvennetz

$$(5)\qquad (\mathrm{I})\quad u=u(\alpha,\beta),\quad v=v(\alpha,\beta)\quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)}\neq 0$$

heißt „ohne Umwege" oder ein Gewebe, wenn die (im Sinn der Maßbestimmung f gemessene) Bogenlänge eines beliebigen, nur aus Netzkurven bestehenden geschlossenen Weges gleich null ist. Voraussetzung ist, daß die Netzkurven in bestimmter Weise orientiert sind, was durch den definiten Charakter der Funktion f gewährleistet wird. Offenbar ist für die Gewebeeigenschaft des Netzes (5) notwendig und hinreichend, daß

$$(6)\qquad J\equiv\frac{\partial}{\partial\alpha}f(u, v, u_\beta, v_\beta)-\frac{\partial}{\partial\beta}f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)=0$$

gilt. Unter den Winkelhalbierenden des Netzes (5) sollen nun die Kurven verstanden werden, die in jedem Punkt mit den Netzkurven $\alpha=$ konst. bzw. $\beta=$ konst. gleiche Winkel einschließen, und zwar von den Netzkurven zu den Winkelhalbierenden gemessen, d. h. die Integralkurven

$$(7)\qquad u=u_0(t, A),\qquad v=v_0(t, A)$$

---

[7]) Ausführliche Literaturangaben über Kurvennetze ohne Umwege auf Flächen im Euklidischen Raum bei G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raum, 2. Aufl., 1 (1911), S. 181. Auf allgemein-metrischen Flächen sind solche Netze in der unter [3]) genannten Arbeit untersucht worden.

der Differentialgleichung

$$\text{(8)}\quad \frac{u_\alpha f_{u'}(\ldots u_0', v_0') + v_\alpha f_{v'}(\ldots u_0', v_0')}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)} = \frac{u_\beta f_{u'}(\ldots u_0', v_0') + v_\beta f_{v'}(\ldots u_0', v_0')}{f(u, v, u_\beta, v_\beta)} = \cos\omega,$$

wo ω durch diese Gleichung als der halbe Maschenwinkel des Netzes definiert wird. Mit Hilfe der Winkelhalbierenden (7) geht die Integrabilitätsbedingung (6) über in

$$\text{(9)}\quad \frac{G(u_0, v_0)}{\cos\omega} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\omega}\right) \cdot f_{v'}(u, v, u_0', v_0') - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos\omega}\right) f_{u'}(u, v, u_0', v_0') = 0,$$

worin G die linke Seite der Euler-Weierstraßschen Differentialgleichung

$$\text{(10)}\quad \begin{aligned} G \equiv\, & f_1(u, v, u_0', v_0') \cdot (u_0' v_0'' - v_0' u_0'') \\ & + f_{v'u}(u, v, u_0', v_0') - f_{u'v}(u, v, u_0', v_0') = 0 \end{aligned}$$

bedeutet. Aus der Gleichung (9) folgen nun leicht zwei Sätze über *gestreifte* Gewebe*), unter denen solche verstanden werden sollen, bei denen der halbe Maschenwinkel ω, der stets von den Netzkurven zur Winkelhalbierenden gemessen wird, längs der Transversalen der Winkelhalbierenden konstanten Wert hat.

Satz. *Konstruiert man zu einem vorgelegten gestreiften Gewebe* (I) *ein zweites Netz*

$$\text{(11)}\qquad \text{(II)}\quad u = \mathfrak{u}(a, b), \qquad v = \mathfrak{v}(a, b) \qquad \frac{\partial(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})}{\partial(a, b)} \neq 0$$

dadurch, daß man in jedem Knotenpunkt des Netzes (I) *zwei mit seiner Winkelhalbierenden den Winkel* $0 < \overline{\omega} = \omega + \varphi < \frac{\pi}{2}$ *einschließende Kurven konstruiert, wobei* $\varphi = \varphi(u, v)$ *längs der Transversalen der Kurven* (7) *konstant ist, dann ist auch das Netz* (II) *ein gestreiftes Gewebe.*

Umkehrung: *Bilden zwei Gewebe mit ihren gemeinsamen Winkelhalbierenden die Winkel* ω *und* $\overline{\omega}$, *deren Differenz* φ $(0 < |\varphi| < \pi)$ *längs der Transversalen der Winkelhalbierenden konstant ist, dann sind beide Gewebe gestreift.*

Beweis des Satzes. Die Konstruktion des Netzes ist so durchführbar, daß man bei gegebenem $\varphi\ (u, v)\left(-\omega < \varphi < \frac{\pi}{2} - \omega\right)$ zwei voneinander verschiedene Lösungen U'/V' der Gleichung

$$\frac{U' f_{u'}(u, v, u_0', v_0') + V' f_{v'}(u, v, u_0', v_0')}{f(u, v, U', V')} = \cos\overline{\omega} = \cos(\omega + \varphi)$$

sucht und die so erhaltenen Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dv} = \left(\frac{U'}{V'}\right)_1, \quad \frac{du}{dv} = \left(\frac{U'}{V'}\right)_2$$

*) Vgl. R. Rothe, Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz, Sitz.-Ber. d. B. M. G. 5 (1906), 1. Stück, S. 9.

integriert. Die Integralkurven bilden das Netz (II), dessen Winkelhalbierende die Kurven (7) sind. Da nun das Netz (I), das ja die gleichen Winkelhalbierenden hat, ein Gewebe ist, ist Gleichung (9) erfüllt, und da es gestreift ist, gilt

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\omega}\right) du_1 + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos\omega}\right) dv_1 = 0,$$

worin du_1, dv_1 die zu u_0', v_0' transversale Richtung bestimmen:

$$(13) \qquad du_1 f_{u'}(u, v, u_0', v_0') + dv_1 f_{v'}(u, v, u_0', v_0') = 0.$$

Aus (9), (12), (13) folgt $G(u_0, v_0) = 0$, d. h. die Kurven (7) sind geodätische Linien. Also ist das Netz (II) dann und nur dann ein Gewebe, wenn

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\overline{\omega}}\right) \cdot f_{v'}(u, v, u_0', v_0') - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos\overline{\omega}}\right) \cdot f_{u'}(u, v, u_0', v_0') = 0$$

gilt, d. h. (II) ist entweder ein *gestreiftes* Gewebe oder *gar keines*. Da aber nach Voraussetzung $d\varphi = 0$, also auch $d\overline{\omega} = 0$ längs der Transversalen gilt, ist Gleichung (14) erfüllt, womit der Satz bewiesen ist.

Beweis der Umkehrung. Da die Netze (I) und (II) nach Voraussetzung Gewebe sind, gilt die Gleichung (9) für ω und $\overline{\omega} = \omega + \varphi$, d. h. es ist

$$(15) \quad G(u_0, v_0)\cos\omega + \sin\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial u} f_{v'}(u, v, u_0', v_0') - \frac{\partial\omega}{\partial v} f_{u'}(u, v, u_0', v_0')\right) = 0,$$

$$(16) \qquad G(u_0, v_0)\cos(\omega + \varphi)$$
$$+ \sin(\omega + \varphi)\left(\frac{\partial(\omega + \varphi)}{\partial u} f_{v'}(u, v, u_0', v_0') - \frac{\partial(\omega + \varphi)}{\partial v} f_{u'}(u, v, u_0', v_0')\right) = 0;$$

da $\varphi(u, v)$ nach Voraussetzung längs der Transversalen konstant ist, schließt man aus (12) (wenn ω durch φ ersetzt wird) und (13)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} f_{v'}(u, v, u_0', v_0') - \frac{\partial\varphi}{\partial v} f_{u'}(u, v, u_0', v_0') = 0,$$

so daß (15) und (16) in zwei homogene lineare Gleichungen für $G(u_0, v_0)$ und $\frac{\partial\omega}{\partial u} f_{v'}(\ldots u_0', v_0') - \frac{\partial\omega}{\partial v} f_{u'}(\ldots u_0', v_0')$ übergehen, deren Determinante

$$\sin(\omega + \varphi)\cos\omega - \cos(\omega + \varphi)\sin\omega = \sin\varphi$$

nicht verschwindet. Also sind die Winkelhalbierenden der Gewebe Extremalen, und die halben Maschenwinkel ω bzw. $\overline{\omega}$ sind längs der Transversalen der Winkelhalbierenden konstant, d. h. die Gewebe sind gestreift.

Die eben bewiesenen Sätze sind Verallgemeinerungen zweier von R. Rothe[*]) bewiesenen Sätze über Gewebe auf Flächen mit Riemannscher Maßbestimmung. Dort handelt es sich um Netze, die zueinander orthogonal

*) R. Rothe, Über die Bekleidung einer Fläche mit einem Gewebe („Kurvennetze ohne Umwege"), Sitz.-Ber. d. B. M. G., 7 (1907), 1. Stück, S. 16.

sind, für die also $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\omega$ ist; hier wird nur vorausgesetzt, daß φ längs der Transversalen der Winkelhalbierenden konstant ist, d. h. φ ist eine beliebige Funktion von ω allein. Allerdings lassen sich die Sätze im Fall der Riemannschen Metrik deshalb leichter formulieren, weil der Winkel zwischen verschiedenen Richtungen additiv ist, während hier alle Winkel zu den Winkelhalbierenden hin gemessen werden müssen, damit sich die Sätze so aussprechen lassen.

3. Tchebychefsche Gewebe. Eine besondere Art von Kurvennetzen ohne Umwege und zugleich die zuerst untersuchten sind die Tchebychefschen Gewebe[10]) oder Netze äquidistanter Kurven. Genau wie auf Flächen Riemannscher Metrik werden sie im Sinn einer allgemeinen Maßbestimmung dadurch charakterisiert, daß die Gegenseiten in einem beliebigen einfachen Netzviereck einander gleich sind, mit anderen Worten: *Ein Kurvennetz*

$$(17) \qquad \text{(III)} \quad u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta) \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0$$

bildet ein T.-Gewebe, wenn die Kurven $\beta =$ konst. *auf den Kurven* $\alpha =$ konst., *und die Kurven* $\alpha =$ konst. *auf den Kurven* $\beta =$ konst. *gleiche Bogenlängen* $\int f dt$ *abschneiden.*

Also ist die algebraisch gemessene Bogenlänge eines beliebigen Netzeckes null, d. h. T.-Gewebe sind Kurvennetze ohne Umwege. Sie werden analytisch durch folgende Bedingung charakterisiert.

Satz. *Das Netz* (III) *ist dann und nur dann ein T.-Gewebe, wenn die Funktionen* $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ *die Bedingungen*:

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(u, v, u_\beta, v_\beta) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \beta} f(u, v, u_\alpha, v_\alpha) = 0$$

erfüllen.

Beweis. 1. Wenn das Netz (III) ein T.-Gewebe ist, gilt nach der Definition

$$\int_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha} f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)\, d\alpha \Big|_{\beta=\beta_0} = \int_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha} f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)\, d\alpha \Big|_{\beta=\text{konst.}}$$

für jeden Wert α, β, also $\frac{\partial}{\partial \beta} f(u, v, u_\alpha, v_\alpha) = 0$. Entsprechend ergibt sich die zweite Gleichung (18).

2. Aus $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(u, v, u_\beta, v_\beta) = 0$ folgt $f(u, v, u_\beta, v_\beta) = p(\beta)$. Daher ist die von den Kurven $\beta = \beta_0$ und β auf der Kurve $\alpha = \alpha_0$ abgeschnittene Bogenlänge

$$s(\alpha_0; \beta, \beta_0) = \int_{\beta_0}^{\beta} p(\beta)\, d\beta = P(\beta) - P(\beta_0)$$

---

[10]) Vgl. Fußnote [8]). „Tchebychefsche Gewebe" werden zur Abkürzung im folgenden T.-Gewebe genannt.

unabhängig von α_0, d. h. die Kurven $\beta =$ konst. schneiden auf allen Kurven der Schar $\alpha =$ konst. die gleichen Bogenlängen ab. Entsprechendes folgt für die von Kurven $\alpha =$ konst. auf Kurven $\beta =$ konst. abgeschnittenen Bogenlängen. Die Gleichungen (18) zeigen, daß die allgemeine Integrabilitätsbedingung (6) der Gewebe für T.-Gewebe in zwei Gleichungen zerfällt.

Schneidet die eine Kurvenschar eines T.-Gewebes die zweite Schar transversal, so sind die Kurven der zweiten Schar Extremalen; das folgt einmal daraus, daß sie die Gefällkurven einer Schar geodätischer Äquidistanten sind[11]). Es läßt sich aber auch unmittelbar beweisen, und zwar am einfachsten, wenn man das T.-Gewebe selbst als Netz der Parameterlinien benutzt:

Durch die Transformation (17) möge $f(u, v, du, dv)$ in $g(\alpha, \beta, d\alpha, d\beta)$ übergehen; führt man auf den Kurven $\alpha =$ konst. β und auf den Kurven $\beta =$ konst. α als Parameter ein, dann erhält man an Stelle der Gleichungen (18)

$$(19)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha} g(\alpha, \beta, 0, 1) = \dfrac{\partial}{\partial \alpha} g_{\beta'}(\alpha, \beta, 0, 1) = 0 \\ \text{b)} & \dfrac{\partial}{\partial \beta} g(\alpha, \beta, 1, 0) = \dfrac{\partial}{\partial \beta} g_{\alpha'}(\alpha, \beta, 1, 0) = 0. \end{cases}$$

Wenn nun die Kurven $\beta =$ konst. die Kurven $\alpha =$ konst. transversal schneiden, ist

$$(20)\qquad u_\alpha f_{u'}(u, v, u_\beta, v_\beta) + v_\alpha f_{v'}(u, v, u_\beta, v_\beta) = 0$$

oder bezüglich der α-β-Kurven als Parameterlinien

$$(21)\qquad 1 \cdot g_{\alpha'}(\alpha, \beta, 0, 1) + 0 \cdot g_{\beta'}(\alpha, \beta, 0, 1) = 0.$$

Aus (19a) und (21) folgt nun, daß die Kurven $\alpha =$ konst. geodätische Linien sind. Denn die Euler-Weierstraßsche Differentialgleichung

$$(22)\quad (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')\, g_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta') + g_{\beta'\alpha}(\alpha, \beta, \alpha', \beta') - g_{\alpha'\beta}(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$$

nimmt für $\alpha' = \alpha'' = 0$ die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha\, \partial \beta'} g(\alpha, \beta, 0, 1) - \frac{\partial^2}{\partial \beta\, \partial \alpha'} g(\alpha, \beta, 0, 1) = 0$$

an, in der nach (19a) der erste und nach (21) der zweite Summand verschwindet. (19b) wird hier natürlich nicht benutzt. Im allgemeinen[12])

---

[11]) C. Carathéodory, Die Methode der geodätischen Äquidistanten und das Problem von Lagrange, Acta Mathem. 47 (1915), Heft 3.

[12]) W. Blaschke, Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung, Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, Math.-phys. Klasse 68 (1916), S. 50ff.; J. Radon, Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven, ebenda S. 123ff.; G. Grüß, Die ebenen Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung, Math. Zeitschr. 29, S. 470ff.

ist die Transversalitätsbedingung (20) nicht symmetrisch, so daß die eine Kurvenschar eines T.-Gewebes die andere Schar transversal schneiden kann, ohne daß das Umgekehrte auch zutrifft. Ist aber der im Sinn der Maßbestimmung f gemessene rechte Winkel unabhängig von der Reihenfolge der Schenkel, dann erhält man den

Satz. *Ein symmetrisch-transversales T.-Gewebe besteht aus zwei Scharen geodätischer Linien.*

Die Frage nach der Existenz von T.-Geweben auf einer bestimmten Fläche mit gegebener Maßbestimmung f knüpft an die Gleichungen (18) an, die zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die unbekannten Funktionen

$$u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta) \tag{23}$$

darstellen. Aus dem Existenztheorem für partielle Differentialgleichungen folgt also, daß sich — gewisse Regularitätsbedingungen vorausgesetzt — auf Flächen beliebiger Metrik T.-Gewebe konstruieren lassen. Dagegen ist die Frage nach der Existenz von T.-Geweben, deren Kurvenscharen sich einseitig oder symmetrisch transversal schneiden, deshalb schwieriger, weil dann zu den Gleichungen (18) noch Gleichung (20) hinzutritt bzw. Gleichung (20) und diejenige, die aus ihr durch Vertauschung von α, β hervorgeht. Dann müssen aber, damit eine Lösung möglich ist, gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein, die notwendige Bedingungen für die Maßbestimmung f darstellen.

II.

4. Parallelismus auf Flächen allgemeiner Metrik. Die von Levi-Civita definierte Parallelübertragung eines Vektors auf einer Fläche mit Riemannscher Metrik hat folgende Eigenschaften:

1. Geodätische Linien sind Kurven konstanter Richtung u. u., d. h. die Tangentenvektoren einer geodätischen Linie gehen durch Parallelverschiebung längs dieser Kurve auseinander hervor, und diese Eigenschaft der Tangentenvektoren ist für die geodätischen Linien charakteristisch.

2. Bei simultaner Parallelverschiebung zweier Richtungen bleibt der Winkel zwischen ihnen erhalten.

3. Die Länge eines Vektors bleibt bei der Parallelverschiebung erhalten.

Es soll nun gefordert werden, daß bei der Ausdehnung des Begriffes der Parallelübertragung auf allgemein-metrische, zunächst nur zweidimensionale Mannigfaltigkeiten jene unmittelbar anschaulichen Eigenschaften er-

halten bleiben. Tatsächlich wird sich zeigen, daß der Parallelismus durch diese Forderung eindeutig definiert werden kann, wenn die zweite Eigenschaft in folgender durch die Besonderheit der Winkelmessung (vgl. S. 164 und 167) nahegelegten Form präzisiert wird:

2'. Bei simultaner Parallelübertragung von zwei Richtungen bleibt der von ihnen eingeschlossene Winkel konstant, wenn er als Differenz der beiden Winkel erklärt wird, die von den beiden Richtungen zu einer konstanten Richtung hin gemessen werden; die konstante Richtung wird in Übereinstimmung mit 1 durch die Extremale definiert, die durch den Anfangspunkt (u, v) der Verschiebung (du, dv) geht und dort die Richtung (du, dv) hat. Gleichwertig mit der Bedingung 2' ist offenbar die folgende:

2''. Bei der Parallelverschiebung einer Richtung bleibt der von dieser Richtung zu der oben charakterisierten Extremalen gemessene Winkel konstant. Daß 2' aus 2'' folgt, ist klar; aber auch umgekehrt ist mit 2' auch stets 2'' erfüllt: man braucht nur die eine der beiden Richtungen in 2' mit der Verschiebungsrichtung (du, dv) zusammenfallen zu lassen, die nach 1 bei Parallelübertragung längs (du, dv) mit der Tangentenrichtung der oben charakterisierten Extremalen übereinstimmt, so daß die in 2' betrachtete Winkeldifferenz gerade der Winkel ist, dessen Konstanz in 2'' gefordert wird.

Werden die in 2' bzw. 2'' betrachteten Winkel im entgegengesetzten Sinn gemessen, so gelangt man zu einer zweiten Form des Parallelismus (vgl. 9).

5. Die Differentialgleichungen des Parallelismus. Auf der Fläche, die durch die Parameterlinien $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ orientiert sei und das Bogenelement $ds = f(u, v, u', v')\,dt$ haben möge, wird im Punkt (u, v) ein „Vektor" durch seine Komponenten ξ, η definiert; er soll die Richtung $du : dv = \xi : \eta$ und die Länge $l = f(u, v, \xi, \eta) > 0$ haben. Der zum Vektor (ξ, η) gehörige „Einheitsvektor" hat demnach die Komponenten $\frac{\xi}{f(u, v, \xi, \eta)}, \frac{\eta}{f(u, v, \xi, \eta)}$. Wie ändern sich nun die Komponenten ξ, η eines Vektors, wenn er längs des Weges du, dv im Sinn der Forderungen 1, 2' bzw. 2'', 3 parallel verschoben wird? Man muß die Fälle[13])

a) Verschiebung in einer von der Richtung des Vektors verschiedenen Richtung: $\xi : \eta \neq du : dv$ oder $\xi = \lambda\,du$, $\eta = \lambda\,dv$, $\lambda < 0$;

b) Verschiebung in Richtung des Vektors: $\xi = \lambda\,du$, $\eta = \lambda\,dv$, $\lambda > 0$ unterscheiden.

---

[13]) Gilt außer Gleichung (3) auch $f(u, v, ku', kv') = |k|\,f(u, v, u', v')$ für $k < 0$, dann ist a) $\xi : \eta \neq du : dv$ und b) $\xi : \eta = du : dv$ zu unterscheiden, d. h. die Fälle $\xi = \lambda\,du$, $\eta = \lambda\,dv$, $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$ werden gleich behandelt (vgl. 6).

Zunächst der Fall a). Die Forderung 2″ bedeutet, daß

$$\cos(\xi,\eta;\widehat{du,dv}) = \frac{\xi f_{u'}(u,v,du,dv) + \eta f_{v'}(u,v,du,dv)}{f(u,v,\xi,\eta)},$$

und die Forderung 3, daß $f(u,v,\xi,\eta)$ konstant sein soll. Also wird

$$(24)\quad \begin{cases} d\xi f_{u'}(\ldots du,dv) + d\eta f_{v'}(\ldots du,dv) + \xi d f_{u'}(\ldots du,dv) \\ \qquad + \eta d f_{v'}(\ldots du,dv) = 0 \\ d\xi f_{u'}(\ldots \xi,\eta) + d\eta f_{v'}(\ldots \xi,\eta) + du f_u(\ldots \xi,\eta) \\ \qquad + dv f_v(\ldots \xi,\eta) = 0. \end{cases}$$

In den beiden letzten Gliedern der 1. Gleichung treten bei der Ausführung der Differentiation die zweiten Differentiale von u und v auf; da aber die Verschiebung längs des Linienelements (du,dv) der geodätischen Linie geschieht, liefern die Eulerschen Differentialgleichungen

$$(25)\quad f_u(\ldots du,dv) - d f_{u'}(\ldots du,dv) = 0,\quad f_v(\ldots du,dv) - d f_{v'}(\ldots du,dv) = 0.$$

Also wird

$$(26)\quad \begin{cases} d\xi f_{u'}(\ldots du,dv) + d\eta f_{v'}(\ldots du,dv) \\ \qquad = -f_u(\ldots du,dv)\xi - f_v(\ldots du,dv)\eta \\ d\xi f_{u'}(\ldots \xi,\eta) + d\eta f_{v'}(\ldots \xi,\eta) \\ \qquad = -f_u(\ldots \xi,\eta)du - f_v(\ldots \xi,\eta)dv, \end{cases}$$

und wenn

$$(27)\quad \Delta = f_{u'}(\ldots du,dv) f_{v'}(\ldots \xi,\eta) - f_{u'}(\ldots \xi,\eta) f_{v'}(\ldots du,dv) \neq 0$$

ist,

$$(28)\quad \begin{cases} d\xi = \frac{1}{\Delta}\{f_{v'}(\ldots du,dv)[du f_u(\ldots \xi,\eta) + dv f_v(\ldots \xi,\eta)] \\ \qquad - f_{v'}(\ldots \xi,\eta)[\xi f_u(\ldots du,dv) + \eta f_v(\ldots du,dv)]\} \\ d\eta = \frac{1}{\Delta}\{f_{u'}(\ldots \xi,\eta)[\xi f_u(\ldots du,dv) + \eta f_v(\ldots du,dv)] \\ \qquad - f_{u'}(\ldots du,dv)[du f_u(\ldots \xi,\eta) + dv f_v(\ldots \xi,\eta)]\}. \end{cases}$$

Das sind die Differentialgleichungen der Parallelübertragung im Fall $\Delta \neq 0$; die rechten Seiten sind positiv-homogen erster Ordnung sowohl in ξ,η als auch in du,dv. Daraus folgt, daß für verschwindende ξ,η oder du,dv auch $d\xi,d\eta$ null sind. Setzt man $f = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$, dann erhält man die bekannten Gleichungen von Levi-Civita, deren rechte Seiten in ξ,η; du,dv bilinear sind[14]). Bezeichnet man mit $\bar\xi:\bar\eta$ die zu $\xi:\eta$, mit $\overline{du}:\overline{dv}$ die zu $du:dv$ konjugierte Richtung, dann ist

[14]) Die Berwaldschen Differentialgleichungen sind auch bilinear; das liegt daran, daß die allgemeine Maßbestimmung durch die Einführung des Feldes ausgezeichneter Richtungen auf eine „tangierende Riemannsche Metrik" zurückgeführt wird.

$$
(29) \qquad \begin{cases} \bar{\xi} f_{u'}(u, v, \xi, \eta) + \bar{\eta} f_{v'}(u, v, \xi, \eta) = 0 \\ \overline{du}\, f_{u'}(u, v, du, dv) + \overline{dv}\, f_{v'}(u, v, du, dv) = 0 . \end{cases}
$$

Also versagen die Differentialgleichungen (28) dann und nur dann, wenn zu $\frac{\xi}{\eta}$ und $\frac{du}{dv}$ die gleiche transversale Richtung gehört. Das geschieht einmal, wenn $\xi = \lambda\, du$, $\eta = \lambda\, dv$, $\lambda > 0$ ist (das ist der nachher zu erledigende Fall), es kann aber auch sonst für gewisse diskrete Richtungspaare $\frac{\xi}{\eta}$, $\frac{du}{dv}$ vorkommen. *Für solche „singulären" Richtungspaare kann eine Parallelverschiebung im obigen Sinn nicht definiert werden.*

Ist die zu der Maßbestimmung f gehörige Transversalitätsbedingung *symmetrisch*, so kann $\varDelta = 0$ nur für $\frac{\xi}{\eta} = \frac{du}{dv}$ eintreten; denn dann ist sowohl $\frac{\xi}{\eta}$ als auch $\frac{du}{dv}$ die zu $\frac{\bar{\xi}}{\bar{\eta}} = \frac{\overline{du}}{\overline{dv}}$ gehörige transversale Richtung. Speziell versagen also im Riemannschen Fall die Differentialgleichungen des Parallelismus für kein Richtungspaar $\frac{\xi}{\eta} \neq \frac{du}{dv}$ (vgl. Fußnote [13])).

6. Der Fall b) $\xi = \lambda\, du$, $\eta = \lambda\, dv$, $\lambda > 0$. Die Ableitung der Gleichungen (28) versagt, weil $\cos(\widehat{\xi, \eta;\, du, dv}) = 1$ ist. Soll aber nach der Forderung 2″ der Winkel Null zwischen den Vektoren (ξ, η) und (du, dv) erhalten bleiben, dann muß die Richtung $\frac{\xi}{\eta}$ stets mit der Richtung *der* geodätischen Linie zusammenfallen, deren Anfangsrichtung $\frac{du}{dv}$ ist, also $d\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = d\left(\frac{dv}{du}\right) = \frac{d^2v\, du - d^2u\, dv}{du^2}$ und nach der Euler-Weierstraßschen Differentialgleichung:

$$
(30) \qquad \begin{cases} f_1(\ldots du, dv)\, du^2 (\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) \\ \qquad\qquad + \xi^2 (f_{uv'}(\ldots du, dv) - f_{vu'}(\ldots du, dv)) = 0 \\ \text{bzw.} \\ f_1(\ldots du, dv)\, dv^2 (\eta\, d\xi - \xi\, d\eta) \\ \qquad\qquad + \eta^2 (f_{vu'}(\ldots du, dv) - f_{uv'}(\ldots du, dv)) = 0 . \end{cases}
$$

Aus Gleichung (30) und der 2. Gleichung (24) (Forderung 3) erhält man, wenn man $\xi = \lambda\, du$, $\eta = \lambda\, dv$, $\lambda > 0$ beachtet:

$$
(31) \qquad \begin{cases} d\xi = \dfrac{\xi f_{v'}(\ldots \xi, \eta)[f_{uv'}(\ldots du, dv) - f_{vu'}(\ldots du, dv)]}{f_1(\ldots du, dv) f(\ldots du, dv)\, du} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\xi [f_u(\ldots \xi, \eta)\, du + f_v(\ldots \xi, \eta)\, dv]}{f(\ldots \xi, \eta)} = \dfrac{\eta f_{v'}(\ldots)[\ldots]}{f_1 \cdot f \cdot dv} - \ldots \\ d\eta = \dfrac{-\xi f_{u'}(\ldots \xi, \eta)[f_{uv'}(\ldots du, dv) - f_{vu'}(\ldots du, dv)]}{f_1(\ldots du, dv) f(\ldots du, dv)\, du} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\eta [f_u(\ldots \xi, \eta)\, du + f_v(\ldots \xi, \eta)\, dv]}{f(\ldots \xi, \eta)} = \dfrac{-\eta f_{u'}(\ldots)[\ldots]}{f_1 \cdot f \cdot dv} - \ldots \end{cases}
$$

Die Gleichungen (31) liefern stets $d\xi$ und $d\eta$, da entweder du oder dv von Null verschieden ist. Auch sie gehen in die von Levi-Civita aufgestellten Differentialgleichungen des Parallelismus über, wenn man die Maßbestimmung auf die Riemannsche spezialisiert, wie es nach der geometrischen Einführung des Parallelismus nicht anders zu erwarten ist.

Zu den für den Fall b) gültigen Differentialgleichungen (31) gelangt man auch durch Grenzübergang aus den Gleichungen (28). Setzt man nämlich $\xi\,dv - m\,\eta\,du = 0$, also $\xi = m\lambda\,du$, $\eta = \lambda\,dv$ $(\lambda > 0)$, und läßt $m = \left(\frac{\xi}{\eta}\right) : \left(\frac{du}{dv}\right) \to 1$ gehen, dann konvergieren Zähler und Nenner in Gleichung (28) gegen 0, und man erhält

$$\lim_{m\to 1} d\xi = \frac{f_{v'}(\ldots du, dv)\,[\lambda\,du^2 f_{u'u'}(\ldots \xi, \eta) + \lambda\,du\,dv\,f_{v'u'}(\ldots \xi, \eta)]}{\lambda f(\ldots du, dv)\,f_{u'v'}(\ldots \xi, \eta)}$$
$$- \frac{f_{v'u'}(\ldots \xi, \eta)\,\lambda\,du\,[\xi f_u(\ldots du, dv) + \eta f_v(\ldots du, dv)] + \lambda\,du\,f_{v'}(\ldots \xi, \eta)\,f_u(\ldots du, dv)}{\lambda f(\ldots du, dv)\,f_{u'v'}(\ldots \xi, \eta)},$$

$$\lim_{m\to 1} d\eta = \frac{f_{u'v'}(\ldots \xi, \eta)\,\lambda\,du\,[\xi f_u(\ldots du, dv) + \eta f_v(\ldots du, dv)]}{\lambda f(\ldots du, dv)\,f_{u'v'}(\ldots \xi, \eta)}$$
$$+ \frac{\lambda\,du\,f_{u'}(\ldots \xi, \eta)\,f_u(\ldots du, dv) - f_{u'}(\ldots du, dv)\,[\lambda\,du^2 f_{u'u'}(\ldots \xi, \eta) + \lambda\,du\,dv\,f_{v'u'}(\ldots \xi, \eta)]}{\lambda f(\ldots du, dv)\,f_{u'v'}(\ldots \xi, \eta)}.$$

Das sind tatsächlich die Gleichungen (31), wenn man noch die Homogenitätsbedingungen der Funktion f und ihrer Ableitungen, sowie die Gleichungen $\xi = \lambda\,du$, $\eta = \lambda\,dv$ beachtet.

Die Gleichungen (28) und (31) definieren also die Parallelübertragung im Sinne der Maßbestimmung f bis auf den Fall der oben charakterisierten singulären Richtungspaare, die, wie gesagt, bei Maßbestimmungen mit symmetrischer Transversalitätsbedingung nicht auftreten können.

7. Invarianz gegen Punkt- und Parametertransformation. Die Gleichungen des Parallelismus sind von der Wahl der Parameterkurven unabhängig, d. h. folgendes: Neben dem Koordinatensystem der u-v-Linien betrachte man das der α-β-Linien, das durch die (reguläre) Transformation $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ eingeführt wird; in ihm ist das Bogenelement $ds = \bar{f}(\alpha, \beta, d\alpha, d\beta) \equiv f(u, v, du, dv)$; der Vektor $\xi = \lambda\,\delta u$, $\eta = \lambda\,\delta v$, $\lambda > 0$, mit der Länge $f(u, v, \lambda\,\delta u, \lambda\,\delta v)$ hat im System der α-β-Linien die Komponenten

$$\bar{\xi} = \lambda\,\delta\alpha = \lambda(\alpha_u\,\delta u + \alpha_v\,\delta v)$$
$$\bar{\eta} = \lambda\,\delta\beta = \lambda(\beta_u\,\delta u + \beta_v\,\delta v)$$

und die Länge

$$\bar{f}(\alpha, \beta, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \lambda \bar{f}(\alpha, \beta, \delta\alpha, \delta\beta) = \lambda f(u, v, \delta u, \delta v) = f(u, v, \lambda\,\delta u, \lambda\,\delta v).$$

Verschiebt man nun den Vektor längs eines bestimmten Weges parallel, indem man einmal das Koordinatensystem (u, v) und die Differentialgleichungen (28) bzw. (31) benutzt und dann das System der α-β-Linien

und die entsprechenden mit $\bar{f}(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ gebildeten Differentialgleichungen, dann gelangt man zu dem gleichen Schlußvektor — vorausgesetzt, daß die Parallelübertragung überhaupt möglich ist. Zum Beweis genügt die Überlegung, daß die geometrische Charakterisierung des Parallelismus invariant gegen Koordinatentransformation ist. Tatsächlich sind Länge des Vektors, Winkel mit der Verschiebungsrichtung, Eigenschaft einer Kurve, geodätische Linie zu sein, invariant gegen die Punkttransformation, und somit liefern die Differentialgleichungen (28) bzw. (31), für das eine oder das andere System von Parameterlinien hingeschrieben, entsprechende Variationen der Vektorkomponenten. Die Invarianz gegen Parametertransformation auf der Kurve $u(t), v(t)$, längs deren der Vektor parallel verschoben wird, liegt auf der Hand, da die Gleichungen (28) und (31) nur die Differentiale der Flächenparameter u, v enthalten.

8. Parallelismus und T.-Gewebe. Zwischen dem im vorhergehenden definierten Parallelismus und den T.-Geweben besteht ein Zusammenhang, der, soweit es sich um Flächen Riemannscher Maßbestimmung handelt, von Bianchi[15]) entdeckt wurde. Es gilt nämlich der folgende

Satz. *Ist das Netz*

$$(32)\qquad \begin{cases} u = u(\alpha, \beta) \\ v = v(\alpha, \beta) \end{cases} \qquad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0$$

ein T.-Gewebe, dann gehen die Tangentialeinheitsvektoren einer Schar von Netzlinien längs einer beliebigen Kurve der anderen Schar durch Parallelverschiebung an dieser Kurve auseinander hervor. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Richtungen der beiden Netzkurvenscharen nicht „singuläre Richtungspaare" bilden, d. h. daß zu ihnen nicht die gleiche Transversalrichtung gehört.

Beweis. Der Vektor $\xi = \frac{u_\alpha}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)}$, $\eta = \frac{v_\alpha}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)}$ hat die Richtung der Kurven $\beta =$ konst. und die Länge eins. Verschiebt man ihn längs einer Kurve $\alpha =$ konst. um ein unendlich kleines Stück, das dem Parameterzuwachs $d\beta > 0$ entspricht, so ändern sich seine Komponenten um

$$(33)\qquad \begin{cases} d\xi = \frac{u_{\alpha\beta}}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)} d\beta - \frac{u_\alpha}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\beta} f(u, v, u_\alpha, v_\alpha) \cdot d\beta \\ \quad = \frac{u_{\alpha\beta}}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)} d\beta \\ d\eta = \frac{v_{\alpha\beta}}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)} d\beta - \frac{v_\alpha}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\beta} f(u, v, u_\alpha, v_\alpha) \cdot d\beta \\ \quad = \frac{v_{\alpha\beta}}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)} d\beta, \end{cases}$$

[15]) Vgl. Fußnote [5]).

da das Netz (32) ein T.-Gewebe ist, also folgende Gleichungen gelten:

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} f(u, v, u_\beta, v_\beta) \equiv f_u(\ldots u_\beta, v_\beta) u_\alpha + f_v(\ldots u_\beta, v_\beta) v_\alpha \\ \qquad + f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) u_{\beta\alpha} + f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta) v_{\beta\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta} f(u, v, u_\alpha, v_\alpha) \equiv f_u(\ldots u_\alpha, v_\alpha) u_\beta + f_v(\ldots u_\alpha, v_\alpha) v_\beta \\ \qquad + f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) u_{\alpha\beta} + f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) v_{\alpha\beta} = 0 . \end{cases}$$

Um den Satz zu beweisen, muß gezeigt werden, daß diese Änderungen $d\xi$, $d\eta$ mit den linken Seiten $d^*\xi$, $d^*\eta$ der Gleichungen (28) übereinstimmen, wenn darin $\xi = \frac{u_\alpha}{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)}$, $\eta = \frac{v_\alpha}{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)}$, $du = u_\beta d\beta$, $dv = v_\beta d\beta$ gesetzt wird. Man findet, wenn man Gleichung (34) benutzt und die positive Homogenität erster Ordnung von $f_u(u, v, u', v')$, $f_v(u, v, u', v')$, nullter Ordnung von $f_{u'}(u, v, u', v')$, $f_{v'}(u, v, u', v')$ beachtet,

$$(36)\quad \begin{cases} d^*\xi = \dfrac{-f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta)\, d\beta\, [f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) u_{\alpha\beta} + f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) v_{\alpha\beta}]}{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)[f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) - f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta)]} \\ \qquad + \dfrac{f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha)\, d\beta\, [f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) u_{\alpha\beta} + f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta) v_{\alpha\beta}]}{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)[f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) - f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta)]} \\ d^*\eta = \dfrac{-f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha)\, d\beta\, [f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) u_{\alpha\beta} + f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta) v_{\alpha\beta}]}{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)[f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) - f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta)]} \\ \qquad + \dfrac{f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta)\, d\beta\, [f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) u_{\alpha\beta} + f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) v_{\alpha\beta}]}{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)[f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) - f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta)]}, \end{cases}$$

das heißt

$$(37)\quad \begin{cases} d^*\xi = \dfrac{\Delta}{\Delta} \dfrac{u_{\alpha\beta}\, d\beta}{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)} = d\xi \\ d^*\eta = \dfrac{\Delta}{\Delta} \dfrac{v_{\alpha\beta}\, d\beta}{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)} = d\eta , \end{cases}$$

worin

$$(38)\quad \Delta = f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) - f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta)$$

nach Voraussetzung von Null verschieden ist. Die entsprechenden Gleichungen ergeben sich, wenn man den Vektor $\frac{u_\beta}{f(\ldots u_\beta, v_\beta)}$, $\frac{v_\beta}{f(\ldots u_\beta, v_\beta)}$ längs der Kurven $\beta =$ konst. parallel verschiebt. Damit ist aber der Satz bewiesen.

Es gilt auch die

Umkehrung. *Ein Netz*

$$(32)\quad \begin{cases} u = u(\alpha, \beta) \\ v = v(\alpha, \beta) \end{cases} \qquad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0$$

ist ein T.-Gewebe, wenn die Tangentialeinheitsvektoren der Kurven $\alpha =$ konst. längs jeder Kurve $\beta =$ konst. durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, und ebenso die Tangentialeinheitsvektoren der Kurven $\beta =$ konst. längs jeder der Kurven $\alpha =$ konst. Dabei ist $\Delta \neq 0$ vorausgesetzt.

Beweis. Die Tangentialeinheitsvektoren der Kurven $\alpha = \text{konst.}$ bzw. $\beta = \text{konst.}$ haben die Komponenten

$$(39)\quad \xi_1 = \frac{u_\beta}{f(\dots u_\beta, v_\beta)},\quad \eta_1 = \frac{v_\beta}{f(\dots u_\beta, v_\beta)} \quad\text{und}\quad \xi_2 = \frac{u_\alpha}{f(\dots u_\alpha, v_\alpha)},\quad \eta_2 = \frac{v_\alpha}{f(\dots u_\alpha, v_\alpha)}.$$

Aus der Voraussetzung der hier zu beweisenden Umkehrung folgen die Gleichungen

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} d\alpha = \dfrac{-1}{\Delta}\{f_{v'}(\dots u_\alpha d\alpha, v_\alpha d\alpha)\,[u_\alpha d\alpha\, f_u(\dots \xi_1, \eta_1) + v_\alpha d\alpha\, f_v(\dots \xi_1, \eta_1)] \\ \qquad - f_{v'}(\dots \xi_1, \eta_1)\,[\xi_1 f_u(\dots u_\alpha d\alpha, v_\alpha d\alpha) + \eta_1 f_v(\dots u_\alpha d\alpha, v_v d\alpha)]\} \\ \dfrac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} d\alpha = \dfrac{-1}{\Delta}\{f_{u'}(\dots \xi_1, \eta_1)\,[\xi_1 f_u(\dots u_\alpha d\alpha, v_\alpha d\alpha) + \eta_1 f_v(\dots u_\alpha d\alpha, v_\alpha d\alpha)] \\ \qquad - f_{u'}(\dots u_\alpha d\alpha, v_\alpha d\alpha)\,[u_\alpha d\alpha\, f_u(\dots \xi_1, \eta_1) + v_\alpha d\alpha\, f_v(\dots \xi_1, \eta_1)]\} \end{cases}$$

und

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \beta} d\beta = \dfrac{1}{\Delta}\{f_{v'}(\dots u_\beta d\beta, v_\beta d\beta)\,[u_\beta d\beta\, f_u(\dots \xi_2, \eta_2) + v_\beta d\beta\, f_v(\dots \xi_2, \eta_2)] \\ \qquad - f_{v'}(\dots \xi_2, \eta_2)\,[\xi_2 f_u(\dots u_\beta d\beta, v_\beta d\beta) + \eta_2 f_v(\dots u_\beta d\beta, v_\beta d\beta)]\} \\ \dfrac{\partial \eta_2}{\partial \beta} d\beta = \dfrac{1}{\Delta}\{f_{u'}(\dots \xi_2, \eta_2)\,[\xi_2 f_u(\dots u_\beta d\beta, v_\beta d\beta) + \eta_2 f_v(\dots u_\beta d\beta, v_\beta d\beta)] \\ \qquad - f_{u'}(\dots u_\beta d\beta, v_\beta d\beta)\,[u_\beta d\beta\, f_u(\dots \xi_2, \eta_2) + v_\beta d\beta\, f_v(\dots \xi_2, \eta_2)]\}. \end{cases}$$

Führt man linker Hand die Differentiationen aus und benutzt zur Umformung der rechten Seiten außer den Homogenitätseigenschaften der Ableitungen von $f(u, v, u', v')$ die Identitäten

$$(42)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} f(u, v, u_\beta, v_\beta) = f_u(\dots u_\beta, v_\beta)\, u_\alpha + f_v(\dots u_\beta, v_\beta)\, v_\alpha \\ \qquad\qquad + f_{u'}(\dots u_\beta, v_\beta)\, u_{\beta\alpha} + f_{v'}(\dots u_\beta, v_\beta)\, v_{\beta\alpha} \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta} f(u, v, u_\alpha, v_\alpha) = f_u(\dots u_\alpha, v_\alpha)\, u_\beta + f_v(\dots u_\alpha, v_\alpha)\, v_\beta \\ \qquad\qquad + f_{u'}(\dots u_\alpha, v_\alpha)\, u_{\alpha\beta} + f_{v'}(\dots u_\alpha, v_\alpha)\, v_{v\beta}, \end{cases}$$

dann erhält man aus (40)

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f(\dots u_\alpha, v_\alpha)}{\partial \beta} f_{v'}(\dots u_\beta, v_\beta) - \dfrac{\partial f(\dots u_\beta, v_\beta)}{\partial \alpha}\left[f_{v'}(\dots u_\alpha, v_\alpha) - \dfrac{u_\beta}{f(\dots u_\beta, v_\beta)}\Delta\right] = 0 \\ \dfrac{\partial f(\dots u_\alpha, v_\alpha)}{\partial \beta} f_{u'}(\dots u_\beta, v_\beta) - \dfrac{\partial f(\dots u_\beta, v_\beta)}{\partial \alpha}\left[f_{u'}(\dots u_\alpha, v_\alpha) + \dfrac{v_\beta}{f(\dots u_\beta, v_\beta)}\Delta\right] = 0 \end{cases}$$

und aus (41)

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f(\dots u_\alpha, v_\alpha)}{\partial \beta}\left[f_{v'}(\dots u_\beta, v_\beta) + \dfrac{u_\alpha}{f(\dots u_\alpha, v_\alpha)}\Delta\right] - \dfrac{\partial f(\dots u_\beta, v_\beta)}{\partial \alpha} f_{v'}(\dots u_\alpha, v_\alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial f(\dots u_\alpha, v_\alpha)}{\partial \beta}\left[f_{u'}(\dots u_\beta, v_\beta) - \dfrac{v_\alpha}{f(\dots u_\alpha, v_\alpha)}\Delta\right] - \dfrac{\partial f(\dots u_\beta, v_\beta)}{\partial \alpha} f_{u'}(\dots u_\alpha, v_\alpha) = 0. \end{cases}$$

Die Ausrechnung der in den eckigen Klammern stehenden Größen zeigt, daß die beiden Gleichungen (43) durch Multiplikation mit $\frac{f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta)}{f(\ldots u_\beta, v_\beta)}$ bzw. $\frac{f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta)}{f(\ldots u_\beta, v_\beta)}$ — Ausdrücke, die wegen $f \neq 0$ ja nicht zugleich verschwinden können — aus

$$(45)\quad \frac{\partial f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)}{\partial \beta} f(\ldots u_\beta, v_\beta) - \frac{\partial f(\ldots u_\beta, v_\beta)}{\partial \alpha}(u_\beta f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) + v_\beta f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha)) = 0$$

hervorgehen, und daß entsprechend die Gleichungen (44) der Gleichung

$$(46)\quad \frac{\partial f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)}{\partial \beta}(u_\alpha f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) + v_\alpha f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta)) - \frac{\partial f(\ldots u_\beta, v_\beta)}{\partial \alpha} f(\ldots u_\alpha, v_\alpha) = 0$$

proportional sind. Da nun aber die Determinante des Systems (45), (46)

$$(47)\quad D = \begin{vmatrix} f(\ldots u_\beta, v_\beta) & -u_\beta f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) - v_\beta f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) \\ u_\alpha f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) + v_\alpha f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta) & -f(\ldots u_\alpha, v_\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_\alpha & v_\alpha \\ u_\beta & v_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) & f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta) \\ f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) & f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) \end{vmatrix} = (u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta) \cdot \Delta$$

nach Voraussetzung von Null verschieden ist, folgt

$$(48)\quad \frac{\partial f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial f(\ldots u_\beta, v_\beta)}{\partial \alpha} = 0.$$

Also ist das Netz (32) ein T.-Gewebe, w. z. b. w.

Wie man sieht, genügt es zum Beweis der Umkehrung nicht, vorauszusetzen, daß nur die Tangentialeinheitsvektoren der *einen* Kurvenschar durch Parallelübertragung längs der andern Schar zusammenhängen, da sowohl die Determinante der Gleichung (43) wie die der Gleichung (44) verschwindet, man also nicht auf die Gültigkeit der Gleichung (48) schließen kann. Wie man aber leicht überlegt, läßt sich die Voraussetzung in der eben angegebenen Weise einschränken, wenn man an die Stelle der *Einheits*vektoren (39) die Vektoren $\xi_1' = u_\beta$, $\eta_1' = v_\beta$; $\xi_2' = u_\alpha$, $\eta_2' = v_\alpha$ treten läßt. Man gelangt dann nämlich zu zwei Gleichungspaaren (43′) und (44′), die aus (43) und (44) durch Weglassen der die Determinante Δ enthaltenden Glieder hervorgehen. Also ist die Determinante des Systems (43′) gleich der des Systems (44′) gleich $\Delta \neq 0$ und man erhält sofort Gleichung (48). Tatsächlich gilt für die Änderung der Komponenten proportionaler Vektoren (ξ, η) und $(\lambda\xi, \lambda\eta)$ $(\lambda > 0)$ durch Parallelübertragung den Gleichungen (28) zufolge $d^*(\lambda\xi) = \lambda d^*\xi$, $d^*(\lambda\eta) = \lambda d^*\eta$, während die entsprechenden Gleichungen für die Differentiale nur für $\lambda =$ konst. gelten. Das heißt aber, daß die in der Umkehrung des oben bewiesenen Satzes benutzte Voraussetzung, die die Tangential*einheits*vektoren des Netzes betrifft, und

die eben formulierte Voraussetzung über die Vektoren (u_β, v_β) bzw. (u_α, v_α) dann und nur dann äquivalent sind, wenn $\frac{\partial}{\partial_\alpha} f(u, v, u_\beta, v_\beta) = 0$ bzw. $\frac{\partial}{\partial_\beta} f(u, v, u_\alpha, v_\alpha) = 0$ gilt. Diese Gleichungen sollen aber gerade aus der ersten oder zweiten Voraussetzung gefolgert werden, so daß die beiden Voraussetzungen hier als wesentlich verschieden zu gelten haben.

Wie schon oben bemerkt wurde, ist die Voraussetzung $\varDelta \neq 0$ im Falle der Riemannschen Metrik und allgemein dann überflüssig, wenn die Maßbestimmung eine symmetrische Transversalitätsbedingung besitzt, da dann $\varDelta = 0$ nur für $\frac{u_\alpha}{v_\alpha} = \frac{u_\beta}{v_\beta}$ gilt, und das ist nach Gleichung (32) nicht möglich. Für $f = \sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}$ ist speziell

$$\varDelta = \frac{(EG - F^2)(u_\beta v_\alpha - u_\alpha v_\beta)}{\sqrt{E u_\alpha^2 + \ldots}\,\sqrt{E u_\beta^2 + \ldots}}.$$

Die Beweise lassen sich dadurch weitgehend vereinfachen, daß man die Kurven $\alpha =$ konst., $\beta =$ konst. selbst als Parameterlinien einführt, was wegen der Invarianz der hier untersuchten Eigenschaften gegen Punkttransformationen erlaubt ist.

9. **Zweite Form des Parallelismus.** Der Vollständigkeit wegen werde bemerkt, daß aus den in 4. formulierten geometrischen Bedingungen dadurch noch eine andere Form des Parallelismus abgeleitet werden kann, daß der nach der Forderung 2″ konstant zu haltende Winkel zwischen dem Vektor, der parallel übertragen werden soll, und der extremalen Verschiebungsrichtung von dieser zu dem Vektor hin gemessen wird, anstatt umgekehrt, wie es oben geschah. Nur für die Verschiebung eines Vektors in seiner Richtung ist dieser Unterschied belanglos, da der Winkel zwischen zwei zusammenfallenden Richtungen von der Reihenfolge der Schenkel unabhängig gleich Null ist. Von dem Fall $\xi = \lambda\, du$, $\eta = \lambda\, dv$, $\lambda > 0$ abgesehen, stimmt aber diese „zweite Form des Parallelismus“ mit der oben erhaltenen nur für die Riemannsche Metrik überein. Gegen die Brauchbarkeit der zweiten Form spricht in erster Linie die Tatsache, daß einige Untersuchungen, in denen der Winkel zwischen einer Extremalen und einer beliebigen Richtung eine Rolle spielt, die bevorzugte Stellung des zu der Extremalen hingemessenen Winkels erkennen lassen[16]), was hier der oben abgeleiteten Form des Parallelismus entspricht. Außerdem werden die Differentialgleichungen der zweiten Form bedeutend komplizierter. Sie mögen, ohne daß auf ihre der obigen ganz ähnliche Ableitung näher eingegangen wird, hier angegeben werden. Der Vektor sei wieder (ξ, η),

---

[16]) Grüß, a. a. O.

(du, dv) die Verschiebung. Im Fall $\xi = \lambda\, du$, $\eta = \lambda\, dv$, $\lambda > 0$ gelten, wie schon oben bemerkt wurde, die alten Gleichungen (31). Ist $\xi\, dv \neq \eta\, du$, dann ergibt sich

$$
(49)\quad \left\{
\begin{aligned}
d\xi &= \frac{1}{f(u,v,\xi,\eta)}\left[R\cdot f_{v'}(u,v,\xi,\eta) - \xi\left(f_u(u,v,\xi,\eta)\,du + f_v(u,v,\xi,\eta)\,dv\right)\right]\\
d\eta &= \frac{1}{f(u,v,\xi,\eta)}\left[-R\cdot f_{u'}(u,v,\xi,\eta) - \eta\left(f_u(u,v,\xi,\eta)\,du + f_v(u,v,\xi,\eta)\,dv\right)\right]\\
&\text{mit}\\
R &= \frac{1}{f(\ldots du, dv)\, f_1(\ldots du, dv)\, f_1(\ldots \xi, \eta)\,(\eta\, du - \xi\, dv)}\cdot\{f_1(\ldots du, dv)\\
&\quad \times [(f_{u'}(\ldots\xi,\eta)\,du + f_{v'}(\ldots\xi,\eta)\,dv)(f_u(\ldots du, dv)\,du + f_v(\ldots du, dv)\,dv)\\
&\quad - f(\ldots du, dv)(f_{u'u}(\ldots\xi,\eta)\,du^2 + (f_{u'v}(\ldots\xi,\eta) + f_{v'u}(\ldots\xi,\eta))\,du\,dv\\
&\quad + f_{v'v}(\ldots\xi,\eta)\,dv^2)] - [f_{u'v}(\ldots du, dv)\\
&\quad - f_{v'u}(\ldots du, dv)][f_{u'}(\ldots du, dv)\, f_{v'}(\ldots\xi,\eta) - f_{u'}(\ldots\xi,\eta)\, f_{v'}(\ldots du\, dv)]\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Die rechten Seiten sind wieder positiv-homogen erster Ordnung sowohl in du, dv als auch in ξ, η. Im Gegensatz zu den Gleichungen (28) versagen die Gleichungen (49) nur im Fall $\xi\, dv - \eta\, du = 0$, wenn neben der Voraussetzung $f(u, v, u', v') > 0$ die Legendresche Bedingung $f_1 \neq 0$ erfüllt ist; singuläre Richtungspaare wie im früher behandelten Fall treten also dann nicht auf. Selbstverständlich gehen die Gleichungen (49) in die Levi-Civitaschen Gleichungen über, wenn $f(u, v, u', v')$ die Wurzel aus einer quadratischen Form in u', v' ist. Endlich kann man auch die in dem Fall $\xi = \lambda\, du$, $\eta = \lambda\, dv$, $\lambda > 0$ gültigen Gleichungen (31) aus (49) durch den Grenzübergang $\left(\frac{\xi}{\eta}\right) : \left(\frac{du}{dv}\right) = m \to 1$ ableiten, wie es oben durchgeführt wurde.

Die Bianchische Relation zwischen T.-Geweben und Parallelismus läßt sich für die zweite Form des Parallelismus nicht allgemein beweisen, wie das Beispiel $f = u' + v' + \sqrt{Eu'^2 + Gv'^2}$ lehrt.

III.

10. **Flächenelement und Oberfläche.** Um eine Flächeninhaltsmessung auf der durch die Parameterlinien $u =$ konst., $v =$ konst. orientierten Fläche allein mit Hilfe der zugrunde gelegten Längenmessung[17]) zu definieren, werde zunächst das Oberflächenelement do erklärt, bezogen auf irgendein Kurvennetz $\alpha =$ konst., $\beta =$ konst., das durch $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)} \neq 0$ gegeben wird und im speziellen auch mit dem

---

[17]) Die Berechtigung dieses Versuches möge dahingestellt bleiben; während Finsler den Flächeninhaltsbegriff gar nicht einführt, definiert Berwald ihn allein auf Grund der Längenmessung (vgl. Fußnote [8])).

Netz der Parameterlinien zusammenfallen kann. Über die Abhängigkeit des Flächenelementes do vom Ort auf der Fläche und vom „Maschenwinkel" des α-β-Netzes sollen die folgenden naheliegenden Voraussetzungen gemacht werden:

1. do ist eine Funktion allein der Linienelemente

$$ds_\alpha = f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)\, d\alpha, \qquad ds_\beta = f(u, v, u_\beta, v_\beta)\, d\beta$$

und der Maschenwinkel ω' und ω'', die in dem einen und in dem anderen Sinn gemessen werden[18]). Daraus folgt die Invarianz von do gegen reguläre Punkttransformationen.

2. do ist symmetrisch, sowohl in ds_α, ds_β als auch in ω', ω''. Daraus folgt, daß die Reihenfolge der beiden Scharen von Netzkurven keine Rolle spielt.

3. do ist in ds_α, ds_β positiv-homogen erster Ordnung, wird also sowohl für $d\alpha = 0$ als auch für $d\beta = 0$ von erster Ordnung null.

4. $do = \sin\omega' \cdot ds_\alpha \cdot ds_\beta = \sin\omega'' \cdot ds_\alpha \cdot ds_\beta$ für die Riemannsche Maßbestimmung.

Setzt man

$$(50) \qquad \begin{cases} \mu_{\alpha\beta} = \dfrac{u_\alpha f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) + v_\alpha f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta)}{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)} = \cos\omega' \\[2ex] \mu_{\beta\alpha} = \dfrac{u_\beta f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) + v_\beta f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha)}{f(\ldots u_\beta, v_\beta)} = \cos\omega'', \end{cases}$$

dann soll also für $d\alpha > 0$, $d\beta > 0$

$$(51) \qquad \begin{aligned} do &= \varphi(ds_\alpha, ds_\beta, \mu_{\alpha\beta}, \mu_{\beta\alpha}) \\ &= \varphi(f(\ldots u_\alpha, v_\alpha), f(\ldots u_\beta, v_\beta), \mu_{\alpha\beta}, \mu_{\beta\alpha})\, d\alpha\, d\beta \end{aligned}$$

sein, wobei φ eine symmetrische Funktion von ds_α, ds_β einerseits und $\mu_{\alpha\beta}$, $\mu_{\beta\alpha}$ andererseits ist.

Die Oberfläche eines von den Kurven $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$ begrenzten Bereiches wird dann durch das Doppelintegral

$$(52) \qquad O = \iint_{(\mathfrak{G})} do = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1} \varphi(f(\ldots u_\alpha, v_\alpha), f(\ldots u_\beta, v_\beta), \mu_{\alpha\beta}, \mu_{\beta\alpha})\, d\alpha\, d\beta$$

gemessen.

Da durch $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} = \mu$ die Riemannsche Metrik eindeutig bestimmt ist, kann die Voraussetzung 4 so formuliert werden: Es soll

$$\varphi(ds_\alpha, ds_\beta, \mu, \mu) = + ds_\alpha \cdot ds_\beta \cdot \sqrt{1 - \mu^2}$$

---

[18]) Vgl. S. 164.

sein. Wohl die einfachste Funktion [19]) φ, die dieser Bedingung genügt, ist

$$(53)\qquad \varphi = + ds_\alpha \cdot ds_\beta \cdot \sqrt{1 - \mu_{\alpha\beta} \cdot \mu_{\beta\alpha}}$$

oder, wenn man die Werte für $\mu_{\alpha\beta}$, $\mu_{\beta\alpha}$ aus Gleichung (50) einsetzt,

$$(54)\qquad do = \sqrt{f(\ldots u_\alpha, v_\alpha) \cdot f(\ldots u_\beta, v_\beta)\,[f_{u'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha) f_{v'}(\ldots u_\beta, v_\beta) - f_{u'}(\ldots u_\beta, v_\beta) f_{v'}(\ldots u_\alpha, v_\alpha)]\,(u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta)}\, d\alpha\, d\beta .$$

Das Flächenelement (54) verschwindet also erstens, wenn die Linienelemente die gleiche Richtung haben ($u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta = 0$), zweitens aber auch dann, wenn die Richtungen $u_\alpha : v_\alpha$ und $u_\beta : v_\beta$ ein singuläres Richtungspaar in dem oben gebrauchten Sinn bilden, d. h. wenn zu diesen beiden Richtungen die gleiche Transversalenrichtung gehört. Das kann nicht eintreten, wenn die zu der Maßbestimmung f gehörige Transversalitätsbedingung symmetrisch ist.

11. Anwendung. Schneidet die eine Schar des Netzes der α- und β-Linien die andere transversal, dann ist $\mu_{\alpha\beta} = 0$ oder $\mu_{\beta\alpha} = 0$, also vereinfacht sich das durch die Gleichung (53) definierte Flächenelement zu

$$(55)\qquad do = ds_\alpha \cdot ds_\beta = f(\ldots u_\alpha, v_\alpha)\, f(\ldots u_\beta, v_\beta)\, d\alpha\, d\beta .$$

Geht man aber statt von dem speziellen Ansatz (53) von der allgemeinen Funktion $\varphi(ds_\alpha, ds_\beta, \mu_{\alpha\beta}, \mu_{\beta\alpha})$ in Gleichung (51) aus, dann möge die Form (55) für Flächenelemente bezüglich transversaler Netze *gefordert* werden, d. h. außer den oben formulierten Bedingungen soll die Funktion φ die weitere erfüllen, daß

$$(56)\qquad \varphi(ds_\alpha, ds_\beta, 0, \mu_{\beta\alpha}) = \varphi(ds_\alpha, ds_\beta, \mu_{\alpha\beta}, 0) = ds_\alpha \cdot ds_\beta$$

ist.

Als ein einfaches Beispiel dafür, daß sich unter diesen Voraussetzungen Relationen, die auf Flächen Riemannscher Metrik zwischen der Flächeninhalts- und Längenmessung bestehen, auf den Fall allgemeiner Maßbestimmung ausdehnen lassen, soll zum Schluß folgendes gezeigt werden:

Der Flächeninhalt des Sektors eines geodätischen Entfernungskreises ist gleich dem halben Produkt aus der Länge des Radius und der Länge des Kreisbogens, für den Fall, daß der Radius gegen Null konvergiert [20]).

[19]) Man erhält die Form (53) aus der für die Euklidische Metrik charakteristischen Gleichung „Fläche des von den Linienelementen gebildeten Parallelogramms = Produkt der Längen und des Sinus des eingeschlossenen Winkels", wenn man in $\sin\omega = \sqrt{1 - \cos^2\omega}$ das geometrische Mittel der beiden voneinander verschiedenen Werte $\cos\omega'$ und $\cos\omega''$ an Stelle von $\cos\omega$ einführt. Diese Bemerkung soll indessen den sich nur durch seine Einfachheit empfehlenden Ansatz (53) nicht rechtfertigen.

[20]) Einen ähnlichen Satz beweisen Funk und Berwald a. a. O. (Fußnote [8])).

Das ist offenbar eine Verallgemeinerung der Formel für den Inhalt eines Kreissektors in der Euklidischen Ebene; auch auf Flächen mit Riemannscher Metrik läßt sich diese Formel nur mit der Einschränkung beweisen, daß der Radius des geodätischen Kreises gegen Null strebt, sie gilt also im Sinn einer allgemeinen Metrik genau so wie für $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$.

Zum Beweise betrachte man eine einfach unendliche Schar geodätischer Linien, die vom Punkt (U, V) ausgehen, und die geodätischen Entfernungskreise um diesen Punkt, d. h. die Transversalen der geodätischen Linien.

Das Extremalenbüschel habe die Gleichung

$$(57) \qquad \begin{cases} u = u_0(t, A) \\ v = v_0(t, A), \end{cases}$$

und als Parameter auf den einzelnen geodätischen Linien werde durch die Gleichung

$$t = \int_0^t f\left(u_0, v_0, \frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial v_0}{\partial t}\right) dt > 0, \qquad 1 = f\left(u_0, v_0, \frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial v_0}{\partial t}\right)$$

die Bogenlänge $\int ds$ der betreffenden geodätischen Linie vom Zentrum des Büschels bis zu dem beliebigen Punkt (t) eingeführt. Damit der geodätische Abstand eines beliebigen Punktes (u, v) vom Zentrum eindeutig bestimmt sei, muß die Untersuchung auf ein uneigentliches Extremalenfeld um den Punkt (U, V) eingeschränkt werden:

$$(57a) \qquad \frac{\partial(u_0, v_0)}{\partial(t, A)} \neq 0 \quad \text{für} \quad t > 0.$$

Nun gilt für jeden Wert A

$$(58) \qquad U = u_0(0, A), \qquad V = v_0(0, A),$$

und daher

$$\frac{\partial u_0(0, A)}{\partial A} = \frac{\partial v_0(0, A)}{\partial A} = 0.$$

Setzt man nun $u_0(t, A)$, $v_0(t, A)$ in der Umgebung von $t = 0$ als regulär voraus, dann ist

$$\frac{\partial u_0(t, A)}{\partial A} = t\,\frac{\partial^2 u_0(0, A)}{\partial t\,\partial A} + ((t^2)),$$

$$\frac{\partial v_0(t, A)}{\partial A} = t\,\frac{\partial^2 v_0(0, A)}{\partial t\,\partial A} + ((t^2)),$$

wo $((t^2))$ Glieder von mindestens zweiter Ordnung in t bedeuten.

Die ersten Glieder rechter Hand verschwinden nicht, da aus

$$\frac{\partial^2 u_0(0, A)}{\partial t\,\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v_0(0, A)}{\partial t\,\partial A} = 0$$

folgen würde, daß $\frac{\partial u_0}{\partial t}(0, A)$, $\frac{\partial v_0}{\partial t}(0, A)$ für jeden Wert von A dieselben Werte haben, und das hieße, daß sich die ∞^1 Extremalen des Büschels in (U, V) berührten, was nicht möglich ist. Also darf man

$$(59)\qquad \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial A} = t\,\varkappa(A) + ((t^2)) & (\varkappa(A) \neq 0) \\ \frac{\partial v_0}{\partial A} = t\,\lambda(A) + ((t^2)) & (\lambda(A) \neq 0) \end{cases}$$

setzen.

Der Wahl des Parameters t entsprechend werden die geodätischen Kreise um (U, V) auch durch Gleichung (57) dargestellt, und zwar charakterisiert t den einzelnen Kreis, auf dem A als Parameter läuft. Ferner kann man wegen der Voraussetzung (57a) mit Ausnahme des Büschelzentrums ($t = 0$) überall die Parameter t und A als Koordinaten einführen. Dann ist

$$f(u_0(t, A), v_0(t, A), du_0, dv_0) \equiv g(t, A, dt, dA) \qquad (t > 0);$$

speziell für die geodätischen Linien

$$ds_t = f\left(u_0, v_0, \frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial v_0}{\partial t}\right) dt = dt,$$

und für die Kreise

$$ds_A = f\left(u_0, v_0, \frac{\partial u_0}{\partial A}, \frac{\partial v_0}{\partial A}\right) dA = g(t, A, 0, dA),$$

oder, wenn man die Kreise so durchläuft, daß $dA > 0$ ist, und Gleichungen (59) beachtet:

$$ds_A = ds_{t=\text{konst.}>0} = t \cdot f(u_0, v_0, \varkappa(A) + ((t)), \lambda(A) + ((t)))\,dA.$$

Für $t \to 0$ wird $f(u_0, v_0, \varkappa(A) + ((t)), \lambda(A) + ((t)))$ einem von null verschiedenen Wert zustreben, da $\varkappa(A) \neq 0$, $\lambda(A) \neq 0$ sind und f als definit vorausgesetzt wurde. Man darf also

$$f(u_0(t, A), v_0(t, A), \varkappa(A) + ((t)), \lambda(A) + ((t))) = \nu_0(A) + t \cdot \nu_1(t, A)$$

mit $\nu_0(A) \neq 0$ setzen und erhält

$$(60)\qquad ds_A = [t\,\nu_0(A) + t^2 \nu_1(t, A)]\,dA$$

als Bogenelement des geodätischen Kreises mit dem Radius t; seine Bogenlänge zwischen den geodätischen Linien A_0 und $A_1 > A_0$ ist dann

$$(61)\qquad \int_{(A_0)}^{(A_1)} ds_A = t\int_{A_0}^{A_1} \nu_0(A)\,dA + t^2 \int_{A_0}^{A_1} \nu_1(t, A)\,dA.$$

Nun ist nach Gleichung (56) der Inhalt des von den geodätischen Linien A_0 und A_1 und dem Kreis t gebildeten Sektors

$$J = \lim_{\tau \to 0} \int_{\tau}^{t} \int_{A_0}^{A_1} dt\, g(t, A, 0, 1)\, dA = \int_{0}^{t} \int_{A_0}^{A_1} (\nu_0(A) + t\nu_1(t, A))\, t\, dt\, dA$$

$$= \frac{t^2}{2} \int_{A_0}^{A_1} \nu_0(A)\, dA + \frac{t^3}{3} \int_{A_0}^{A_1} \nu_1(\vartheta, A)\, dA \qquad (0 < \vartheta < t),\text{[24]}$$

während das halbe Produkt der Längen des Radius und des Kreisbogens den Wert

$$P = \frac{1}{2} t \left[t \int_{A_0}^{A_1} \nu_0(A)\, dA + t^2 \int_{A_0}^{A_1} \nu_1(t, A)\, dA \right]$$

hat. Bildet man den Quotienten und läßt t gegen 0 gehen, so wird

$$\lim_{t \to 0} \frac{J}{P} = 1,$$

und das ist der Inhalt des Satzes.

---

[24]) Da der Übergang von den Parametern u, v zu den Parametern t, A nur für $t \neq 0$ gestattet ist, muß zunächst $J = \lim_{\tau \to 0} \int_{\tau}^{t} \int_{A_0}^{A_1} g\, d\, t\, dA$ gesetzt werden.

(Eingegangen am 4. 4. 1929.)

Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues.

Première Partie: Les superpositions de fonctions absolument continues.

Von

Nina Bary in Moskau.

Introduction.

En 1881 Camille Jordan a introduit dans la science la classe importante des fonctions à variation bornée. Il donna pour la première fois leur définition dans une Note des Comptes Rendus *Sur la série de Fourier*[1]). Le titre même de cette Note montre quelle était l'origine de la notion introduite[2]). Il s'agissait de généraliser les résultats classiques de Dirichlet sur la représentation des fonctions continues par des séries de Fourier. La condition que Dirichlet lui-même avait imposée à la fonction dont on considérait la série de Fourier n'existe plus nécessairement pour la somme de deux fonctions si elle est vraie pour chacune d'elles. Il était nécessaire d'écarter cet inconvénient. Or, les fonctions à variation bornée introduites par Jordan, dont chacune est la différence de deux fonctions monotones, forment une famille invariante relativement aux quatre opérations de l'arithmétique.

La question qui se posait naturellement au moment de la découverte des fonctions à variation bornée était celle de la relation entre la famille de *toutes* les fontions continues et la nouvelle famille de Jordan. On connaissait déjà l'exemple célèbre donné par Weierstrass d'une fonction continue privée de dérivée finie en chaque point; cet exemple prouvait que la

---

[1]) Séance du 31 janvier 1881.

[2]) Cf. Ch. de la Vallée-Poussin, Communication faite au Congrès International des Mathématiciens à Strasbourg en 1920.

fonction continue la plus générale n'est pas à variation bornée, donc, que la famille introduite par Jordan n'est qu'une partie de la famille générale de toutes les fonctions continues[8]).

Les recherches ultérieures de M. Lebesgue ont montré que cette partie est très petite: non seulement chaque fonction à variation bornée a une derivée presque partout, mais encore cette dérivée est sommable c'est-à-dire intégrable au sens de M. Lebesgue.

On sait que l'étude des fonctions à variation bornée a été complétée par M. Vitali qui a trouvé un critère précis pour les intégrales indéfinies de M. Lebesgue et a donné le nom de fonctions absolument continues aux fonctions qu'il avait découvertes et qui ne forment qu'une partie de la famille des fonctions à variation bornée. Rappelons qu'une fonction $f(x)$ est dite *absolument continue* dans (a, b), si la somme de ses oscillations, dans un système quelconque d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas et contenus dans (a, b), tend vers zéro avec la somme des longueurs de ces intervalles.

Dans ces conditions on aurait pu croire qu'il est inutile de chercher à représenter chaque fonction continue au moyen d'un nombre fini de fonctions à variation bornée et *a fortiori* au moyen d'un nombre fini de fonctions absolument continues.

Et cependant on peut démontrer que le problème posé admet une solution *positive*. Il est, en effet, possible de représenter la fonction continue la plus générale sous la forme d'une somme de deux superpositions de fonctions à variation bornée

$$F(x) = F_1[\Phi_1(x)] + F_2[\Phi_2(x)]$$

et même sous la forme d'une somme de trois superpositions de fonctions absolument continues

$$F(x) = f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x) + f_3[\varphi_3(x)].$$

Ainsi une fonction continue arbitraire peut être représentée au moyen de quatre fonctions à variation bornée ou au moyen de six fonctions absolument continues. Il est intéressant de remarquer que le nombre de ces dernières ne peut pas être réduit.

C'est l'étude de la représentation finie des fonctions continues au moyen de fonctions absolument continues qui est l'objet de ce travail. Voici le contenu des chapitres:

---

[8]) Bien que les fonctions à variation bornée peuvent être *discontinues*, ici et dans tout ce qui suit, en parlant des fonctions à variations bornées, nous supposerons qu'il ne s'agit que de fonctions *continues* et à variation bornée.

Dans le premier chapitre nous étudions les propriétés des fonctions qui sont des superpositions de fonctions absolument continues. Nous indiquons un critère nécessaire et suffisant pour qu'une fonction continue soit une telle superposition[4]). Il résulte de ce critère qu'il serait inutile de considérer des superpositions *multiples* de fonctions absolument continues puisque la superposition de trois fonctions absolument continues se réduit toujours à celle de deux fonctions de la même nature.

Nous étudions également dans le même chapitre une classe plus étendue de fonctions continues, c'est celle des *fonctions jouissant de la propriété N*. Cette classe importante a été introduite par M. Lusin[5]) qui fut conduit à la notion de ces fonctions en faisant une étude approfondie du problème de l'intégration dans toute sa généralité. Il est d'autant plus naturel de considérer ces fonctions dans le travail présent, que leur classe contient celle des superpositions de fonctions absolument continues, et qu'elles jouissent de plusieurs propriétés importantes qui appartiennent donc de même aux superpositions.

Dans le second chapitre nous étudions la somme de deux superpositios de fonctions absolument continues. Nous donnons d'abord une condition suffisante pour qu'une fonction continue soit une telle somme, et ensuite une condition nécessaire. Cette dernière condition nous conduit à une nouvelle classe de fonctions continues qui sont privées de cette propriété. Nous leur avons donné le nom de *fonctions ridées*. Une fonction ridée ne peut pas être présentée sous la forme d'une somme de deux superpositions de fonctions absolument continues.

Enfin *dans le troisième chapitre* nous démontrons le théorème fondamental d'après lequel toute fonction continue peut être représentée sous la forme de trois superpositions de fonctions absolument continues. Sans résoudre complètement le problème de la représentation des fonctions continues au moyen de fonctions à variation bornée, et sans poser la question sur les superpositions multiples de ces fonctions, nous démontrons dans ce chapitre que toute fonction continue peut être représentée sous la forme d'une somme de deux superpositions de fonctions à variation bornée; donc le nombre des fonctions se réduit à quatre au lieu des six qui étaient nécessaires si on supposait la continuité absolue.

---

[4]) Ce critère a été donné par M. Menchoff et moi dans un Mémoire *Sur l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes et les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues* (Annali di Matematica série IV, tome V, 1927—1928).

[5]) N. Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique* (Thèse, en russe. Moscou 1915, p. 109).

Quelques-uns des résultats de ce travail ont été énoncés précédemment dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*).

Qu'il me soit permis d'exprimer mes vifs remerciements à M. C. Carathéodory qui m'a fait l'honneur de m'inviter à publier ce Mémoire dans les Mathematische Annalen; à MM. Hadamard, Lebesgue et Denjoy qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail; enfin à la Fondation Rockefeller qui m'a donné la possibilité de travailler à l'étranger ainsi qu'à MM. Birkhoff et Carathéodory qui m'ont fait l'honneur de solliciter pour moi la bourse Rockefeller.

Pour des raisons typographiques le Mémoire a dû être divisé en deux parties. La première que voici, contient les chapitres I et II, la seconde, à suivre prochainement, contiendra le chapitre III avec le théorème fondamental.

Table des matières de la première partie.

Chapitre I. Etude des superpositions de fonctions absolument continues.

---

*) N. Bary et D. Menchoff, *Sur l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes et les fonctions absolument continues* (Comptes Rendus **182** (1926), p. 1373). Un mémoire sous le même titre a paru dans les Annali di Matematica (4) **5** (1927–1928).

N. Bary, *Sur la représentation analytique d'une classe de fonctions continues* (C. R. **183** (1926), p. 469).

N. Bary, *Sur la représentation finie des fonctions continues* (C. R. **184** (1927), p. 1112).

N. Bary, *Sur la structure analytique d'une fonction continue arbitraire* (C. R. **186** (1928), p. 1414).

N. Bary, *Sur quelques formes mixtes dans la représentation finie d'une fonction continue arbitraire* (C. R. **188** (1929), p. 980).

N. Bary, *Sur les fonctions jouissant de la propriété N* (C. R. **189** (1929), p. 441).

Chapitre I.

Étude des superpositions de fonctions absolument continues.

I. Notations et préliminaires.

1. Image d'un ensemble. — Les fonctions qui feront l'objet de nos considérations sont continues et définies sur le segment $[0,1]$, extrémités comprises [7]).

Pour pénétrer plus profondément dans la structure de ces fonctions, nous avons besoin d'introduire quelques notions préliminaires qui nous permettront de faciliter l'exposé. Parmi ces notions une des plus importantes pour l'étude que nous avons en vue est celle d'*image* d'un ensemble linéaire E donné.

---

[7]) Nous conservons la distinction, ainsi que le fait M. Denjoy, entre l'*intervalle* (a,b) (ensemble $a<x<b$) et le *segment* $[a,b]$ (ensemble $a\leqq x\leqq b$).

Soit $f(x)$ une fonction continue définie sur le segment $[0,1]$ et soit E un ensemble quelconque de points situé dans le même segment. Les valeurs prises par la fonction $y=f(x)$ aux points de l'ensemble E forment un ensemble de points E bien déterminé situé sur l'axe OY; nous dirons que c'est l'*image* de l'ensemble E définie par la fonction $f(x)$, et nous la désignerons, dans ce qui suit, par $f(\mathsf{E})$.

Ainsi nous pouvons écrire

$$E=f(\mathsf{E}).$$

Dans la suite il nous sera très souvent nécessaire de connaître la mesure de l'image d'un ensemble donné, c'est-à-dire le nombre $\operatorname{mes} f(\mathsf{E})$. A cet effet nous allons indiquer quelques cas importants pour les applications dans lesquels on peut affirmer que la mesure de l'image est nulle, c'est-à-dire que l'image d'un ensemble est un ensemble de mesure nulle. Nous obtiendrons ces cas comme conséquences du lemme suivant:

Lemme. — *Si $f(x)$ est une fonction continue dont les nombres dérivés sont, sur un ensemble E, inférieurs en valeur absolue à une constante M, on a pour l'image $f(\mathsf{E})$ de cet ensemble*

$$\operatorname{mes}_e f(\mathsf{E}) \leqq 2M \operatorname{mes}_e \mathsf{E}$$

(mes_e désignant la mesure extérieure[8])).

Soit ξ un point de E et η un nombre positif aussi petit qu'on veut. En vertu de l'hypothèse faite sur l'ensemble E, il existe un intervalle δ contenant ξ et tel que pour tout point x de δ on a

$$\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right|<M+\eta.$$

Désignons par ω_δ l'oscillation de $f(x)$ sur δ; comme $f(x)$ est une fonction continue, on a

$$\omega_\delta=f(x'')-f(x')$$

où x' et x'' sont deux points de δ. Il en résulte

$$\left|\frac{f(x'')-f(\xi)}{x''-\xi}\right|<M+\eta; \qquad \left|\frac{f(x')-f(\xi)}{x'-\xi}\right|<M+\eta,$$

donc

$$\omega_\delta \leqq |f(x'')-f(\xi)|+|f(\xi)-f(x')|<(M+\eta)|x''-\xi|+(M+\eta)|x'-\xi|,$$

et puisque x' et x'' appartiennent à δ ainsi que le point ξ, on a

$$\omega_\delta<2(M+\eta)\delta.$$

---

[8]) Des considérations un peu plus compliquées que celles du texte permettraient de supprimer le coefficient 2 et de démontrer l'inégalité $\operatorname{mes}_e f(\mathsf{E}) \leqq M \operatorname{mes}_e \mathsf{E}$. Nous ne nous arrêtons pas sur ce point puisque le coefficient ne joue aucun rôle dans la suite.

Soit E_n l'ensemble de tous les points ξ de E tels que l'inégalité précédente est vérifiée pour tout intervalle δ contenant ξ et de longueur inférieure ou égale à $\frac{1}{n}$. Désignons par E_n l'image de E_n et par E celle de E, donc

$$E_n = f(\mathsf{E}_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$E = f(\mathsf{E}).$$

Supposons que le lemme soit démontré pour l'ensemble E_n, quel que soit n, et démontrons qu'il est alors vrai pour l'ensemble E.

En effet, E est la réunion des ensembles E_n, donc E la réunion des E_n. D'ailleurs il est évident que les ensembles E_n forment une suite croissante, c'est-à-dire l'ensemble E_n est contenu dans E_{n+1}, quel que soit n.

On peut donc, quel que soit σ, choisir un entier n assez grand pour que l'on ait

$$\operatorname{mes}_e E - \operatorname{mes}_e E_n < \sigma.$$

En supposant que le lemme est déjà démontré pour l'ensemble E_n, on a

$$\operatorname{mes}_e E - \sigma < \operatorname{mes}_e E_n < 2M \operatorname{mes}_e \mathsf{E}_n < 2M \operatorname{mes}_e \mathsf{E},$$

et comme σ est aussi petit que l'on veut, il en résulte

$$\operatorname{mes}_e E \leqq 2M \operatorname{mes}_e \mathsf{E}.$$

Tout revient donc à démontrer le lemme pour l'ensemble E_n.

Quel que petit que soit le nombre positif ε, on peut enfermer l'ensemble E_n dans une infinité dénombrable d'intervalles

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots$$

sans points communs deux à deux et tels que l'on ait (en désignant par la même lettre un intervalle et sa longueur)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \operatorname{mes}_e \mathsf{E}_n + \varepsilon.$$

Il est d'ailleurs évident que chacun des intervalles δ_k peut être supposé de longueur inférieure à $\frac{1}{n}$ et contenant nécessairement au moins un point ξ de E_n.

En désignant par ω_k l'oscillation de $f(x)$ sur l'ntervalle δ_k, on a donc l'inégalité

$$\omega_k < 2(M + \eta)\,\delta_k,$$

d'où il résulte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k < 2(M + \eta) \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < 2(M + \eta)(\operatorname{mes}_e \mathsf{E}_n + \varepsilon).$$

Or, l'ensemble E_n qui est l'image de E_n est évidemment contenu dans cette somme $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k$, donc

$$\text{mes}_e E_n < 2(M+\eta)(\text{mes}_e \mathsf{E}_n + \varepsilon),$$

et puisque ε et η sont arbitrairement petits, on a

$$\text{mes}_e E_n \leqq 2M \,\text{mes}_e \mathsf{E}_n,$$

et le lemme est ainsi démontré.

Voici un corollaire immédiat du lemme précédent:

Corollaire. — *Si $f(x)$ est une fonction à nombres dérivés bornés sur un ensemble E de mesure nulle, l'image $f(\mathsf{E})$ de cet ensemble est de mesure nulle.*

En effet, si les nombres dérivés de $f(x)$ sont inférieurs en valeur absolue à une constante M sur E on a en vertu du lemme

$$\text{mes}_e f(\mathsf{E}) \leqq 2M \,\text{mes}\, \mathsf{E} = 0.$$

On en déduit sans peine le théorème suivant:

Théorème 1. — *Si $f(x)$ est une fonction continue dont la dérivée est déterminée et finie en chaque point d'un ensemble E de mesure nulle, on a* $\text{mes} f(\mathsf{E}) = 0$.

Pour le voir, on désigne par E_n l'ensemble des points de E où l'on a l'inégalité

$$|f'(x)| < n.$$

Chaque ensemble E_n fait partie de E, donc $\text{mes}\,\mathsf{E}_n = 0$. Si $E_n = f(\mathsf{E}_n)$ on a en vertu du corollaire précédent

$$\text{mes}\, E_n = 0.$$

Or E est la somme des ensembles E_n, donc $E = f(\mathsf{E})$ est contenu dans la somme des E_n, d'où il suit

$$\text{mes}\, E = 0,$$

c. q. f. d.

Voici maintenant une autre conséquence du lemme précédent:

Théorème 2. — *Si $f(x)$ est une fonction continue dont la dérivée $f'(x)$ est nulle sur un ensemble E, l'image $f(\mathsf{E})$ est un ensemble de mesure nulle.*

En effet, ε étant positif et arbitrairement petit, on a sur E l'inégalité

$$|f'(x)| < \varepsilon;$$

donc, en vertu du lemme précédent,

$$\text{mes}_e f(\mathsf{E}) \leqq 2\varepsilon \,\text{mes}_e \mathsf{E}.$$

Nous supposons, comme toujours, que $f(x)$ est définie sur le segment $[0,1]$, donc $\text{mes}_e \mathsf{E} \leqq 1$. Il en résulte, ε étant aussi petit qu'on veut,

$$\text{mes} f(\mathsf{E}) = 0$$

ce qui démontre le théorème.

Nous allons maintenant déduire du même lemme un théorème qui permettra d'évaluer la mesure de l'image $f(\mathsf{E})$ d'un ensemble E dans le cas où la dérivée $f'(x)$ existe en chaque point le E et qu'elle est *sommable* sur E.

Théorème 3. — *Si $f(x)$ est une fonction continue dont la dérivée $f'(x)$ est déterminée et finie en chaque point d'un ensemble mesurable E, et si $f'(x)$ est sommable sur E, on a*

$$\text{mes}_e f(\mathsf{E}) \leqq 2 \int_{\mathsf{E}} |f'(x)|\, dx. \text{ [9]}$$

Pour le voir, prenons un nombre ε aussi petit que l'on veut mais fixe et désignons par E_n l'ensemble de tous les points de E pour lesquels on a

$$(n-1)\varepsilon \leqq |f'(x)| < n\varepsilon \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il est évident que

$$\mathsf{E} = \mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_2 + \ldots + \mathsf{E}_n + \ldots,$$

tous les E_n étant d'ailleurs sans points communs deux à deux.

En vertu du lemme nous avons

$$\text{mes}_e f(\mathsf{E}_n) < 2n\varepsilon \text{ mes } \mathsf{E}_n = 2(n-1)\varepsilon \text{ mes } \mathsf{E}_n + 2\varepsilon \text{ mes } \mathsf{E}_n.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\int_{\mathsf{E}_n} |f'(x)|\, dx \geqq \varepsilon(n-1) \text{ mes } \mathsf{E}_n,$$

donc

$$\text{mes}_e f(\mathsf{E}_n) \leqq 2 \int_{\mathsf{E}_n} |f'(x)|\, dx + 2\varepsilon \text{ mes } \mathsf{E}_n.$$

On a

$$\text{mes}_e f(\mathsf{E}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}_e f(\mathsf{E}_n) \leqq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathsf{E}_n} |f'(x)|\, dx + 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes } \mathsf{E}_n.$$

Comme les ensembles E_n sont deux à deux sans points communs et comme $\mathsf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_n$, on a

$$\text{mes}_e f(\mathsf{E}) \leqq 2 \int_{\mathsf{E}} |f'(x)|\, dx + 2\varepsilon \text{ mes } \mathsf{E}.$$

---

[9]) De même que pour le lemme, on pourrait supprimer ici le facteur 2, mais ceci n'a aucune importance dans la suite.

Or, ε est aussi petit que l'on veut, d'où il suit

$$\operatorname{mes}_e f(\mathsf{E}) \leqq 2 \int_{\mathsf{E}} |f'(x)|\, dx$$

ce qui démontre le théorème.

2. Fonctions jouissant de la propriété N. — Après avoir terminé ces considérations sur les images des ensembles nous allons porter notre attention sur la classe remarquable des fonctions qui ont pour chaque ensemble de mesure nulle une image de mesure nulle. Ces fonctions ont été introduites par M. Lusin[10]) qui a étudié leur rôle dans la théorie de l'intégration.

Définition. — Nous dirons avec M. Lusin qu'une fonction continue $f(x)$ *jouit de la propriété* N (propriété-nulle) dans un intervalle (a, b) si pour chaque ensemble e de mesure nulle dans (a, b) elle a une image $f(e)$ également de mesure nulle.

Il suit de la définition même que chaque fonction absolument continue jouit de la propriété N.

En effet, e étant un ensemble quelconque de mesure nulle, soit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ une suite d'intervalles sans point commun deux à deux et enfermant e.

Si $f(x)$ est une fonction absolument continue, la somme des oscillations de $f(x)$ sur les δ_i tend vers zéro en même temps que la somme des longueurs de ces δ_i. Il en résulte évidemment que l'image $f(e)$ est contenue dans un système d'intervalles dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut. Donc $\operatorname{mes} f(e) = 0$.

On sait que les intégrales indéfinies au sens de M. Lebesgue sont des fonctions absolument continues, donc elles jouissent de la propriété N.

M. Lusin a démontré[11]) que les intégrales indéfinies au sens de M. Denjoy jouissent également de la propriété N.

Les fonctions jouissant de la propriété N jouent un rôle important dans ce qui suit; c'est pourquoi il est nécessaire d'indiquer ici quelques-unes de leurs propriétés.

Tout d'abord il faut signaler un fait remarquable établi par M. Banach[12]), c'est que toute fonction jouissant de la propriété N a une dérivée sur un ensemble de mesure positive.

---

[10]) N. Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique* (Thèse, en russe, Moscou 1915, p. 109).

[11]) N. Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique* (en russe), Moscou 1915, p. 116 et 118.

[12]) S. Banach, *Sur une classe de fonctions continues* (*Fund. Math.* 8 (1926), p. 166—172).

Pour démontrer ce théorème nous sommes obligés d'introduire avec M. Banach les deux définitions suivantes:

Définition. — Nous dirons avec M. Banach qu'une fonction continue $f(x)$ *jouit de la propriété* T_1 si l'ensemble E_1 des points y_0, tels que la droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = f(x)$ *en une infinité de points*, est de mesure nulle, $\text{mes}\, E_1 = 0$.

Définition. — Nous dirons avec M. Banach qu'une fonction continue $f(x)$ *jouit de la propriété* T_2 si l'ensemble E_2 des points y_0, tels que la droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = f(x)$ *en une infinité non dénombrable de points* est de mesure nulle, $\text{mes}\, E_2 = 0$.

Ces définitions posées, remarquons d'abord qu'une fonction continue peut jouir de la propriété T_1 sans jouir de la propriété N; de même une fonction continue jouissant de la propriété N peut ne pas posséder la propriété T_1. Nous verrons dans la suite des exemples de cette nature (n° 8 et n° 10).

Il n'en est plus ainsi pour la propriété T_2 comme il résulte du théorème suivant de M. Banach[13]).

Théorème. — *Toute fonction continue jouissant de la propriété* N *jouit nécessairement de la propriété* T_2.

Pour le démontrer, désignons par E l'ensemble des points y_0, tels que la droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = f(x)$ en une infinité non dénombrable de points. En supposant que $f(x)$ jouit de la propriété N nous voulons démontrer que $\text{mes}\, E = 0$.

Pour ne pas employer de nombres transfinis nous donnons ici une démonstration qui diffère de celle de M. Banach.

Nous supposons, comme toujours, que $f(x)$ est définie dans le segment $[0, 1]$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Menons par chaque point y de E une droite parallèle à l'axe OX, soit σ_y le segment de cette droite compris entre les droites $x = 0$ et $x = 1$.

On sait que σ_y contient une infinité non dénombrable de points de la courbe $y = f(x)$. Divisons σ_y en deux parties égales; l'une au moins de ces parties jouit de la même propriété. Si les deux parties jouissent de cette propriété nous les désignerons par σ_1' et σ_2' en les numérotant de gauche à droite. Si ce n'est que l'une des parties de σ_y qui contient une infinité non dénombrable de points de la courbe $y = f(x)$, nous la divisons en deux parties égales et nous continuons ainsi jusqu'à ce que nous ayons deux segments jouissant de la même propriété; nous les désignons par σ_1' et σ_2'. Nous répétons avec σ_1' et σ_2' le même procédé; nous obtenons ainsi

[13]) S. Banach, *Sur une classe de fonctions continues* (*Fund. Math.* 8 (1926), p. 166—172).

deux segments σ_1'', σ_2'' contenus dans σ_1' et deux segments σ_3'' et σ_4'' contenus dans σ_2'; tous les σ'' contiennent une infinité non dénombrable de points de la courbe $y = f(x)$.

D'une manière générale, les segments $\sigma_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^k)$ étant déjà déterminés et tels que chaque $\sigma_i^{(k)}$ contient une infinité non dénombrable de points de la courbe $y = f(x)$, nous divisons chaque $\sigma_i^{(k)}$ en 2^m parties égales où m est le plus petit entier positif tel que deux parties obtenues contiennent une infinité non dénombrable de points de la courbe $y = f(x)$. Nous désignerons ces parties par $\sigma_{2i-1}^{(k+1)}$ et $\sigma_{2i}^{(k+1)}$. On voit que ce procédé peut être répété indéfiniment; il ne sera jamais arrêté puisque si un segment contient une infinité non dénombrable de points de la courbe $y = f(x)$, on trouvera toujours deux segments qui sont contenus dans le segment considéré et jouissent de la même propriété.

Nous considérons maintenant le segment $[0, 1]$ d'un axe nouveau OT. Quel que soit l'entier positif k, en le divisant en 2^k parties égales $\varrho_i^{(k)}$ nous faisons correspondre à la i-ième partie $(1 \leqq i \leqq 2^k)$ le segment $\sigma_i^{(k)}$ de chaque droite parallèle à l'axe OX et passant par un point y de E.

Quel que soit le point t_0 situé dans le segment $[0, 1]$ de l'axe OT, il peut être considéré comme la limite d'une suite de segments emboîtés les uns dans les autres

$$\varrho_{i_1}^{(1)}, \varrho_{i_2}^{(2)}, \ldots, \varrho_{i_k}^{(k)}, \ldots .$$

Il correspond à chaque $\varrho_{i_k}^{(k)}$ un segment $\sigma_{i_k}^{(k)}$ sur chaque droite parallèle à l'axe OX et passant par un point de E. Comme les longueurs des $\sigma^{(k)}$ tendent vers zéro quand k croît indéfiniment et comme il est facile à voir d'après la construction même des $\sigma^{(k)}$ que les segments correspondants

$$\sigma_{i_1}^{(1)}, \sigma_{i_2}^{(2)}, \ldots, \sigma_{i_k}^{(k)}, \ldots$$

sont encore emboîtés les uns dans les autres, il en résulte qu'à t_0 correspond un point bien déterminé M_y^0 sur chaque droite parallèle à OX et passant par un point de E.

D'ailleurs, si t_0 n'est pas de la forme $\frac{p}{2^q}$, où p et q sont des entiers positifs, il est bien évident qu'il n'existe aucun point t_1, $t_1 \neq t_0$ pour lequel le point M_y' correspondant coïncide avec M_y^0.

Donc, il existe une infinité non dénombrable de points t jouissant des propriétés suivantes: 1° sur chaque droite parallèle à l'axe OX et passant par un point y de E il existe un point M_y^0 correspondant à t; 2° si $t_0 \neq t_1$, les points correspondants M_y^0 et M_y' sont essentiellement distincts.

Désignons par e_{t_0} l'ensemble des points x qui sont les abscisses des points M_y^0 correspondant à t_0 en supposant que y parcourt tous les points de E. D'après la définition même de e_{t_0}, on voit que

$$f(e_{t_0}) = \mathsf{E}.$$

Si nous ne considérons que les t qui ne sont pas de la forme $\frac{p}{2^q}$ où p et q sont des entiers positifs, il est bien évident que pour $t_1 \neq t_2$ les ensembles e_{t_1} et e_{t_2} n'ont aucun point commun.

On peut démontrer que chacun des ensembles e_t est mesurable[14]). Il existe une infinité non dénombrable de ces ensembles e_t sans point commun deux à deux; il en résulte qu'il existe une infinité non dénombrable d'ensembles e_t qui sont *de mesure nulle.*

Or, on a pour chaque t

$$f(e_t) = \mathsf{E}$$

et comme $f(x)$ jouit de la propriété N, et il existe des e_t de mesure nulle, on voit bien que $\operatorname{mes} \mathsf{E} = 0$, c. q. f. d.

Ce théorème étant établi nous pouvons démontrer le théorème suivant de M. Banach[15]).

Théorème. — *Toute fonction continue $f(x)$ jouissant de la propriété N possède une dérivée sur un ensemble de mesure positive.*

Nous avons vu que si $f(x)$ jouit de la propriété N, elle jouit nécessairement de la propriété T_2. Donc, l'ensemble E des points y_0, tels que la droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = f(x)$ en une infinité non dénombrable de points, est de mesure nulle. Il en résulte que son complémentaire $C\mathsf{E}$ est de mesure positive (sauf le cas où $f(x)$ est constante, mais dans ce cas le théorème à démontrer devient trivial).

Si E est l'ensemble de tous les points x pour lesquels $f(x)$ appartient à $C\mathsf{E}$, on a évidemment

$$\operatorname{mes} E > 0,$$

puisque nous savons que $\operatorname{mes} C\mathsf{E} > 0$ et que $f(x)$ jouit de la propriété N.

Soit y_0 un point de $C\mathsf{E}$. La droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = f(x)$ en un ensemble de points fini ou dénombrable. D'ailleurs, $f(x)$ étant continue, cet ensemble est nécessairement fermé. Or, chaque ensemble fermé fini ou dénombrable contient nécessairement des points isolés. Soit M^0 l'un d'eux et x_0 l'abscisse de ce point. Ainsi on peut faire correspondre à chaque point y_0 de $C\mathsf{E}$ un point x_0 jouissant de la propriété suivante: si δ est un intervalle assez petit contenant x_0, on a pour chaque point x appartenant à δ l'inégalité $f(x) \neq f(x_0)$; on a d'ailleurs $f(x_0) = y_0$.

---

[14]) La démonstration se fait en tenant compte de la correspondance établie entre les points de $[0, 1]$ et des σ_y. Elle exige la connaissance de la théorie des ensembles analytiques et, en particulier, du résultat suivant de cette théorie *l'ensemble des valeurs qu'une fonction continue prend une infinité non dénombrable de fois est un ensemble analytique.* Ce résultat est dû à MM. Sierpinski et Mazurkiewicz (*Sur un problème concernant les fonctions continues, Fund. Math.* 6 (1924), p. 161—169).

[15]) Nous donnons ici la démonstration de M. Banach lui-même.

Désignons par E' l'ensemble de tous ces points x_0. Comme l'image $f(E')$ coïncide évidemment avec $C\mathsf{E}$, on voit que $\text{mes}\, E' > 0$. Nous allons démontrer que $f(x)$ a une dérivée presque partout sur E'.

A cet effet, désignons par D l'ensemble de tous les points x où $f(x)$ atteint son maximum ou son minimum propre. M. Denjoy a démontré que cet ensemble est toujours dénombrable.

Soit maintenant x_0 un point de E' qui n'appartient pas à D. D'après la définition même des ensembles E' et D, en voit bien qu'en ce point tous les quatre nombres dérivés de $f(x)$ ont même signe. Il en résulte, d'après un théorème de M. Saks[16]), que $f'(x)$ existe presque partout sur $E' - D$, donc presque partout sur E' ce qui démontre le théorème.

On remarque que, d'après la définition même des fonctions jouissant de la propriété N, si une fonction continue $f(x)$ jouit de la propriété N dans un intervalle (a, b), elle jouit de la même propriété dans chaque intervalle δ contenu dans (a, b). D'après le théorème de M. Banach, on peut donc affirmer que si $f(x)$ jouit de la propriété N dans (a, b), elle possède une dérivée sur un ensemble dont la mesure est positive dans chaque intervalle δ contenu dans l'intervalle (a, b).

Dans la suite nous aurons souvent à parler d'ensembles dont la mesure est positive dans chaque intervalle δ contenu dans un intervalle (a, b). C'est pourquoi nous croyons qu'il est utile d'introduire la notion suivante:

Définition. — *Nous dirons qu'une propriété a lieu quasi-partout dans un intervalle* (a, b) *si elle a lieu dans un ensemble* E *dont la mesure est positive dans chaque intervalle* δ *contenu dans* (a, b).

Cette terminologie adoptée, nous pourrons énoncer le théorème de M. Banach de la manière suivante: *Si* $f(x)$ *est une fonction continue jouissant de la propriété* N *dans un intervalle* (a, b), *elle possède une dérivée quasi-partout dans* $(a\ b)$.

Ce théorème nous permettra dans la suite (n° 13) d'indiquer une représentation des fonctions jouissant de la propriété N au moyen de fonctions absolument continues.

Il est important de remarquer que la dérivée d'une fonction jouissant de la propriété N existe *quasi*-partout ce qui n'entraine nullement son existence *presque* partout. Nous verrons dans la suite (n° 8) des fonctions jouissant de la propriété N et privées de dérivées sur un ensemble de mesure *positive*. Mais, ce qui est intéressant, si la dérivée d'une fonction jouissant de la propriété N, considérée aux points où elle existe, est

[16]) S. Saks, *Fund. Math.* 5 (1924), p. 98—104.

sommable, elle détermine parfaitement la fonction (à une constante additive près). Nous avons en effet le théorème[17]) suivant:

Théorème. — *Si $f(x)$ est une fonction continue jouissant de la propriété N et dont la dérivée $f'(x)$ considérée aux points où elle existe est sommable, la fonction $f(x)$ est absolument continue, donc parfaitement déterminée par la connaissance de sa dérivée.*

Pour le démontrer, considérons un intervalle (α, β) quelconque intérieur à l'intervalle (a, b) où $f(x)$ est définie. Soient m et M le minimum est le maximum de $f(x)$ sur (α, β), et H l'ensemble des points de (α, β) où $f'(x)$ est déterminée est finie. Nous allons démontrer que l'oscillation de $f(x)$ sur (α, β) ne surpasse pas la valeur $2\int\limits_{\mathsf{H}} |f'(x)|\, dx$.

A cet effet reprenons le raisonnement de M. Banach pour démontrer l'existence de la dérivée. Si E est l'ensemble des points y_0 de (m, M) tels que la droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = f(x)$ en une infinité non dénombrable de points, on a mes $\mathsf{E} = 0$, donc

$$\text{mes}\, C\mathsf{E} = M - m,$$

$C\mathsf{E}$ étant le complémentaire de E par rapport à l'intervalle (m, M).

M. Banach avait démontré l'existence d'un ensemble E' dont l'image coïncide avec $C\mathsf{E}$ et sur lequel $f'(x)$ existe presque partout. En désignant par E'' l'ensemble des points de E' où $f'(x)$ existe, on a donc

$$\text{mes}\, E'' = \text{mes}\, E'$$

et puisque $f(x)$ jouit de la propriété N

$$\text{mes}\, f(E'') = \text{mes}\, f(E') = \text{mes}\, C\mathsf{E} = M - m.$$

Or, $f'(x)$ étant supposée sommable sur l'ensemble où elle existe, on a en vertu d'un théorème du n° 1 l'inégalité

$$M - m = \text{mes}\, f(E'') \leqq 2\int\limits_{E''} |f'(x)|\, dx$$

et comme en chaque point de E'' la dérivée $f'(x)$ existe, E'' fait partie de H, donc

$$M - m \leqq 2\int\limits_{H} |f'(x)|\, dx.$$

Or, (α, β) est un intervalle *quelconque* intérieur à (a, b), donc l'inégalité précédente permet d'affirmer que $f(x)$ *est à variation bornée sur* (a, b) puisque la somme de ces oscillations sur un nombre fini quelconque

---

[17]) Voir ma Note *Sur les fonctions jouissant de la propriété N.* (*Comptes Rendus* **189** (1929), p. 441.)

d'intervalles n'empiétant pas ne surpasse pas la valeur $2\int\limits_Q |f'(x)|\,dx$, où Q est l'ensemble de tous les points de (a, b) où $f'(x)$ existe, et cette intégrale est finie, par hypothèse.

Ainsi $f(x)$ est à variation bornée et comme elle jouit de la propriété N, il en résulte qu'elle est absolument continue[18]), c. q. f. d.

Voici un corollaire immédiat du théorème démontré: *Si $f(x)$ est une fonction jouissant de la propriété N et dont la dérivée est nulle partout où elle existe, $f(x)$ se réduit à une constante.*

Une autre conséquence du même théorème est une proposition de MM. Saks[19]) et Menchoff[20]) *si la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ jouissant de la propriété N existe* presque partout *et si elle est sommable, $f(x)$ est absolument continue.*

Il est tout à fait naturel de poser la question si, dans le cas où la dérivée $f'(x)$ n'est plus sommable, la fonction $f(x)$ jouissant de la propriété N est encore déterminée par la connaissance de sa dérivée. La réponse est négative même dans le cas où la dérivée existe presque partout. On peut, en effet, construire deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant de la propriété N qui ont presque partout la même dérivée et dont la différence n'est pas une constante. Pour le voir considérons la fonction bien connue de Cantor qui est constante dans chaque intervalle contigu à un ensemble parfait P, mes $P = 0$. Soit $f(x)$ cette fonction. Nous démontrerons au n° 21 qu'il existe pour chaque fonction continue $f(x)$ et tout ensemble parfait non dense P deux fonctions continues $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ telles que

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

et

$$\text{mes}\, \varphi(P) = \text{mes}\, \psi(P) = 0.$$

Posons $f_1(x) = \varphi(x)$ sur P et interpolons la linéairement dans les contigus à P. Posons

$$f_2(x) = f_1(x) - f(x).$$

---

[18]) On peut déduire ce théorème de la théorie de totalisation de M. Denjoy. Il paraît que la première démonstration de ce théorème qui est très naturelle et ne dépend pas de la totalisation a été donnée par M. Banach (*Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*, *Fund. Math.* 7, p. 225–236).

[19]) Saks, *Fund. Math.* 7 (1925), p. 290. Ce théorème a été généralisé ensuite par M. Saks dans les *Fund. Math.* 12, p. 219 (*La condition N et l'intégrale de MM. Denjoy-Perron*).

[20]) Menchoff, *Sur la représentation conforme des domaines plans* (*Math. Annalen* 95 (1926), p. 645).

On voit bien que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont continues. On a

$$\text{mes}\, f_1(P) = \text{mes}\, \varphi(P) = 0,$$

$$\text{mes}\, f_2(P) = \text{mes}\, [-\psi(P)] = \text{mes}\, \psi(P) = 0.$$

Comme $f_1(x)$ est linéaire par hypothèse dans chaque contign à P et $f_2(x)$ est dans ces contigus linéaire comme différence d'une fonction linéaire et d'une constante, on voit que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissent de la propriété N. Or, dans chaque contigu à P chacune d'elles a une dérivée en chaque point et ces dérivées sont égales puisque $f'(x) = 0$ dans les contigus à P. Ainsi les dérivées sont égales presque partout, les fonctions jouissent de la propriété N et cependant leur différence n'est pas une constante, c. q. f. d.

3. Propriété N sur un ensemble. — On sait qu'il est souvent nécessaire de considérer l'allure d'une fonction sur un ensemble au lieu de l'étudier dans un intervalle entier. C'est pourquoi nous allons introduire la notion de fonction jouissant de la propriété N sur un ensemble donné.

Définition. — *Nous dirons qu'une fonction continue $f(x)$ jouit de la propriété N sur un ensemble E de mesure positive si, quel que soit l'ensemble e de mesure nulle contenu dans E, l'image $f(e)$ est encore de mesure nulle.*

Les théorèmes du n° 1 nous permettent d'indiquer quelques cas où l'on a la propriété N sur un ensemble. Voici deux propositions dont nous ferons usage dans la suite:

Théorème. — *Si $f(x)$ est une fonction à nombres dérivés bornés sur un ensemble E de mesure positive, $f(x)$ jouit de la propriété N sur cet ensemble.*

Et de même.

Théorème. — *Si $f(x)$ est une fonction continue qui possède une dérivée sur un ensemble de mesure positive, $f(x)$ jouit de la propriété N sur cet ensemble.*

Il est évident que ces deux conditions ne sont nullement nécessaires puisqu'une fonction continue jouissant de la propriété N sur un ensemble de mesure positive peut avoir en chaque point de cet ensemble tous les quatre nombres dérivés infinis [21]).

---

[21]) Il suffit de considérer une fonction qui est nulle en chaque point d'un ensemble parfait P, mes $P > 0$ et a des nombres dérivés infinis au points de cet ensemble. Des exemples de fonctions de cette nature ont été donnés par M. Denjoy (*Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, *Journal des Mathématiques pures et appliquées* 1915).

4. Critères suffisants pour la continuité absolue. — Les fonctions absolument continues joueront un rôle fondamental dans toutes les recherches qui suivent; c'est pourquoi nous allons indiquer ici deux cas pratiquement utiles où l'on peut affirmer la continuité absolue d'une fonction.

Nous savons déjà que toute fonction à variation bornée et jouissant de la propriété N est absolument continue. En particulier, toute fonction monotone jouissant de la propriété N est absolument continue.

Nous allons indiquer ici une proposition qui permet de décider dans certains cas si l'inverse d'une fonction absolument continue et croissante est encore absolument continue.

Théorème. — *Si $f(x)$ est une fonction croissante et absolument continue dont la dérivée $f'(x)$ diffère de zéro presque partout, la fonction inverse est encore absolument continue.*

Comme $y = f(x)$ est croissante, la fonction inverse $x = \varphi(y)$ est déterminée d'une manière univoque et elle est aussi croissante. Nous allons démontrer qu'elle jouit de la propriété N.

En effet, soit e un ensemble de mesure nulle sur l'axe OY et $e' = \varphi(e)$. Supposons que $\text{mes}\, e' > 0$. Les fonctions $f(x)$ et $\varphi(y)$ étant, par hypothèse, des fonctions inverses et toutes les deux croissantes, on a

$$e = f(e').$$

La dérivée $f'(x)$ diffère de zéro presque partout, donc de l'hypothèse $\text{mes}\, e' > 0$ il suit $\text{mes}\, e > 0$ [22]) ce qui est impossible. Par conséquent l'image $\varphi(e)$ de chaque ensemble e de mesure nulle est encore de mesure nulle, donc $\varphi(y)$ jouit de la propriété N, et comme elle est croissante il en résulte qu'elle est absolument continue, c. q. f. d.

Il nous reste à indiquer encore un cas pratiquement utile où l'on peut affirmer la continuité absolue d'une fonction. Il s'agit du lemme:

Lemme. — *Si $f(x)$ est une fonction continue dans un intervalle (a, b) dont la dérivée $f'(x)$ sur un ensemble E est inférieure en valeur absolue à une constante M et si l'ensemble complémentaire $C\mathsf{E}$ a une image $f(C\mathsf{E})$ de mesure nulle, la fonction $f(x)$ est absolument continue dans (a, b), et même à nombres dérivés inférieurs à $2M$.*

En effet, soient x_1 et x_2 deux points quelconques de (a, b); considérons l'intervalle

$$\delta = (x_1, x_2).$$

---

[22]) Comme $f(x)$ est absolument continue, si l'on avait $\text{mes}\, f(e') = 0$, on aurait $f'(x) = 0$ presque partout sur e' (*voir*, par exemple, Ch. de la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse Infinitésimale* 1, 3^e édition, p. 281).

Désignons par E_δ la partie de E contenue dans δ et par CE_δ la partie de CE contenue dans δ. On voit de suite que

$$f(\delta) = f(E_\delta) + f(CE_\delta).$$

Or, d'après le lemme du n° 1, on a

$$\text{mes}\, f(E_\delta) \leqq 2M \,\text{mes}\, E_\delta \leqq 2M\delta,$$

et puisque $f(CE)$ est de mesure nulle par hypothèse

$$\text{mes}\, f(CE_\delta) = 0.$$

Donc, on a $\text{mes}\, f(\delta) \leqq 2M\delta = 2M(x_2 - x_1)$. En particulier, puisque $\text{mes}\, f(\delta)$ est égale à l'oscillation de $f(x)$ sur δ, on a

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq 2M|x_2 - x_1|$$

donc $f(x)$ est à nombres dérivés inférieures à $2M$; c. q. f. d.

II. Propriétés caractéristiques d'une superposition de fonctions absolument continues.

5. Le théorème fondamental sur les superpositions. — Nous passons maintenant au but principal de ce chapitre: l'étude des superpositions de fonctions absolument continues. L'importance de l'étude de ces superpositions tient à ce qu'elles sont, comme nous verrons dans la suite, les éléments dont on peut composer une fonction continue arbitraire.

Les propositions établies au Chapitre I nous permettront maintenant de démontrer un théorème[23]) qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit une superposition de deux fonctions absolument continues.

Théorème. — *Si $F(x)$ est une fonction continue et E l'ensemble des points où sa dérivée $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie, pour que $F(x)$ soit une superposition de deux fonctions absolument continues il faut et il suffit que l'image $F(E)$ soit un ensemble de mesure nulle.*

La démonstration est composée de deux parties

1° *La condition est nécessaire.* — La fonction $F(x)$ étant une superposition de deux fonctions absolument continues, on a

$$F(x) = f[\varphi(x)]$$

où $f(u)$ et $\varphi(x)$ sont absolument continues.

---

[23]) Ce théorème, certaines de ses conséquences et quelques-uns des lemmes précédents ont été démontrés par M. Menchoff et moi dans un Mémoire *Sur l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes et les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues* [*Annali di Matematica pura ed applicata* (4), 5 (1927/28)]. Je me permets de reproduire ici les démonstrations parce que nous en ferons usage dans la suite.

Le même théorème a été obtenu indépendamment par Zaretsky, sa démonstration n'a pas été publiée.

Soit e l'ensemble de tous les points x tels que $\varphi'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie. En vertu de la continuité absolue de $\varphi(x)$, on a

$$\text{mes}\, e = 0.$$

Puisque chaque fonction absolument continue jouit de la propriété N (n° 2), on voit bien que l'image $e' = \varphi(e)$ est aussi de mesure nulle

$$\text{mes}\, e' = 0.$$

Soit maintenant H' l'ensemble des points u en lesquels $f'(u)$ n'existe pas ou n'est pas finie et H l'ensemble de tous les points x, pour lesquels $u = \varphi(x)$ appartient à H'.

En désignant par E l'ensemble des points x où $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie, on démontre sans peine que E est contenu dans la somme $H + e$.

En effet, soit x_0 un point qui n'appartient ni a H, ni à e et soit $u_0 = \varphi(x_0)$. Puisque x_0 n'appartient pas à e, $\varphi'(x_0)$ est déterminée et finie. Comme x_0 n'appartient pas à H, u_0 n'appartient pas à H', donc $f'(u_0)$ est déterminée et finie. Il en résulte d'après la règle de dérivation d'une fonction de fonction que la dérivée $F'(x_0)$ est déterminée et finie puisqu'elle est égale à

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Donc x_0 n'appartient pas à E.

Il en résulte que si $E = F(\mathsf{E})$, E est contenu dans l'ensemble $F(H + e)$ ou, ce qui est le même, dans l'ensemble $f(H' + e')$. Or, on a mes $H' = 0$, puisque $f(u)$ est absolument continue et H' l'ensemble des points ou sa dérivée n'existe pas ou n'est pas finie. De même nous savons que mes $e' = 0$. Donc mes $(H' + e') = 0$, et comme $f(u)$ est absolument continue, on a mes $f(H' + e') = 0$. Il en résulte

$$\text{mes}\, E = \text{mes}\, F(\mathsf{E}) = 0,$$

c. q. f. d.

2°. *La condition est suffisante.* — Supposons que la fonction $F(x)$ est définie dans un intervalle (a, b) et que m et M sont respectivement le minimum et le maximum de $F(x)$ dans (a, b). Si $F(x)$ est constante, le théorème à démontrer devient trivial. Supposons donc qu'il n'en est pas ainsi et, par conséquent, $m < M$.

Soit E l'ensemble de tous les points x où la dérivée $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie et E l'image de E

$$E = F(\mathsf{E}).$$

On a par hypothèse

$$\text{mes}\, E = 0.$$

Désignons par e l'ensemble des points x pour lesquels $F'(x) = 0$. En vertu du second théorème du n° 1 son image $e' = F(e)$ est de mesure nulle

$$\text{mes}\, e' = 0.$$

Désignons par E' la somme des ensembles E et e'. On voit bien que

$$\text{mes}\, E' = 0.$$

Soit y_0 un point du segment $[m, M]$ n'appartenant pas à E'. La droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = F(x)$ en un nombre *fini* de points. En effet, s'il n'en était pas ainsi, donc s'il y avait une infinité de points x pour lesquels $F(x) = y_0$ ils admettraient, d'après le principe de Bolzano-Weierstrass, au moins un point limite x_0. En ce point x_0 la dérivée $F'(x_0)$ serait indéterminée ou nulle. Donc, x_0 appartiendrait à E ou bien à e, et par conséquent y_0 appartiendrait à E ou bien à e', ce qui est impossible puisque nous avons supposé que y_0 n'appartient pas à E'.

Donc, si y_0 appartient au complémentaire CE' de E', il n'existe qu'un nombre fini de points x, tels que $F(x) = y_0$, et d'ailleurs en chacun de ces points $F'(x)$ est déterminée, finie et diffère de zéro.

Cela posé, prenons un point quelconque y_0 de CE' et désignons par $M(y_0)$ le maximum de la valeur absolue de $F'(x)$ pour tous les points x, tels que $F(x) = y_0$:

$$M(y_0) = \max |F'(x)|$$

pour tous les x tels que $F(x) = y_0$.

Le nombre $M(y_0)$ est fini et essentiellement positif. En faisant y parcourir l'ensemble CE', on obtient ainsi une fonction $M(y)$ définie presque partout dans $[m, M]$, puisque $\text{mes}\, E' = 0$. Cette fonction $M(y)$ est finie et essentiellement positive partout où elle existe, donc presque partout dans $[m, M]$; il est aisé a démontrer qu'elle est mesurable.

Posons

$$\psi(y) = \frac{1}{M(y)} \quad \text{si} \quad M(y) \geqq 1,$$

$$\psi(y) = 1 \qquad \text{si} \quad M(y) < 1.$$

La fonction $\psi(y)$ est ainsi définie presque partout dans (m, M), elle est mesurable, finie et essentiellement positive partout où elle existe, puisqu'il en est ainsi pour $M(y)$; d'ailleurs elle est bornée, car il suit de sa définition même qu'on a

$$0 < \psi(y) \leqq 1 \qquad [m \leqq y \leqq M].$$

Donc, cette fonction est sommable dans $[m, M]$. Posons

$$u = g(y) = \int_m^y \psi(y)\, dy,$$

et

$$\varphi(x) = g[F(x)].$$

Nous allons démontrer que $\varphi(x)$ est absolument continue.

Soit H' l'ensemble de tous les points y tels que la dérivée $g'(y)$ n'existe pas, n'est pas finie ou ne vérifie pas l'égalité

$$g'(y) = \psi(y).$$

On a évidemment

$$\operatorname{mes} H' = 0.$$

Soit H l'ensemble de tous les points x tels que $\varphi(x)$ appartient à H'.

Considérons un point x_0 qui n'appartient ni à H, ni à E. Nous allons démontrer que la dérivée $\varphi'(x_0)$ existe et est inférieure ou égale à 1 en valeur absolue.

En effet, comme x_0 n'appartient pas à E, la dérivée $F'(x_0)$ existe. En posant $y_0 = F(x_0)$, comme x_0 n'appartient pas à H, y_0 n'appartient pas à H', donc on voit que $g'(y_0)$ existe et

$$g'(y_0) = \psi(y_0).$$

On a donc

$$\varphi'(x_0) = \psi(y_0) F'(x_0) = \begin{cases} \dfrac{F'(x_0)}{M(y_0)} & \text{quand } M(y_0) \geqq 1, \\ F'(x_0) & \text{quand } M(y_0) \leqq 1. \end{cases}$$

Mais $M(y_0)$ est le maximum des valeurs de $|F'(x)|$ pour tous les points x tels que $F(x) = y_0$. Donc, pour le point x_0 on a

$$|F'(x_0)| \leqq M(y_0);$$

donc, dans les deux cas $[M(y_0) \geqq 1$ et $M(y_0) < 1]$ on a

$$|\varphi'(x_0)| \leqq 1.$$

Ainsi nous avons démontré que pour chaque point x_0 n'appartenant ni à H, ni à E, on a $|\varphi'(x_0)| \leqq 1$.

D'autre part, l'image $\varphi(H + \mathsf{E})$ est un ensemble de mesure nulle. En effet, on a

$$\operatorname{mes} \varphi(H) = \operatorname{mes} H' = 0$$

et

$$\operatorname{mes} \varphi(\mathsf{E}) = \operatorname{mes} g[F(\mathsf{E})] = \operatorname{mes} g(E) = 0,$$

puisque $\operatorname{mes} E = 0$ d'après les conditions du théorème et $g(y)$ est une intégrale indéfinie, donc une fonction absolument continue. Ainsi, nous avons

$$\operatorname{mes} \varphi(H + \mathsf{E}) = 0.$$

En vertu du lemme du n° 4, $\varphi(x)$ est une fonction absolument continue, et même à nombres dérivés inférieurs ou égaux à 2.

Remarquons maintenant qu'on a, par définition même,

$$\varphi(x) = g[F(x)].$$

Or, $g(y)$ est une fonction absolument continue et croissante puisque $g'(y) = \psi(y)$ presque partout et $\psi(y)$ est essentiellement positive partout où elle existe. Donc, en vertu du théorème du n° 4, la fonction inverse de $u = g(y)$ que nous désignerons par $f(u)$ est *absolument continue* et croissante.

On a ainsi

$$F(x) = f[\varphi(x)],$$

donc $F(x)$ est une superposition de deux fonctions absolument continues, c. q. f. d.

Remarque. Il suit de la démonstration du théorème précédent que *toute fonction $F(x)$ qui est la superposition de deux fonctions absolument continues peut être présentée dans la forme*

$$F(x) = f[\varphi(x)]$$

où f et φ sont absolument continues et d'ailleurs f est croissante et φ à nombres dérivés bornés.

Faisons encore une remarque qui nous sera très utile dans la suite. Dans la démonstration précédente $f(u)$ était la fonction inverse d'une fonction $g(y)$ *à nombres dérivés bornés.*

Donc, nous avons obtenu le théorème suivant.

Théorème. *Si $F(x)$ est une fonction continue,* E *l'ensemble des points pour lesquels $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie et si* mes $F(\mathsf{E}) = 0$, *il existe une fonction continue $g(y)$ croissante et à nombres dérivés bornés, telle que la fonction composée*

$$\varphi(x) = g[F(x)]$$

est une fonction absolument continue et même à nombres dérivés bornés.

6. Autres propriétés caractéristiques des superpositions de fonctions absolument continues. — On peut indiquer encore deux propriétés caractéristiques de ces fonctions.

A cet effet, nous allons considérer une notion introduite par M. Banach[24]), c'est celle de *fonction continue jouissant de la propriété* (S).

Définition. Nous dirons, avec M. Banach, qu'une fonction continue $F(x)$ *jouit de la propriété* (S) dans un intervalle (a, b) lorsqu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ tel que l'inégalité $\text{mes}_e \mathsf{E} < \eta$ entraîne $\text{mes}_e F(\mathsf{E}) < \varepsilon$, quel que soit l'ensemble E situé dans (a, b).

---

[24]) S. Banach, *Sur une classe de fonctions continues*, *Fund. Math.* 8 (1926), p. 166 à 172.

Les fonctions jouissant de la propriété (S) représentent une généralisation aussi naturelle que possible des fonctions absolument continues. Il est donc intéréssant de chercher à les exprimer au moyen des fonctions absolument continues.

Remarquons d'abord que la condition (S) est, d'après un théorème de M. Banach[25]), équivalente à l'ensemble des conditions N et T_1[26]). Cela veut dire que chaque fonction continue jouissant de la propriété S jouit des deux propriétés N et T_1 simultanément et *vice versa*.

Nous allons démontrer maintenant que chaque fonction continue jouissant des propriétés N et T_1 est une fonction absolument continue d'une fonction absolument continue, et réciproquement.

J'ai démontré ce théorème[27]) en prouvant que si $F(x)$ jouit des propriétés N et T_1, elle possède la propriété caractéristique des superpositions donnée par le théorème fondamental (n° 5), et *vice versa*. C'est cette démonstration que je vais donner ici.

MM. Banach et Saks[28]) ont démontré indépendamment et directement le théorème en question.

Il s'agit donc de démontrer le théorème: *pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit une fonction absolument continue d'une fonction absolument continue, il faut et il suffit qu'elle jouisse des propriétés N et T_1*.

La démonstration se compose naturellement de deux parties.

1° *La condition est nécessaire.* — Soit $F(x)$ une superposition de fonctions absolument continues. D'après le théorème fondamental sur les superpositions l'image $E = F(\mathsf{E})$ de l'ensemble E des points où $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie est de mesure nulle.

Soit e un ensemble de mesure nulle situé sur l'axe OX. On peut décomposer e en deux ensembles e' et e'' dont le premier appartient à E et le second à son complémentaire $C\mathsf{E}$.

Il est evident que $F(e')$ est contenu dans $F(\mathsf{E}) = E$, donc, puisque $\operatorname{mes} E = 0$ par hypothèse, on a $\operatorname{mes} F(e') = 0$.

D'autre part, puisque e'' n'appartient pas à E, la dérivée $F'(x)$ est bien déterminée sur e'', donc en vertu du théorème 1 du n° 1, $\operatorname{mes} F(e'') = 0$.

Il en résulte que $\operatorname{mes} F(e) = 0$, et l'ensemble e étant un ensemble quelconque de mesure nulle, cela prouve que $F(x)$ jouit de la propriété N.

---

[25]) loc. cit.

[26]) pour la définition de la condition T_1 voir le n° 2.

[27]) Voir ma Note *Sur la représentation analytique d'une classe de fonctions continues*, C. R. **183** (1926), p. 469.

[28]) *Sur les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues, Fundamenta Mathematicae* **11** (1928), p. 113—116.

Il reste à démontrer que $F(x)$ jouit de la propriété T_1. A cet effet, remarquons que si y_0 est une valeur que $F(x)$ prend une infinité de fois, l'ensemble des points x tels que $F(x) = y_0$ a nécessairement un point limite x_0, et en ce point $F'(x_0)$ n'existe pas ou bien est égale à zéro. Or, l'ensemble E des points où $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie a, par hypothèse, une image $F(\mathsf{E})$ de mesure nulle. L'ensemble e des points où $F'(x) = 0$ a une image $F(e)$ de mesure nulle en vertu du théorème 2 du n° 1. Donc, l'ensemble des points y_0 pour lesquels la droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = F(x)$ en une infinité de points est de mesure nulle. Donc, $F(x)$ jouit de la propriété T_1.

2° *La condition est suffisante.* — Supposons qu'une fonction continue $F(x)$ jouisse des propriétés N et T_1. Soit H l'ensemble de tous les points y_0 tels que la droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = F(x)$ en une infinité de points. On a par hypothèse mes $H = 0$.

Soit Q l'ensemble de tous les points x tels que les valeurs de $F(x)$ en ces points n'appartiennent pas à H. Soit enfin D l'ensemble de tous les points où $F(x)$ atteint son maximum ou son minimum propre; d'après un théorème de M. Denjoy, D est au plus dénombrable. D'après la définition même de Q et de D on voit qu'en chaque point de Q qui n'appartient pas à D tous les quatre nombres dérivés de $F(x)$ ont le même signe. Il en résulte d'après un théorème de M. Saks[29]) que la dérivée $F'(x)$ est bien déterminée et finie presque partout sur $Q - D$, donc presque partout sur Q. Les points où $F'(x)$ est indéterminée ou infinie ne se trouvent donc qu'en dehors de Q ou sur en ensemble e de mesure nulle situé dans Q.

Puisque $F(x)$ jouit de la propriété N, l'image $F(e)$ est de mesure nulle. Les valeurs de $F(x)$ aux points extérieurs à Q appartiennent à l'ensemble H qui est de mesure nulle. Il en résulte que l'ensemble E des points où $F'(x)$ est indéterminée ou infinie a pour image un ensemble de mesure nulle. Donc, en vertu du théorème fondamental sur les superpositions, $F(x)$ est une superposition de fonctions absolument continues, c. q. f. d.

Nous avons déjà dit que, d'après un théorème de M. Banach, l'ensemble des conditions N et T_1 est équivalent à la condition S. Il en résulte, en tenant compte du théorème que nous venons de démontrer, que

pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit une superposition de deux fonctions absolument continues il faut et il suffit qu'elle jouisse de la propriété S.

---

[29]) S. Saks, *Fund. Math.* **5** (1924), p. 98—104.

III. Conséquences du théorème fondamental sur les superpositions.

7. Critère suffisant pour la superposition de deux fonctions absolument continues. — Le théorème fondamental sur les superpositions de fonctions absolument continues nous donne des renseignements précis sur l'étendue de la famille de ces fonctions. Quelques fois, cependant, pour démontrer qu'une fonction appartient à cette famille, il suffit de tenir compte d'une conséquence immédiate de ce théorème, à savoir:

Théorème. — *Si $F(x)$ est une fonction continue jouissant de la propriété N et ayant une dérivée déterminée et finie presque partout, $F(x)$ est une superposition de deux fonctions absolument continues.*

Pour démontrer ce théorème il suffit de remarquer que l'ensemble E des points où $F(x)$ est indéterminée ou infinie étant, par hypothèse, de mesure nulle, son image $F(\mathsf{E})$ est aussi de mesure nulle quisque $F(x)$ jouit de la propriété N. Il résulte donc du théorème fondamental sur les superpositions que $F(x)$ est une superposition de deux fonctions absolument continues, c. q. f. d.

On déduit immédiatement de ce théorème que

toute intégrale indéfinie au sens de M. Denjoy est une superposition de deux fonctions absolument continues.

En effet, on sait que l'intégrale indéfinie de M. Denjoy a une dérivée déterminée et finie presque partout. D'ailleurs M. Lusin a démontré[30]) que cette intégrale jouit de la propriété N; donc notre énoncé est une conséquence immédiate du théorème précédent, c. q. f. d.

Il importe de remarquer qu'il s'agit ici de l'intégrale de M. Denjoy au sens strict[31]), c'est-à-dire de la définition de l'intégrale que M. Denjoy a donné premièrement. Cette définition a été généralisée ensuite par M. Denjoy lui-même[32]) et par M. Khintchine[33]). L'intégrale indéfinie au sens de MM. Denjoy-Khintchine ne possède pas nécessairement une dérivée presque partout (elle ne possède qu'une dérivée asymptotique). Donc, le théorème précédent ne s'applique pas à cette intégrale. D'ailleurs, nous verrons dans la suite qu'il existe effectivement des intégrales indéfinies au sens de MM. Denjoy-Khintchine qui ne peuvent pas être des superpositions de fonctions absolument continues (n° 10).

---

[30]) N. Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique* (Thèse, Moscou 1915, p. 116 et 118).

[31]) A. Denjoy, *Comptes Rendus* **154**, p. 850 et 1075.

[32]) A. Denjoy, *Annales de l'École Normale supérieure* **33** p. 127 et **34** p. 181.

[33]) A. Khintchine, *Comptes Rendus* **162**, p. 287.

8. La dérivée d'une superposition de fonctions absolument continues. — Nous avons vu au n° précédent que si une fonction continue possède une dérivée presque partout et jouit de la propriété N, elle est une superposition de deux fonctions absolument continues.

Il est bien évident qu'une fonction continue $f(x)$ peut avoir une dérivée presque partout et ne pas être une fonction absolument continue de fonction absolument continue. Il suffit pour le voir de prendre une fonction non décroissante dont la dérivée est nulle presque partout[34]). Cette fonction ne jouit évidemment pas de la propriété N. En effet, si E est l'ensemble des points ou la fonction $f(x)$ a une dérivée nulle, l'image $f(\mathsf{E})$ est de mesure nulle (n° 1). Et comme l'image de l'intervalle total où $f(x)$ est définie est de mesure positive, il en est de même pour l'image du complémentaire de E. Or ce complémentaire est de mesure nulle par hypothèse, donc $f(x)$ ne jouit pas de la propriété N, donc n'est pas une superposition de fonctions absolument continues.

La fonction considérée donne un exemple extrêmement simple d'une fonction continue qui jouit de la propriété T_1 sans jouir de la propriété N.

Nous voyons ainsi qu'une fonction continue peut avoir une dérivée presque partout sans être une superposition de fonctions absolument continues.

D'autre part, une superposition de deux fonctions absolument continues n'a pas nécessairement une dérivée presque partout. On ne peut affirmer que le résultat suivant.

Théorème. — *Toute fonction continue $F(x)$ qui est une superposition de deux fonctions absolument continues possède nécessairement une dérivée déterminée et finie quasi-partout.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème de M. Banach (n° 2): toute fonction continue jouissant de la propriété N a une dérivée déterminée et finie quasi-partout.

Dans le cas particulier où il s'agit d'une superposition de deux fonctions absolument continues, la démonstration du théorème devient extrêmement simple, c'est pourquoi nous nous permettons de l'indiquer ici.

Soit donc $F(x)$ une fonction qui est une superposition de deux fonctions absolument continues dans un segment $[a, b]$. Désignons par E l'ensemble des points où $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie. Il s'agit de démontrer que le complementaire $C\mathsf{E}$ de E est de mesure positive dans chaque intervalle δ contenu dans $[a, b]$.

---

[34]) Par exemple la fonction bien connue de M. Cantor, constante dans chaque intervalle contigu à un ensemble parfait de mesure nulle.

Soit E_δ la partie de E contenue dans δ. La fonction $F(x)$ étant une superposition de fonctions absolument continues, on a mes $F(E)=0$, donc, *a fortiori*, mes $F(E_\delta)=0$.

Si $F(x)$ est constante sur δ, sa dérivée $F'(x)$ existe en chaque point de δ. Donc, en désignant par CE_δ la partie de CE contenue dans δ, on voit bien que dans ce cas mes $CE_\delta>0$.

Supposons donc que $F(x)$ n'est pas constante dans δ. Comme mes $F(E_\delta)=0$, il en résulte que mes $F(CE_\delta)>0$, et ceci n'est possible que si mes $CE_\delta>0$, puisque $F(x)$ jouit de la propriété N.

Donc, mes $CE_\delta>0$, et δ étant un intervalle quelconque contenu dans (a, b), on voit bien que $F(x)$ a une dérivée déterminée et finie sur un ensemble de mesure positive dans chaque intervalle δ contenu dans $[a, b]$, donc quasi-partout sur (a, b), c. q. f. d.

Il importe à remarquer que dans ce théorème le mot *quasi-partout* ne peut pas être remplacé par *presque partout.*

En effet, nous allons démontrer qu'*il existe des superpositions de fonctions absolument continues qui n'ont pas de dérivée sur un ensemble de mesure positive.*

Plus précisément, *P étant un ensemble parfait non dense et d'ailleurs quelconque, il existe nécessairement une fonction $f(x)$ qui est une superposition de deux fonctions absolument continues et qui est privée de dérivée en chaque point de P.*

Pour le voir, prenons dans un segment $[a, b]$ un ensemble parfait non dense P et désignons par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ les intervalles contigus à P. Désignons par r_k la longueur du plus grand segment qui reste dans $[a, b]$ quand on a enlevé les k premiers intervalles $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k$. L'ensemble P étant non dense, il en résulte que r_k tend vers zéro quand k croît indéfiniment. Posons $h_n=\delta_n+r_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, où, pour abréger, nous désignons la longueur de l'intervalle δ_n par la même lettre δ_n.

Nous voulons démontrer que si $f(x)$ est une fonction continue égale à 0 sur P, ayant dans chaque δ_n son maximum absolu au centre c_n de δ_n et d'ailleurs $f(c_n)=h_n$, la fonction $f(x)$ est privée de dérivée en chaque point de P.

En effet, si x_0 est un point de P, on a $f(x_0)=0$. Si x appartient à P, on a $f(x)=0$, donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$$

quand x appartient à P.

D'autre part, quel que soit k, x_0 appartient toujours à l'un des segments qui restent dans $[a, b]$ quand on a enlevé les k premiers intervalles $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k$. Soit ϱ ce segment; on a, d'après la définition de r_k, l'inégalité $\varrho \leqq r_k$.

Il est évident qu'il existe une infinité de valeurs de k telles que, les k premiers intervalles étant enlevés, x_0 appartient à un segment ϱ ayant une extrémité commune avec δ_k, c'est-à-dire avec le dernier des intervalles enlevés. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il y aurait un segment ϱ contenant x_0 et un nombre K tel que si $k > K$, l'intervalle δ_k n'est pas contenu dans ϱ. Or ceci est impossible puisque P est non dense.

Donc, le point x_0 de P étant donné, il existe toujours une suite infinie d'entiers positifs $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ tels que, les k_n intervalles $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \ldots \delta_{k_n}$ étant enlevés, x_0 appartient à un segment $\varrho^{(n)}$ qui a une extrémité commune avec δ_{k_n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. La longueur de ce $\varrho^{(n)}$ est, d'après la définition des nombres r_n, inférieure où égale à r_{k_n}; on a donc $\varrho^{(n)} \leqq r_{k_n}$.

Désignons par x_n le centre de l'intervalle δ_{k_n}. Il est bien évident que les points x_n forment une suite qui converge vers x_0 quand n croît indéfiniment. En effet la différence $|x_n - x_0|$ ne surpasse pas $\frac{1}{2}\delta_{k_n} + r_{k_n}$.

D'autre part, d'après la construction même de $f(x)$, on a $f(x_n) = \delta_{k_n} + r_{k_n}$.

Il en résulte

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right| \geqq \frac{\delta_{k_n} + r_{k_n}}{\frac{1}{2}\delta_{k_n} + r_{k_n}} > 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et l'on voit ainsi que

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left|\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right| \geqq 1.$$

En comparant cette inégalité à l'égalité

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

pour x appartenant à P, on voit bien que la dérivée $f'(x_0)$ n'existe pas. Et comme x_0 est un point quelconque de P, on voit bien que $f(x)$ est privée de dérivée en chaque point de P.

Remarquons maintenant que nous n'avons encore fait aucune hypothèse sur allure de $f(x)$ dans les contigus à P: nous avons seulement supposé qu'elle y est continue, admet son maximum dans le centre de chaque contigu (on considère ici le maximum absolu de $f(x)$ par rapport à cet intervalle contigu) et que sa valeur au centre de δ_n est égale à h_n.

Si nous supposons maintenant que $f(x)$ est interpolée linéairement entre l'extrémité gauche et le centre c_n et entre le centre c_n et l'extrémité droite de δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, on voit bien que $f(x)$ est continue et a une dérivée déterminée et finie en chaque point de δ_n, excepté le centre c_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Donc $f(x)$ n'a pas de dérivée sur P et en un ensemble dénombrable de points en dehors de P. Dans tous les autres points elle a une dérivée déterminée et finie.

Or, l'image de P ne contient qu'un point seulement puisque $f(x)$ a sur P la valeur constante 0; l'image d'un ensemble dénombrable est toujours dénombrable. Donc, l'image de l'ensemble des points où $f'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie est de mesure nulle. Il en résulte que $f(x)$ est une superposition de fonctions absolument continues, c. q. f. d.

En modifiant légèrement la construction de la fonction $f(x)$ et en considérant une série uniformément convergente de fonctions de cette nature *on peut obtenir une superposition de deux fonctions absolument continues qui est privée de dérivée quasi-partout*. Nous trouverons dans le n° 14 l'exemple d'une telle fonction.

9. Les superpositions triples et multiples. — Nous avons vu au n° précédent que, P étant un ensemble parfait non dense et d'ailleurs quelconque, il existe toujours une superposition de deux fonctions absolument continues qui est privée de dérivée en chaque point de P.

En particulier, si nous considérons les fonctions continues définies dans le segment $[0, 1]$, on peut supposer P de mesure supérieure à $1-\varepsilon$ quel que soit ε fixé d'avance et démontrer ainsi qu'une fonction $f(x)$ qui est la superposition de deux fonctions absolument continues peut être privée de dérivée sur un ensemble dont la mesure est aussi proche que l'on veut de 1.

On voit ainsi que la classe des superpositions de deux fonctions absolument continues est beaucoup plus vaste que celle des fonctions absolument continues elles-mêmes, ces dernières étant toujours presque partout dérivables.

Il est naturel de poser la question s'il est possible d'obtenir une classe encore plus étendue en considérant les fonctions absolument continues des fonctions de la classe considérée, c'est-à-dire en étudiant *les superpositions triples* de fonctions absolument continues.

La réponse est négative en vertu du théorème suivant:

Théorème. — *Chaque superposition triple de fonctions absolument continues se réduit à une superposition double de fonctions absolument continues, ou, en d'autres mots, toute fonction de la forme*

$$F(x)=\psi\{f[\varphi(x)]\}$$

où les fonctions ψ, f et φ sont absolument continues peut être représentée dans la forme

$$F(x)=\mathsf{F}[\Phi(x)],$$

les deux fonctions F et Φ étant encore absolument continues.

En effet, posons

$$y=F_1(x)=f[\varphi(x)].$$

Soit E_1 l'ensemble des points x où la dérivée $F_1'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie, E_1 l'image de E_1, donc $E_1 = F_1(\mathsf{E}_1)$. En vertu du théorème fondamental on a

$$\text{mes}\, E_1 = 0.$$

Soit e' l'ensemble de tous les points y tels que $\psi'(y)$ n'existe pas ou n'est pas finie. On a nécessairement en vertu de la continuité absolue de $\psi(y)$

$$\text{mes}\, e' = 0.$$

Soit enfin e l'ensemble de tous les points x pour lesquels $F_1(x)$ appartient à e'.

Pour tout point x_0 n'appartenant ni à e, ni à E_1, la dérivée $F'(x)$ est déterminée et finie, puisqu'on a

$$F'(x_0) = \psi'(y_0)\, F_1'(x_0),$$

où l'on pose $y_0 = F_1(x_0)$.

Donc, l'ensemble E des points où la dérivée $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie appartient à la somme $e + \mathsf{E}_1$.

En désignant par E l'image de E faite au moyen de la fonction $F(x)$, $E = F(\mathsf{E})$, et par E' l'image de E faite au moyen de la fonction $F_1(x)$, $\mathsf{E}' = F_1(\mathsf{E})$, on a évidemment l'égalité

$$E = F(\mathsf{E}) = \psi[F_1(\mathsf{E})] = \psi(\mathsf{E}')$$

puisque $F(x) = \psi[F_1(x)]$.

Or, E étant contenu dans $e + \mathsf{E}_1$, on voit que $F_1(\mathsf{E})$ est contenu dans $E_1 + e'$ et les ensembles E_1 et e' étant de mesure nulle,

$$\text{mes}\, \mathsf{E}' = \text{mes}\, F_1(\mathsf{E}) = 0.$$

Or $\psi(y)$ est absolument continue, elle jouit donc de la propriété N. Il en résulte que

$$\text{mes}\, E = \text{mes}\, \psi(\mathsf{E}') = 0$$

et ceci prouve que $F(x)$ est une superposition de deux fonctions absolument continues, c. q. f. d.

Remarque. — On pourrait démontrer ce théorème en tenant compte de la remarque faite à la fin du n° 5: la fonction $F_1(x)$ peut être représentée dans la forme

$$F_1(x) = f_1[\Phi(x)]$$

où f_1 est une fonction absolument continue et d'ailleurs croissante, $\Phi(x)$ absolument continue (et même à nombres dérivés bornés).

On a alors

$$F(x) = \psi[F_1(x)] = \psi\{f_1[\Phi(x)]\} = \mathsf{F}[\Phi(x)]$$

en posant $\mathsf{F} = \psi[f_1]$. La fonction F est une fonction absolument continue d'une fonction absolument continue et *croissante*; elle est donc évidemment absolument continue, c. q. f. d.

Ce théorème prouve qu'il est inutile d'étudier les superpositions triples, et *a fortiori* multiples de fonctions absolument continues: tout ce réduit aux superpositions de *deux* fonctions absolument continues.

IV. Effet de l'addition à une superposition d'une fonction absolument continue.

10. Addition de la variable indépendante. — Il est temps de se demander, si la classe des superpositions de fonctions absolument continues est additive, c'est-à-dire si la somme de deux fonctions de cette nature appartient à la même classe. Il est très aisé de voir qu'il n'en est pas ainsi, même si l'on suppose que l'un des termes de la somme est absolument continu. On peut même donner un *exemple d'une fonction qui est la superposition de deux fonctions absolument continues et qui ne conserve plus cette propriété quand on lui ajoute la variable indépendante x.*

A cet effet, reprenons la fonction $f(x)$ que nous avons construite dans le n° 8. Nous pouvons supposer que l'ensemble parfait P, dont il était question dans ce n°, est de mesure *positive*.

Nous considérons donc une fonction $f(x)$ continue, égale à 0 sur un ensemble parfait P de mesure positive, qui est une superposition de fonctions absolument continues et qui est privée de dérivée en chaque point de P, tandis que dans chaque contigu à P elle a une dérivée déterminée et finie sauf au centre de ce contigu.

Considérons la fonction

$$\mathsf{F}(x) = f(x) + x.$$

Cette fonction est évidemment continue, elle est privée de dérivée en chaque point de P. L'ensemble de ces valeurs sur P est identique à P, puisque $f(x) = 0$ sur P et les valeurs de x sur P forment un ensemble identique à P.

Donc, P étant de mesure positive, on a

$$\text{mes}\, \mathsf{F}(P) > 0,$$

ce qui démontre que $\mathsf{F}(x)$ n'est pas une superposition de deux fonctions absolument continues. En effet, dans ce cas elle devrait avoir cette propriété que l'image de l'ensemble où sa dérivée n'existe pas est de mesure nulle.

Remarquons que la fonction $\mathsf{F}(x)$ jouit de la propriété N. En effet, elle est égale à x sur P et dans chaque contigu (a_n, b_n) de P elle est linéaire de a_n à c_n et de c_n à b_n, c_n désignant le centre de ce contigu.

Il en résulte que $\mathsf{F}(x)$ ne jouit pas de la propriété (T_1) de M. Banach. On pourrait le démontrer directement, mais il suffit de remarquer, que si $\mathsf{F}(x)$ était une fonction jouissant de la propriété (T_1), comme elle jouit de la propriété N, elle serait une superposition de fonctions absolument continues (n° 6), et nous avons vu que ce n'est pas le cas. Ainsi nous voyons qu'*il existe des fonctions jouissant de la propriété N qui ne jouissent pas de la propriété (T_1)*.

La même fonction $\mathsf{F}(x)$ peut être considérée comme exemple d'*une fonction qui est une intégrale indéfinie au sens de MM. Denjoy-Khintchine et qui n'est pas une superposition de fonctions absolument continues.*

En effet, $\mathsf{F}(x) = x$ sur P et elle est absolument continue dans chaque contigu à P. D'ailleurs la série des différences

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\mathsf{F}(b_n) - \mathsf{F}(a_n)],$$

où (a_n, b_n) est un intervalle contigu à P, est convergente, puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\mathsf{F}(b_n) - \mathsf{F}(a_n)] = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n).$$

Il en résulte que $\mathsf{F}(x)$ est une intégrale indéfinie au sens de MM. Denjoy-Khintchine.

11. Propriété nécessaire des fonctions de la forme $f[\varphi(x)] + \psi(x)$. — Nous avons vu dans le n° 10 que les fonctions de la forme

$$f[\varphi(x)] + \psi(x)$$

f, φ et ψ étant absolument continues forment une classe qui déborde celle des superpositions de fonctions absolument continues. En effet, nous avons vu qu'il y a des cas où même la somme d'une superposition de fonctions absolument continues et de la variable indépendante x n'est plus une superposition de fonctions absolument continues.

Il est naturel de se demander quelles sont les fonctions représentables dans la forme $f[\varphi(x)] + \psi(x)$, f, φ et ψ étant absolument continues.

Nous ne savons pas quelle est la condition nécessaire et suffisante pour cette classe de fonctions, mais il est aisé d'indiquer une propriété nécessaire qui permettra de voir que cette classe n'est pas très étendue.

Il suffit à cet effet de remarquer que *chaque fonction de la forme $f[\varphi(x)] + \psi(x)$, f, φ et ψ étant absolument continues, possède une dérivée quasi-partout.*

En effet, on sait (n° 8) que chaque superposition de fonctions absolument continues possède une dérivée quasi-partout. D'autre part, chaque fonction absolument continue possède une dérivée presque partout. Donc, leur somme possède nécessairement une dérivée quasi-partout, c. q. f. d.

Il importe de remarquer que *cette propriété nécessaire n'est pas suffisante*, ou, ce qui est le même, qu'il existe des fonctions qui sont dérivables quasi-partout et ne peuvent pas être représentées dans cette forme. Il y a plus: *une fonction continue peut avoir une dérivée presque partout et ne pas admettre de représentation de la forme* $f[\varphi(x)] + \psi(x)$, *où* f, φ *et* ψ *sont absolument continues.*

Pour le voir, il suffit de considérer une fonction $\mathsf{F}(x)$ qui est à variation bornée sans être absolument continue.

En effet, si l'on avait

$$\mathsf{F}(x) = \Phi(x) + \psi(x),$$

où $\Phi(x)$ est une superposition de deux fonctions absolument continues et $\psi(x)$ absolument continue, la fonction $\Phi(x)$, comme différence d'une fonction à variation bornée et d'une fonction absolument continue serait à variation bornée. Or, puisqu'elle est une superposition de fonctions absolument continues, elle jouit de la propriété N, et nous savons qu'une fonction continue qui jouit de la propriété N et qui est à variation bornée est nécessairement absolument continue (n° 2). Donc, $\Phi(x)$ est absolument continue, d'où il résulte que $\mathsf{F}(x)$ l'est aussi, ce qui contredit à l'hypothèse faite, c. q. f. d.

Ainsi, même parmi les fonctions presque partout dérivables il y en a qui ne peuvent pas être la somme d'une fonction absolument continue et d'une superposition de fonctions absolument continues.

Donc, même pour représenter les fonctions presque partout dérivables au moyen de fonctions absolument continues, il est nécessaire de prendre au moins quatre fonctions absolument continues.

Il est tout naturel d'étudier maintenant la classe des fonctions de la forme

$$f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)]$$

f_1, f_2, φ_1 et φ_2 étant absolument continues.

Chapitre II.

La somme de deux superpositions de fonctions absolument continues.

I. Une condition suffisante.

12. Lemme préliminaire. — Nous avons considéré dans le Chapitre I les fonctions continues qui sont des superpositions de fonctions absolument continues. Nous avons vu que la famille de ces fonctions n'est pas additive, c'est-à-dire, la somme de deux superpositions n'est pas, en général, une superposition. Ainsi la famille des fonctions qui sont des sommes de deux superpositions est sûrement plus vaste que celle des superpositions elles-

mêmes. Il est donc naturel de chercher les frontières de cette nouvelle famille plus étendue en posant le problème de trouver un critère nécessaire et suffisant pour les fonctions de cette famille.

Nous ne donnons pas ici la solution complète de ce problème. Néanmoins nous allons donner d'abord une condition suffisante et ensuite un critère nécessaire pour ces fonctions. L'énoncé de la condition suffisante est très simple et il est facile d'en faire usage. L'énoncé du critère nécessaire paraît plus compliqué, mais il conduit à la considération d'une classe nouvelle de fonctions continues dont on n'a pas fait l'étude jusqu'à présent.

Avant de passer à la considération de ces critères nous avons besoin d'un lemme préliminaire qui est quelquefois très utile et dont nous profiterons souvent dans ce qui suit. Il s'agit du lemme suivant:

Lemme. — *Soit*

$$P_1 < P_2 < P_3 < \ldots < P_m < \ldots$$

une suite croissante d'ensembles parfaits de mesure positive et

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x),\ \ldots$$

une suite de fonctions continues et telles que

$$f_m(x) = 0 \quad \textit{sur} \quad P_m \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$|f_m(x)| < \varepsilon_{m,k} \quad \textit{sur} \quad \delta_k^{(m)} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

où l'on désigne par $\delta_1^{(m)}, \delta_2^{(m)}, \ldots, \delta_k^{(m)}$ *les intervalles contigus à* P_m $(m = 1, 2, \ldots)$ *et où la série double des nombres positifs* $\varepsilon_{m,k}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{m,k}$$

est supposée convergente. Dans ces conditions, en posant

$$R_m(x) = a_m f_m(x) + a_{m+1} f_{m+1}(x) + \ldots + a_{m+k} f_{m+k}(x) + \ldots$$

où les a_m $(m = 1, 2, \ldots)$ *sont des constantes quelconques, pourvu que*

$$|a_m| \leqq M \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

M étant une constante absolue, on a $(m = 1, 2, \ldots)$

a) $R_m(x) = 0$ sur P_m,

b) $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \underset{\delta_s^{(m)}}{\operatorname{osc}} R_m(x) < \varepsilon_m$,[35]) $\qquad \lim\limits_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0$,

c) $R'_m(x) = 0$ presque partout sur P_m.

[35]) Nous désignerons ici et dans la suite par $\underset{\delta}{\operatorname{osc}} f(x)$ l'oscillation d'une fonction continue $f(x)$ sur un intervalle δ.

Pour le démontrer, nous allons remarquer d'abord que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

est uniformément convergente. En effet, m étant fixe, on a par hypothèse

$$|f_m(x)| < \varepsilon_{m,k} \quad \text{sur} \quad \delta_k^{(m)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et $f_m(x) = 0$ sur P_m. Il en résulte que

$$|f_m(x)| < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{m,k}$$

et comme la série double $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{m,k}$ converge, on voit bien que la série des fonctions $f_m(x)$ converge absolument et uniformément.

Or, $R_m(x)$, d'après sa définition même, est le reste de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x).$$

Cette dernière série doit également être uniformément convergente puisqu'elle ne diffère de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ que par les facteurs a_n qui sont bornés dans leur ensemble.

Ainsi, la fonction $R_m(x)$ est partout définie et continue.

La suite des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ étant croissante par hypothèse, quel que soit l'entier k positif ou nul, l'ensemble P_{m+k} contient P_m, et comme

$$f_{m+k}(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_{m+k},$$

on voit bien que

$$f_{m+k}(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_m \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

On en déduit immédiatement

$$R_m(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_m.$$

D'autre part, quel que soit un intervalle Δ, on a

$$\operatorname*{osc}_{\Delta} R_m(x) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\Delta} a_{m+k} f_{m+k}(x) \leqq 2M \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\Delta} |f_{m+k}(x)|, \text{[36]}$$

d'où il résulte

$$\sum_{s=1}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_s^{(m)}} R_m(x) \leqq 2M \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_s^{(m)}} |f_{m+k}(x)|.$$

Considérons l'oscillation d'une fonction $f_{m+k}(x)$ sur un intervalle $\delta_s^{(m)}$. Elle est nulle sur P_{m+k}, donc son oscillation sur $\delta_s^{(m)}$ ne surpasse pas la somme de ses oscillations sur les intervalles $\delta_j^{(m+k)}$, contigus à P_{m+k} qui sont contenus dans $\delta_s^{(m)}$.

---

[36]) Il est bien évident que pour chaque fonction $\varphi(x)$ et chaque intervalle δ, on a $\operatorname*{osc}_{\delta} \varphi(x) \leqq 2 \operatorname*{osc}_{\delta} |\varphi(x)|$.

Donc

$$\operatorname*{osc}_{\delta_s^{(m)}} |f_{m+k}(x)| < \sum_j{}' \varepsilon_{m+k,j}$$

la sommation étant étendue seulement aux indices j pour lesquels $\delta_j^{(m+k)}$ est contenu dans $\delta_s^{(m)}$.

En sommant toutes ses inégalités pour $s = 1, 2, \ldots$ on voit que

$$\sum_{s=1}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_s^{(m)}} |f_{m+k}(x)| < \sum_{s=1}^{\infty} \sum_j{}' \varepsilon_{m+k,j} = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_{m+k,p}$$

où la sommation est maintenant étendue à toutes les valeurs de p $(p = 1, 2, \ldots)$.

Nous obtenons finalement

$$\sum_{s=1}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_s^{(m)}} R_m(x) \leqq 2M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_{m+k,p} = 2M \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_{j,p} = \varepsilon_m$$

et cette quantité ε_m tend évidemment vers zéro quand m croît indéfiniment, puisque nous avons supposé que la série double formée des ε_{nk} converge.

Enfin, la somme des oscillations de $R_m(x)$ sur les contigus à P_m étant finie et $R_m(x) = 0$ sur P_m, on a d'après un théorème de M. Denjoy[37])

$$R_m'(x) = 0 \quad \text{presque partout sur } P_m$$

et le lemme est ainsi complètement démontré.

Remarque. — Dans la suite, en appliquant ce lemme, nous supposerons toujours que l'on a

$$\varepsilon_{m,k} = \frac{1}{2^{m+k}}$$

ce qui est possible puisque la série $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{mk}$ est convergente dans ce cas. Nous supposerons d'ailleurs que chacune des quantités a_m est égale à $+1$, ou bien à -1, ou bien nulle, donc le nombre M peut être supposé égal à 1.

Il en résulte que le nombre ε_m que nous avons défini comme

$$\varepsilon_m = 2M \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_{jp}$$

est, dans le cas simple que nous considérons, égal à

$$\varepsilon_m = 2 \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+p}} = \frac{1}{2^{m-2}}$$

donc

$$\sum_{s=1}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_s^{(m)}} R_m(x) < \frac{1}{2^{m-2}}.$$

---

[37]) Voir A. Denjoy, *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, n° 23, *Journal des Mathématiques pures et appliquées*, 1915.

13. La dérivabilité quasi-partout comme critère suffisant pour une somme de deux superpositions. — Nous avons vu dans le n° 11 qu'une fonction continue $F(x)$ qui a une dérivée quasi-partout n'est pas toujours représentable dans la forme

$$f[\varphi(x)] + \psi(x),$$

f, φ et ψ étant absolument continues. Mais nous démontrerons maintenant qu'elle est toujours la somme de deux superpositions de fonctions absolument continues. Nous avons, en effet, le

Théorème. — *Toute fonction continue $F(x)$ dont la dérivée est déterminée et finie quasi-partout peut être représentée dans la forme*

$$F(x) = f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)]$$

les f_i et φ_i étant absolument continues.

Pour le démontrer, considérons un ensemble parfait non dense P_1, mes $P_1 > 0$, sur lequel $F(x)$ a une dérivée déterminée et finie. Soient

$$\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \ldots, \delta_n^{(1)}, \ldots$$

les intervalles contigus à P_1.

Nous allons construire d'abord une fonction continue $\mathsf{F}_1(x)$, égale à $F(x)$ sur P_1, à nombres dérivés bornés dans chaque $\delta_n^{(1)}$, constante dans les intervalles $\delta_n^{(2)}$ contigus à un certain ensemble parfait non dense P_2 contenant P_1, et telle que la différence

$$h_1(x) = F(x) - \mathsf{F}_1(x)$$

soit presque partout dérivable sur P_2 et jouisse de la propriété N sur P_2, et qu'elle vérifie dans les contigus $\delta_n^{(1)}$ à P_1 les inégalités

$$|h_1(x)| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{sur } \delta_n^{(1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

A cet effet, posons d'abord

$$\mathsf{F}_1(x) = F(x) \quad \text{sur } P_1.$$

Supposons n fixe. Divisons l'intervalle $\delta_n^{(1)}$ en un nombre fini d'intervalles partiels assez petits pour que l'oscillation de $F(x)$ sur chacun de ces intervalles soit plus petite que $\frac{1}{2^{n+1}}$. La fonction $F(x)$ étant quasi partout dérivable, il existe dans chacun de ces intervalles partiels un ensemble parfait non dense de mesure positive en chaque point duquel $F'(x)$ existe. Nous pouvons supposer que l'ensemble parfait $\pi_n^{(1)}$, mes $\pi_n^{(1)} > 0$, obtenu en faisant la réunion de tous ces ensembles (en nombre fini) situés dans les intervalles partiels, ne contient ni les extrémités de $\delta_n^{(1)}$, ni les points de division et que la dérivée $F'(x)$ est bornée sur l'ensemble $\pi_n^{(1)}$.

Supposons maintenant que $\mathsf{F}_1(x)$ est égale à $F(x)$ aux extrémités de $\delta_n^{(1)}$ et dans ces points de division et qu'elle est à nombres dérivés bornés et monotone en chacun des intervalles partiels et d'ailleurs constante dans chaque contigu à $\pi_n^{(1)}$. Il est toujours possible de construire une telle fonction $\mathsf{F}_1(x)$.[38]) En faisant une pareille construction pour tous les $\delta_n^{(1)}$ $(n=1,2,\ldots)$ et en posant

$$P_2 = P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n^{(1)}$$

on obtient la fonction $\mathsf{F}_1(x)$ cherchée.

En effet, $\mathsf{F}_1(x)$ est continue, égale à $F(x)$ sur P_1, à nombres dérivés bornés dans chaque $\delta_n^{(1)}$, constante dans tous les contigus à chaque $\pi_n^{(1)}$, donc dans tous les intervalles $\delta_n^{(2)}$ contigus à P_2.

En posant

$$h_1(x) = F(x) - \mathsf{F}_1(x),$$

on a évidemment les inégalités cherchées

$$|h_1(x)| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{sur } \delta_n^{(1)} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

puisque dans chaque intervalle partiel qui fait partie de $\delta_n^{(1)}$ les valeurs de $F(x)$ et de $\mathsf{F}_1(x)$ aux extrémités sont les mêmes, d'ailleurs l'oscillation de $F(x)$ ne surpasse pas $\frac{1}{2^{n+1}}$ et $\mathsf{F}_1(x)$ est monotone; donc, sur chacun de ces intervalles $|h_1(x)|$ ne surpasse pas $\frac{1}{2^{n+1}}$ et cette inégalité a ainsi lieu dans tout l'intervalle $\delta_n^{(1)}$.

On a sur P_1 l'égalité

$$h_1(x) = 0$$

ce qui, avec les inégalités précédentes, conduit, en vertu d'un théorème de M. Denjoy[39]), à la conclusion

$$h_1'(x) = 0 \quad \text{presque partout sur } P_1.$$

D'autre part, comme la dérivée de $F(x)$ et les nombres dérivés de $\mathsf{F}_1(x)$ sont bornés sur chaque $\pi_n^{(1)}$, $h_1(x)$ a des nombres dérivés bornés sur $\pi_n^{(1)}$.

---

[38]) Si (a_i, a_{i+1}) est l'un des intervalles partiels en lesquels on a divisé $\delta_n^{(1)}$, il suffit de définir la fonction $g(x)$ comme égale à 1 sur $\pi_n^{(1)}$ et à zéro en dehors de $\pi_n^{(1)}$ et de poser

$$\mathsf{F}_1(x) = F(a_i) + \frac{F(a_{i+1}) - F(a_i)}{m_i} \int_{a_i}^{x} g(x)\,dx$$

où l'on désigne par m_i la mesure de la partie de $\pi_n^{(1)}$ contenue dans (a_i, a_{i+1}). D'après la construction de $\pi_n^{(1)}$, les m_i ne sont jamais nuls, et le nombre des (a_i, a_{i+1}) étant fini, $\mathsf{F}_1(x)$ est dans $\delta_n^{(1)}$ à nombres dérivés bornés

[39]) Voir la note [37]) du n° 12.

donc sur chaque $\pi_n^{(1)}$ la dérivée $h_1'(x)$ existe presque partout. Comme $P_2 = P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n^{(1)}$, il en résulte que $h_1'(x)$ existe presque partout sur P_2.

Comme $h_1(x) = 0$ sur P, et qu'elle est à nombres dérivés bornés sur chaque $\pi_n^{(1)}$, il en résulte (n° 3) qu'elle jouit de la propriété N sur P_2.

Cela posé remarquons que dans chaque $\delta_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $h_1(x)$ ne diffère de $F(x)$ que par une constante, donc elle est quasi-partout dérivable.

Ceci permet de répéter toutes les constructions que nous avons faites pour obtenir $\mathsf{F}_1(x)$ et de trouver ainsi une fonction $\mathsf{F}_2(x)$ telle que

$$\mathsf{F}_2(x) = h_1(x) \quad \text{sur } P_2,$$

$\mathsf{F}_2(x)$ est à nombres dérivés bornés dans chaque $\delta_n^{(2)}$, constante dans les intervalles $\delta_n^{(3)}$ contigus à un certain ensemble parfait P_3 contenant P_2 et telle que la différence

$$h_2(x) = h_1(x) - \mathsf{F}_2(x)$$

vérifie dans les $\delta_n^{(2)}$ les inégalités

$$|h_2(x)| < \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{dans } \delta_n^{(2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

qu'elle ait une dérivée presque partout sur P_3 et jouisse de la propriété N sur cet ensemble. D'ailleurs $h_2(x)$ est dérivable quasi-partout puisqu'elle ne diffère de $h_1(x)$ que par une constante dans chaque $\delta_n^{(3)}$.

Supposons que l'on ait déjà défini les ensembles $P_1 < P_2 < \ldots < P_m < P_{m+1}$ et les fonctions.

$$\mathsf{F}_1(x), \mathsf{F}_2(x), \ldots, \mathsf{F}_m(x) \quad \text{et} \quad h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x)$$

et qu'elles jouissent des propriétés suivantes:

$$\mathsf{F}_{k+1}(x) = h_k(x) \quad \text{sur } P_{k+1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, m-1).$$

$\mathsf{F}_k(x)$ est continue, à nombres dérivés bornés dans chaque intervalle $\delta_n^{(k)}$ contigu à P_k et constante dans les intervalles $\delta_n^{(k+1)}$ contigus à P_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots, m)$; la différence

$$h_{k+1}(x) = h_k(x) - \mathsf{F}_{k+1}(x)$$

est dérivable quasi-partout et vérifie les inégalités

$$|h_k(x)| < \frac{1}{2^{n+k}} \quad \text{sur } \delta_n^{(k)} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, m \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix};$$

d'ailleurs $h_k'(x)$ existe presque partout sur P_{k+1} et $h_k(x)$ jouit de la propriété N sur P_{k+1}.

On pourra définir facilement un ensemble P_{m+2} et des fonctions $\mathsf{F}_{m+1}(x)$ et $h_{m+1}(x)$ de telle manière qu'elles jouissent des mêmes propriétés. Il suffira de remplacer dans le raisonnement fait pour construire

$\mathsf{F}_1(x)$ la fonction $F(x)$ par $h_m(x)$, l'ensemble P_1 par P_m et le nombre $\frac{1}{2^{n+1}}$ par $\frac{1}{2^{n+m}}$.

En répétant ce procédé, on obtient une suite de fonctions continues

$$\mathsf{F}_1(x), \mathsf{F}_2(x), \ldots, \mathsf{F}_m(x), \ldots.$$

Comme

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathsf{F}_1(x) + h_1(x), \\ h_1(x) &= \mathsf{F}_2(x) + h_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ h_m(x) &= \mathsf{F}_{m+1}(x) + h_{m+1}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

on voit que

$$F(x) = \mathsf{F}_1(x) + \mathsf{F}_2(x) + \ldots + \mathsf{F}_m(x) + h_m(x)$$

quel que soit l'entier positif m.

Or, $h_{m-1}(x) = \mathsf{F}_m(x)$ sur P_m, donc

$$h_m(x) = 0 \quad \text{sur } P_m \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

D'autre part, on a

$$|h_m(x)| < \frac{1}{2^{n+m}} \quad \text{sur } \delta_n^{(m)}$$

d'où il résulte qu'on a partout

$$|h_m(x)| \leqq \frac{1}{2^{m+1}},$$

et cette inégalité prouve que la série $\sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{F}_m(x)$ converge uniformément vers $F(x)$.

Chacune des deux séries

$$\mathsf{F}_1(x) + \mathsf{F}_3(x) + \ldots + \mathsf{F}_{2n-1}(x) + \ldots$$

et

$$\mathsf{F}_2(x) + \mathsf{F}_4(x) + \ldots + \mathsf{F}_{2n}(x) + \ldots$$

converge donc aussi uniformément. En posant

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \mathsf{F}_1(x) + \ldots + \mathsf{F}_{2n-1}(x) + \ldots, \\ F_2(x) &= \mathsf{F}_2(x) + \ldots + \mathsf{F}_{2n}(x) + \ldots \end{aligned}$$

nous voyons que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont continues et que l'on a

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x).$$

Nous allons démontrer que chacune des fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ est une superposition de deux fonctions absolument continues.

A cet effet, nous posons

$$R_m(x) = h_m(x) - h_{m+1}(x) + h_{m+2}(x) - h_{m+3}(x) + \ldots$$

et nous remarquons que, quel que soit m *impair*, on peut écrire

$$F_1(x) = \mathsf{F}_1(x) + \mathsf{F}_3(x) + \ldots + \mathsf{F}_m(x) + R_{m+1}(x),$$

et pour tout m *pair*

$$F_2(x) = \mathsf{F}_2(x) + \mathsf{F}_4(x) + \ldots + \mathsf{F}_m(x) + R_{m+1}(x),$$

puisque

$$\mathsf{F}_n(x) = h_{n-1}(x) - h_n(x)$$

quel que soit n.

Or, les fonctions $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x), \ldots$ vérifient les conditions du lemme du n° 12.

En effet, quel que soit m, on a, d'après la construction même

$$\mathsf{F}_m(x) = h_{m-1}(x) \quad \text{sur} \quad P_m$$

et comme $h_m(x) = h_{m-1}(x) - \mathsf{F}_m(x)$ partout, il en résulte

$$h_m(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_m.$$

On a d'ailleurs

$$|h_m(x)| < \frac{1}{2^{n+m}} \quad \text{sur} \quad \delta_n^{(m)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Il en résulte, en vertu de ce lemme et de la remarque faite sur ce lemme, que

a) $R_m(x) = 0$ sur P_m;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(m)}}{\text{osc}}\, R_m(x) < \frac{1}{2^{m-2}}$;

c) $R'_m(x) = 0$ presque partout sur P_m.

Il en résultera finalement que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont presque partout dérivables sur chaque P_m et jouissent de la propriété N sur cet ensemble, quel que soit m, et que si E est l'ensemble des points n'appartenant à aucun des ensembles P_m, nous avons

$$\text{mes}\, F_1(\mathsf{E}) = \text{mes}\, F_2(\mathsf{E}) = 0.$$

Pour le voir, remarquons d'abord que l'on a

$$\mathsf{F}_m(x) = h_{m-1}(x) - h_m(x) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Or, sur l'ensemble P_m, $h'_{m-1}(x)$ et $h'_m(x)$ existent presque partout, donc $\mathsf{F}'_m(x)$ existe presque partout sur P_m; d'ailleurs, dans les contigus $\delta_n^{(m)}$ à P_m la fonction $\mathsf{F}_m(x)$ est à nombres dérivés bornés, donc encore presque partout dérivable. Ainsi $\mathsf{F}'_m(x)$ existe presque partout, et cela quel que soit m.

Comme $R'_{m+1}(x) = 0$ presque partout sur P_{m+1}, il en résulte que, quel que soit m, $F'_1(x)$ et $F'_2(x)$ existent presque partout sur P_m.

Pour démontrer que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ jouissent de la propriété N sur chaque P_m, remarquons d'abord que $\mathsf{F}_{m+1}(x) = h_m(x)$ sur P_{m+1}, et comme $h_m(x)$ est nulle sur P_m, et P_m est contenu dans P_{m+1}, on a

$$\mathsf{F}_{m+1}(x) = 0 \quad \text{sur } P_m \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

D'ailleurs, quel que soit p, P_{m+p} contient P_m, donc

$$\mathsf{F}_{m+p}(x) = 0 \quad \text{sur } P_m \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots \\ p = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Il en résulte d'abord que l'on a sur P_1

$$F_1(x) = \mathsf{F}_1(x) = F(x)$$

et comme $F(x)$ a, par hypothèse, une dérivée en chaque point de P_1, elle jouit de la propriété N sur P_1 (n° 3), et il en est de même pour $F_1(x)$.

On a

$$F_2(x) = 0 \quad \text{sur } P_1$$

donc $F_2(x)$ jouit aussi de la propriété N sur P_1.

Pour $m > 1$ nous écrivons l'identité évidente

$$P_m = P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_k - P_{k-1}) + \ldots + (P_m - P_{m-1}).$$

D'après la construction même des fonctions $\mathsf{F}_n(x)$, les fonctions $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \ldots, \mathsf{F}_{k-2}$ sont des constantes dans chaque intervalle contigu à P_{k-1}, $\mathsf{F}_{k-1}(x)$ est à nombres dérivés bornés sur chaque $\delta_n^{(k-1)}$, donc jouit de la propriété N sur $P_k - P_{k-1}$, $\mathsf{F}_k(x) = h_{k-1}(x)$ sur P_k, donc jouit de la propriété N sur P_k et *a fortiori* sur $P_k - P_{k-1}$; enfin $\mathsf{F}_{k+p}(x) = 0$ sur P_k, donc sur $P_k - P_{k-1}$ quel que soit $p = 1, 2, 3, \ldots$.

Il en résulte, quel que soit k, que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ représentent dans chaque $\delta_n^{(k-1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ la somme d'une constante et d'une fonction jouissant de la propriété N sur la partie de $P_k - P_{k-1}$ contenue dans ce $\delta_n^{(k-1)}$; donc $F_1(x)$ et $F_2(x)$ jouissent de la propriété N sur $P_k - P_{k-1}$ quel que soit k, et par suite elles jouissent de la propriété N sur chaque P_m $(m = 1, 2, \ldots)$.

D'ailleurs, nous avons vu qu'elles sont dérivables presque partout sur P_m quel que soit m. Donc, si e est un ensemble de points appartenant à un certain P_m et tel que la dérivée de $F_1(x)$ (ou bien de $F_2(x)$) n'existe pas aux points de cet ensemble, on a nécessairement

$$\text{mes } e = 0.$$

Et comme $F_1(x)$ (resp. $F_2(x)$) jouit de la propriété N sur P_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ on a

$$\text{mes } F_1(e) = 0$$

(ou bien mes $F_2(e) = 0$).

Nous avons désigné par E l'ensemble des points qui n'appartiennent pas à P_m quel que soit m.

Donc, quel que soit m, on peut dire que E est contenu dans la somme des contigus $\delta_n^{(m)}$ à P_m.

Il en résulte que l'on a

$$\text{mes}\, F_1(\mathsf{E}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(m)}}{\text{osc}}\, F_1(x),$$

et une inégalité analogue pour F_2.

Supposons maintenant m impair. On a

$$F_1(x) = \mathsf{F}_1(x) + \ldots + \mathsf{F}_m(x) + R_{m+1}(x).$$

Or, pour $k \leqq m$, $\mathsf{F}_k(x)$ est constante dans les contigus $\delta_n^{(m+1)}$ à P_{m+1}, donc

$$\mathsf{F}_1(x) + \mathsf{F}_2(x) + \ldots + \mathsf{F}_m(x) = \text{const dans } \delta_n^{(m+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ainsi

$$\underset{\delta_n^{(m+1)}}{\text{osc}}\, F_1(x) = \underset{\delta_n^{(m+1)}}{\text{osc}}\, R_{m+1}(x),$$

et comme nous savons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(m+1)}}{\text{osc}}\, R_{m+1}(x) < \frac{1}{2^{m-1}}$$

il en résulte

$$\text{mes}\, F_1(\mathsf{E}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(m+1)}}{\text{osc}}\, F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(m+1)}}{\text{osc}}\, R_{m+1}(x) < \frac{1}{2^{m-1}}$$

et cette inégalité est valable quel que soit m impair. On en déduit aussitôt

$$\text{mes}\, F_1(\mathsf{E}) = 0.$$

On démontre de même, en supposant m pair,

$$\text{mes}\, F_2(\mathsf{E}) = 0.$$

Ainsi, chacune des fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ jouit de la propriété suivante: l'ensemble des points où sa dérivée n'existe pas a une image de mesure nulle. En effet, ou bien il appartient à E et alors son image est contenue dans $F_1(\mathsf{E})$ ou $F_2(\mathsf{E})$, donc elle est de mesure nulle, ou bien une partie de cet ensemble appartient à un certain P_m. Dans ce cas cette partie est de mesure nulle, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ étant dérivables presque partout sur P_m, et comme elle jouissent de la propriété N sur chacun de ces ensembles, l'image est encore de mesure nulle.

Il en résulte que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont des superpositions de fonctions absolument continues, c. q. f. d.

Il suit immédiatement du théorème démontré que

chaque fonction à variation bornée est la somme de deux fonctions, dont chacune est une superposition de fonctions absolument continues.

Nous savons que ce résultat ne peut pas être précisé, dans le cas général, en ce sens que l'une des superpositions se réduit à une fonction

absolument continue. En effet, nous avons vu (n° 11) qu'une fonction à variation bornée qui n'est pas absolument continue ne peut pas être la somme d'une fonction absolument continue et d'une superposition de fonctions absolument continues.

Une autre conséquence du théorème que nous venons de démontrer est la suivante:

chaque fonction continue qui jouit de la propriété N est la somme de deux fonctions, dont chacune est une superposition de fonctions absolument continues [40]).

14. Exemple d'une somme de deux superpositions privée de dérivée presque partout. — Il est très naturel de se poser la question si le théorème inverse à celui du n° 13 a encore lieu, c'est-à-dire si chaque fonction de la forme

$$f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)],$$

f_1, f_2, φ_1 et φ_2 étant absolument continues, est nécessairement quasi-partout dérivable.

La réponse est *négative*. Nous allons, en effet, construire *une fonction privée de dérivée presque partout et qui est la somme de deux fonctions, dont chacune est une superposition de fonctions absolument continues.*

A cet effet, faisons d'abord la construction préliminaire suivante. Soit δ un intervalle quelconque, Q un ensemble parfait non dense et de mesure positive situé dans δ, et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$ les contigus à Q. Soient $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$ des ensembles parfaits de mesure positive tels que π_n est situé dans δ_n et symétrique par rapport au centre c_n de ce δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Soit enfin

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n$$

et

$$P = Q + S.$$

Nous allons construire une fonction $\mathsf{F}(x)$ nulle aux extrémités de δ et de chaque δ_n, en valeur absolue inférieure à ε, ε étant fixé d'avance, nulle sur Q, privée de dérivée en chaque point de Q, possédant une dérivée presque partout sur S, enfin constante dans chaque intervalle contigu à P.

Pour construire une telle fonction, rappelons que nous avons démontré au n° 8 que si $\mathsf{F}(x)$ est une fonction continue nulle sur Q, dont les maxima dans les contigus à Q sont aux centres de ces contigus et ont

[40]) En effet, d'après le théorème de M. Banach (n° 2) chaque fonction jouissant de la propriété N est dérivable quasi-partout.

des valeurs h_n convenablement choisies, $\mathsf{F}(x)$ est privée de dérivée en chaque point de Q.

Soit $\delta_n = (a_n, b_n)$ un intervalle contigu à Q et c_n son centre. Posons

$$g(x) = +1 \text{ si } x \text{ appartient à } \pi_n \text{ et d'ailleurs } a_n \leqq x \leqq c_n,$$
$$g(x) = -1 \text{ si } x \text{ appartient à } \pi_n \text{ et d'ailleurs } c_n \leqq x \leqq b_n,$$
$$g(x) = 0 \quad \text{ si } x \text{ n'appartient pas à } \pi_n.$$

Posons

$$\mathsf{F}(x) = \frac{2h_n}{\text{mes}\,\pi_n}\int_{a_n}^{x} g(x)\,dx \text{ dans } \delta_n$$

et

$$\mathsf{F}(x) = 0 \text{ sur } Q.$$

On voit bien que $\mathsf{F}(x)$ est continue, nulle sur Q et aux extrémités de δ et des δ_n. Ceci ist évident pour l'extrémité a_n, mais il en est de même pour b_n, puisque nous avons supposé que π_n est symétrique par rapport à c_n. On voit de suite que $\mathsf{F}(x)$ atteint son maximum absolu sur δ_n au point c_n et que la valeur de ce maximum est h_n. Donc, si les h_n sont convenablement choisis, $\mathsf{F}'(x)$ n'existe en aucun point de Q.

D'ailleurs, $\mathsf{F}(x)$, étant absolument continue dans chaque δ_n, y est dérivable presque partout, donc $\mathsf{F}'(x)$ existe presque partout sur S.

Enfin $\mathsf{F}(x)$ est constante dans les contigus à tous les π_n (puisque $g(x) = 0$ dans ce cas), donc $\mathsf{F}(x)$ est constante dans chaque contigu à P.

On peut d'ailleurs supposer que $\mathsf{F}(x) < \varepsilon$, puisque s'il n'en était pas ainsi il suffirait de la multiplier par une constante convenablement choisie, ce qui conserverait toutes ses propriétés.

Cela posé, prenons dans l'intervalle $(0, 1)$ un ensemble parfait non dense Q_1, $\text{mes}\,Q_1 > 0$, et dans les contigus à Q_1 des ensembles parfaits non denses et de mesure positive $\pi_n^{(1)}$ symétriques par rapport aux centres de ces contigus dont nous appellerons la réunion par S_1; nous désignerons par P_1 la somme $Q_1 + S_1$ et nous désignerons par $\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \ldots, \delta_n^{(1)}, \ldots$ les intervalles contigus à P_1.

Soit $\mathsf{F}_0(x)$ une fonction continue, nulle sur Q_1, privée de dérivée en chaque point de Q_1, possédant une dérivée presque en chaque point de S_1 et constante dans les contigus à P_1.

Prenons dans chaque contigu $\delta_n^{(1)}$ à P_1 un ensemble parfait non dense $Q_n^{(2)}$, $\text{mes}\,Q_n^{(2)} > 0$, et soit $S_n^{(2)}$ un ensemble formé d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses et de mesure positive situés dans les contigus à $Q_n^{(2)}$ et symétriques par rapport aux centres des contigus (on considère les contigus par rapport à $\delta_n^{(1)}$).

Nous savons qu'on peut construire une fonction $F_1(x)$ continue, nulle aux extrémités de $\delta_n^{(1)}$, nulle sur $Q_n^{(2)}$, privée de dérivée sur $Q_n^{(2)}$ et possédant une dérivée presque partout sur $S_n^{(2)}$, d'ailleurs constante dans les contigus à $P_n^{(2)} = Q_n^{(2)} + S_n^{(2)}$ et inférieure à $\frac{1}{2^{n+1}}$. En posant $F_1(x) = 0$ sur P_1 on voit qu'elle est partout définie, continue, qu'elle est privée de dérivée sur $\Theta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(2)}$ et possède une dérivée presque partout sur $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(2)}$ et qu'elle est constante dans les contigus $\delta_n^{(2)}$ à P_2, où

$$P_2 = P_1 + \Theta_2 + S_2.$$

D'une manière générale, $\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, \ldots, \delta_n^{(k)}, \ldots$, étant les contigus à P_k, on prend dans $\delta_n^{(k)}$ un ensemble parfait non dense $Q_n^{(k+1)}$, mes $Q_n^{(k+1)} > 0$, et on désigne par $S_n^{(k+1)}$ un ensemble formé d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses et de mesure positive situés dans les contigus à $Q_n^{(k+1)}$ et symétriques par rapport aux centres de ces contigus.

On construit une fonction $F_k(x)$ continue, nulle aux extrêmités de $\delta_n^{(k)}$, nulle sur $Q_n^{(k+1)}$, privée de dérivée sur $Q_n^{(k+1)}$, possédant une dérivée presque partout sur $S_n^{(k+1)}$ et constante dans les contigus à $P_n^{(k+1)} = Q_n^{(k+1)} + S_n^{(k+1)}$, d'ailleurs inférieure dans les $\delta_n^{(k)}$ à $\frac{1}{2^{k+n}}$ respectivement. On achève la définition de $F_k(x)$ en la supposant nulle sur P_k. Elle est alors continue, privée de dérivée sur $\Theta_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(k+1)}$ et possède une dérivée presque partout sur $S_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(k+1)}$; elle est constante dans les contigus à $P_{k+1} = P_k + \Theta_{k+1} + S_{k+1}$.

Nous avons ainsi défini une suite de fonctions $F_0(x), F_1(x), \ldots, F_k(x), \ldots$.

Comme $F_k(x) = 0$ sur P_k et $|F_k(x)| < \frac{1}{2^{n+k}}$ dans le contigu $\delta_n^{(k)}$ à P_k $(n = 1, 2, \ldots)$, on voit que $|F_k(x)| < \frac{1}{2^{k+1}}$ dans $(0, 1)$, donc la série des fonctions $F_k(x)$ converge uniformément.

En posant

$$F(x) = F_0(x) + F_1(x) + \ldots + F_k(x) + \ldots$$

on voit donc que $F(x)$ est une fonction continue.

Nous allons démontrer qu'elle est privée de dérivée presque partout sur les Θ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ et possède une dérivée presque partout sur les S_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

A cet effet, remarquons d'abord que $F_0(x)$, $F_1(x)$, $\ldots$, $F_{k-2}(x)$, d'après leur construction même, sont constantes dans les contigus à P_{k-1}, donc, en particulier sur Θ_k et S_k et que $F_{k-1}(x)$ est privée de dérivée

sur Θ_k et possède une dérivée presque partout sur S_k. Or, la fonction

$$R_k(x) = \mathsf{F}_k(x) + \mathsf{F}_{k+1}(x) + \ldots$$

vérifie les conditions du lemme du n° 12, donc, en vertu de ce lemme

$$R_k'(x) = 0 \text{ presque partout sur } P_k,$$

donc, en particulier, sur Θ_k et S_k.

Il en résulte immédiatement que $\mathsf{F}'(x)$ existe presque partout sur S_k et n'existe pas presque partout sur Θ_k, et cela quel que soit $k = 1, 2, 3, \ldots$ (on pose $\Theta_1 = Q_1$).

Nous allons démontrer que $\mathsf{F}(x)$ est une superposition de fonctions absolument continues.

En effet, l'ensemble des points où $\mathsf{F}'(x)$ n'existe pas est contenu dans la somme des ensembles Θ_k ($k = 1, 2, \ldots$) complétée par l'ensemble E des points n'appartenant ni aux Θ_k ni aux S_k et par un ensemble de mesure nulle situé sur les S_k.

Or, la fonction $R_k(x)$ vérifie les conditions du lemme (n° 12) donc $R_k(x) = 0$ sur P_k et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(k)}}{\operatorname{osc}} R_k(x) < \frac{1}{2^{k-2}}.$$

Il en résulte d'abord que sur P_k on a

$$\mathsf{F}(x) = \mathsf{F}_0(x) + \mathsf{F}_1(x) + \ldots + \mathsf{F}_{k-1}(x),$$

et comme $\mathsf{F}_0, \mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_{k-2}$ sont constantes sur Θ_k et $\mathsf{F}_{k-1}(x)$ nulle sur Θ_k, on voit que

$$\operatorname{mes} \mathsf{F}(\Theta_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'autre part, E étant l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucun des Θ_k et S_k, on voit que E est contenu dans la somme des $\delta_n^{(k)}$ (n° 1, 2, ...) quel que soit k.

Donc

$$\operatorname{mes} \mathsf{F}(\mathsf{E}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(k)}}{\operatorname{osc}} \mathsf{F}(x) \qquad \text{quel que soit } k.$$

Comme $\mathsf{F}_0, \mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_{k-1}$ sont constantes dans les contigus $\delta_n^{(k)}$ à P_k, il en résulte

$$\operatorname{mes} \mathsf{F}(\mathsf{E}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(k)}}{\operatorname{osc}} R_k(x) < \frac{1}{2^{k-2}}$$

et comme k est ici quelconque, on a

$$\operatorname{mes} \mathsf{F}(\mathsf{E}) = 0.$$

Il nous reste à considérer le cas où $\mathsf{F}'(x)$ n'existe pas en un ensemble e appartenant à un certain S_k; e est alors nécessairement de mesure nulle,

puisque $\mathsf{F}(x)$ est sur S_k presque partout dérivable. Or, nous avons vu que sur P_k, donc sur S_k, on a

$$\mathsf{F}(x) = \mathsf{F}_0(x) + \ldots + \mathsf{F}_{k-1}(x)$$

et comme les $\mathsf{F}_0, \mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_{k-2}$ sont constantes dans les contigus à P_{k-1} et F_{k-1} d'après sa construction même jouit de la propriété N sur S_k, on voit que $\mathsf{F}(x)$ jouit de la propriété N sur S_k, donc

$$\text{mes}\, \mathsf{F}(e) = 0.$$

On voit ainsi que l'ensemble des points où $\mathsf{F}'(x)$ n'existe pas a une image de mesure nulle, donc $\mathsf{F}(x)$ *est une superposition de fonctions absolument continues.*

La fonction $\mathsf{F}(x)$ donne l'exemple, dont nous avons parlé au n° 8, d'une superposition de fonctions absolument continues qui est privée de dérivée quasi-partout, puisque la somme des Θ_k est de mesure positive dans chaque intervalle contenu dans $(0, 1)$.

Il est facile maintenant de construire une fonction $F(x)$ qui est la somme de deux superpositions de fonctions absolument continues et qui est privée de dérivée presque partout.

A cet effet, remarquons que, en construisant les ensembles $Q_n^{(k)}$, nous aurions pu supposer qu'ils sont symétriques par rapport aux centres des intervalles dans lesquels ils sont situés.

Cela étant, rien ne nous empêche à construire dans un contigu $\delta_n^{(1)}$ à Q_1 une fonction $\Phi(x)$ qui est une superposition de fonctions absolument continues, nulle aux extrémités de $\delta_n^{(1)}$ et qui est privée de dérivée presque partout sur les parties de tous les S_k contenues dans ce $\delta_n^{(1)}$ et possède une dérivée presque partout sur les parties de tous les Θ_k contenues dans $\delta_n^{(1)}$. On peut d'ailleurs supposer que $|\Phi(x)| < \varepsilon_n$ sur $\delta_n^{(1)}$, où les ε_n forment une série convergente, et que $\Phi(x) = 0$ sur Q_1.

Il est évident que $\Phi(x)$ est alors une superposition de fonctions absolument continues. En vertu du théorème de M. Denjoy[41]), elle a une dérivée nulle presque partout sur Q_1. D'ailleurs d'après sa construction même, elle a une dérivée presque partout sur tous les Θ_k et n'en a pas presque partout sur tous les S_k.

La somme

$$F(x) = \mathsf{F}(x) + \Phi(x)$$

est donc évidemment privée de dérivée sur tous les Θ_k et tous les S_k. Et comme nous pouvons toujours supposer que

$$\text{mes} \sum_{k=1}^{\infty} (\Theta_k + S_k) = 1,$$

$F(x)$ est privée de dérivée presque partout, c. q. f. d.

[41]) Voir la note du n° 12.

II. Le critère nécessaire.

15. La propriété nécessaire. — Nous avons vu au n° 14 qu'il existe des fonctions continues privées de dérivée presque partout et qui sont pourtant représentables dans la forme

$$f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)],$$

les f_i et φ_i étant absolument continues.

Il est naturel de se demander maintenant quelles sont les conditions *nécessaires* pour qu'une fonction continue soit représentable dans cette forme.

Pour répondre à cette question, faisons une remarque préliminaire. Soit $\mathsf{F}(x)$ une fonction continue et E un ensemble de mesure positive en chaque point duquel la dérivée $\mathsf{F}'(x)$ est déterminée et finie. Il existe évidemment un ensemble parfait P contenu dans E, mes $P > 0$, et tel que $\mathsf{F}'(x)$ est bornée sur P. Sans restreindre la généralité on peut supposer que chaque portion[42]) de P est encore de mesure positive. En vertu d'un théorème de M. Denjoy[43]) comme $\mathsf{F}'(x)$ est finie sur P il existe une portion π de l'ensemble P telle que la somme des oscillations de $\mathsf{F}(x)$ dans les intervalles contigus à π est finie. Si, donc, $\mathsf{F}_1(x)$ est égale à $\mathsf{F}(x)$ sur π et interpolée linéairement dans les contigus à π, on voit bien que $\mathsf{F}_1(x)$ est absolument continue, donc $\mathsf{F}(x)$ est absolument continue sur l'ensemble π[44]). Or, chaque portion de P étant, par hypothèse, de mesure positive, on a mes $\pi > 0$, donc *si* $\mathsf{F}(x)$ *est une fonction continue dont la dérivée est déterminée et finie en chaque point d'un ensemble* E *de mesure positive, il existe un ensemble parfait* π, *mes* $\pi > 0$, *contenu dans* E *et tel que* $\mathsf{F}(x)$ *est absolument continue sur* π.

Cela posé, revenons à la condition nécessaire pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit de la forme

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

les fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ étant des superpositions de fonctions absolument continues.

---

[42]) On appelle *portion* d'un ensemble parfait la partie de cet ensemble contenue entre deux points qui ne lui appartiennent pas.

[43]) *Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables* (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure* **33** (1916), p. 179).

[44]) On dit qu'une fonction continue est *absolument continue sur un ensemble parfait*, si elle coïncide sur cet ensemble avec une fonction absolument continue dans tout l'intervalle où cet ensemble est situé. Il existe des définitions *intrinsèques* de continuité absolue sur un ensemble, c'est-à-dire des définitions où n'interviennent que les valeurs de la fonction sur l'ensemble, mais elles sont équivalentes à celle du texte et dans les démonstrations qui suivent il nous sera plus facile de nous servir de cette dernière.

Soit δ un intervalle quelconque situé à l'intérieur de l'intervalle (a, b), où $F(x)$ est définie.

Deux cas peuvent se présenter *a priori*: ou bien $F(x)$ a une dérivée sur un ensemble E de mesure positive situé dans δ, ou bien $F(x)$ est privée de dérivée presque partout dans δ. Dans le premier cas, d'après la remarque faite, il existe un ensemble parfait P, $\operatorname{mes} P > 0$, tel que $F(x)$ est absolument continue sur P.

Dans le second cas, comme $F_1(x)$ est une superposition de fonctions absolument continues, donc dérivable quasi-partout (n° 8), il existe dans δ un ensemble de mesure positive dans lequel $F_1'(x)$ existe, donc, en vertu de la même remarque précédente, un ensemble parfait P, $\operatorname{mes} P > 0$, où $F_1'(x)$ existe et $F_1(x)$ est absolument continue. Or, comme nous avons supposé que $F'(x)$ n'existe pas presque partout dans δ, il en résulte que $F_2'(x)$ n'existe pas presque partout dans P. Comme $F_2(x)$ est une superposition de fonctions absolument continues, il en résulte nécessairement

$$\operatorname{mes} F_2(P) = 0.$$

Ceci nous amène au théorème suivant:

Théorème. — *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit représentable sous la forme*

$$f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)]$$

les f_i et φ_i étant absolument continues il faut que dans chaque intervalle δ il existe un ensemble parfait P de mesure positive et une fonction absolument continue $\psi(x)$ telle que la différence

$$r(x) = F(x) - \psi(x)$$

vérifie l'égalité

$$\operatorname{mes} r(P) = 0.$$

En effet, dans le premier des deux cas considérés il suffit de poser $\psi(x) = F(x)$ sur P et de l'interpoler linéairement en dehors de P; $\psi(x)$ sera alors absolument continue dans δ et la différence $r(x) = F(x) - \psi(x)$ est nulle sur P, donc $\operatorname{mes} r(P) = 0$.

Dans le second cas on pose $\psi(x) = F_1(x)$ sur P et on l'interpole linéairement en dehors de P; $\psi(x)$ est encore absolument continue et la différence $r(x) = F(x) - \psi(x)$ est égale à $F_2(x)$ sur P, donc $\operatorname{mes} r(P) = 0$, c. q. f. d.

Ce théorème, malgré son extrême simplicité, nous permettra de démontrer *l'existence de fonctions continues qui ne sont pas représentables sous la forme*

$$f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)]$$

les f_i et φ_i étant absolument continues.

16. Fonctions ridées. — Pour construire de telles fonctions nous allons introduire une notion nouvelle, celle de *fonction ridée*[45]).

Définition. *Une fonction continue* $F(x)$ *sera appelée fonction ridée si quel que soit l'ensemble* E *de mesure* positive *dans le domaine où* $\mathsf{F}(x)$ *est définie, il existe un ensemble* E_1 *de mesure nulle contenu dans* E *tel que* $F(x)$ *est monotone sur* E_1 *et l'image* $F(\mathsf{E}_1)$ *est de mesure positive.*

L'existence de fonctions de cette nature n'est pas évidente mais avant de passer à sa démonstration nous allons prouver d'abord que ces fonctions donnent une solution du problème posé, c'est-à-dire nous allons démontrer le

Théorème[46]). — *Une fonction ridée quelconque* $F(x)$ *ne peut pas être représentée dans la forme*

$$f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)]$$

les f_i *et* φ_i *étant absolument continues.*

Nous avons vu au n° précédent que pour la possibilité d'une telle représentation il est nécessaire qu'il existe dans chaque intervalle δ un ensemble parfait P, mes $P > 0$, et une fonction absolument continue $\psi(x)$ telle que la différence

$$r(x) = F(x) - \psi(x)$$

ait sur P une image de mesure nulle,

$$\text{mes}\, r(P) = 0.$$

Or, nous allons voir que pour une fonction ridée ceci est impossible.

Soit P un ensemble parfait de mesure positive et d'ailleurs quelconque. Puisque $F(x)$ est une fonction ridée, il existe un ensemble π contenu dans P, mes $\pi = 0$, tel que $F(x)$ est monotone sur π et mes $F(\pi) > 0$. Il est bien évident que sans restreindre la généralité on peut supposer que π est parfait.

Désignons par $F_1(x)$ une fonction égale à $F(x)$ sur π et interpolée linéairement dans les intervalles contigus à π; $F_1(x)$ est donc partout monotone.

Soit

$$r_1(x) = F_1(x) - \psi(x).$$

On voit que $r_1(x)$ est à variation bornée comme différence d'une fonction monotone et d'une fonction absolument continue. D'ailleurs, dans chaque contigu à π, la fonction $r_1(x)$ est absolument continue, donc jouit de la

[45]) Voir ma Note *Sur la structure analytique d'une fonction continue arbitraire.* (*Comptes rendus* **186** (1928), p. 1414).

[46]) Voir ma Note *Sur la structure analytique d'une fonction continue arbitraire.* (*Comptes Rendus* **186** (1928), p. 1414).

propriété N. Si l'on avait $\operatorname{mes} r_1(\pi) = 0$, il en résulterait que $r_1(x)$ jouit de la propriété N partout, donc, puisqu'elle est à variation bornée, elle serait absolument continue. Or ceci est impossible, puisque, dans ce cas, $F_1(x)$ serait aussi absolument continue et l'on aurait $\operatorname{mes} F_1(\pi) = 0$, tandis que $F_1(x) = F(x)$ sur π et $\operatorname{mes} F(\pi) > 0$.

On voit donc que $\operatorname{mes} r_1(\pi) > 0$, et comme $r_1(x) = r(x)$ sur π, on a $\operatorname{mes} r(\pi) > 0$ et *a fortiori* $\operatorname{mes} r(P) > 0$. Nous aboutissons à une contradiction, et le théorème est ainsi démontré.

On peut généraliser ce théorème de plusieurs façons. Pour y arriver, signalons d'abord une propriété des fonctions ridées

Si $F(x)$ est une fonction ridée et $\psi(x)$ une fonction continue qui a une dérivée en chaque point d'un ensemble E, $\operatorname{mes} \mathsf{E} > 0$, *la différence*

$$r(x) = F(x) - \psi(x)$$

ne jouit pas de la propriété N sur E.

En effet, d'après une remarque faite au n° précédent, E contient un ensemble parfait P sur lequel $\psi(x)$ est absolument continue. Donc, en désignant par $\psi_1(x)$ la fonction égale à $\psi(x)$ sur P et en l'interpolant linéairement dans les contigus à P, on voit que $\psi_1(x)$ est absolument continue. Soit

$$r_1(x) = F(x) - \psi_1(x).$$

En répétant le raisonnement du théorème précédent on démontre qu'il existe un ensemble π contenu dans P, $\operatorname{mes} \pi = 0$ et tel que $\operatorname{mes} r_1(\pi) > 0$. Or, on a sur P l'égalité $r(x) = r_1(x)$, donc $\operatorname{mes} r(\pi) > 0$, et comme $\operatorname{mes} \pi = 0$ ceci prouve que $r(x)$ ne jouit pas de la propriété N sur l'ensemble P, c. q. f. d.

On en conclut immédiatement que le théorème suivant est vrai:

Théorème. — *Une fonction ridée ne peut pas être représentée dans la forme*

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

où $F_1(x)$ est dérivable quasi-partout et $F_2(x)$ jouit de la propriété N.

En particulier *une fonction ridée ne peut pas être la somme de deux fonctions dont chacune jouit de la propriété N* (puisqu'une telle fonction est dérivable quasi-partout).

Voici une autre conséquence du même théorème: *une fonction ridée ne peut pas être représentée dans la forme*

$$F(x) = f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)] + \varphi_3(x)$$

les f_i et φ_i étant absolument continues.

En effet, nous savons (n° 11) qu'une fonction de la forme $f_2[\varphi_2(x)] + \varphi_3(x)$ est dérivable quasi-partout.

D'une manière générale, on peut démontrer qu'*il est impossible de représenter une fonction ridée au moyen de cinq fonctions absolument continues, quelle que soit la façon de les combiner au moyen des opérations d'addition et de superposition de fonctions.*

Il serait trop long de considérer tous les cas qui peuvent se présenter, c'est pourquoi nous nous contentons d'indiquer qu'on arrivera, dans chaque cas particulier, à démontrer l'impossibilité de la représentation ou bien en appliquant le théorème d'après lequel une fonction ridée n'est jamais une somme d'une fonction dérivable quasi-partout et d'une fonction jouissant de la propriété N, ou bien en appliquant le théorème qui suit:

Théorème. — *Si $F(x)$ est une fonction ridée et si elle est représentée dans la forme*

$$F(x) = \psi[\Phi(x)]$$

ψ étant absolument continue, alors la fonction $\Phi(x)$ est nécessairement ridée.

Pour démontrer ce théorème, considérons un ensemble parfait P, $\operatorname{mes} P > 0$. La fonction $F(x)$ étant ridée, P contient un ensemble parfait π, $\operatorname{mes} \pi = 0$, tel que $F(x)$ est monotone sur π et $\operatorname{mes} F(\pi) > 0$. Remarquons d'abord, que $\operatorname{mes} \Phi(\pi) > 0$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, comme ψ est absolument continue, on aurait

$$\operatorname{mes} F(\pi) = \operatorname{mes} \psi[\Phi(\pi)] = 0$$

ce qui est impossible. Donc, $\operatorname{mes} \Phi(\pi) > 0$.

Il est évident que ψ ne peut pas avoir sur l'ensemble $\pi' = \Phi(\pi)$ une dérivée nulle presque partout, car dans ce cas on aurait encore $\operatorname{mes} F(\pi) = 0$. Il existe donc sur π' un ensemble E de mesure positive où la dérivée de ψ ne change pas de signe; on peut évidemment supposer qu'elle est positive. Supposons que nous pouvons démontrer que E contient un ensemble parfait Q', $\operatorname{mes} Q' > 0$, et tel que ψ est *monotone* sur Q'. Soit Q l'ensemble des points de π pour lesquels $\Phi(x)$ appartient à Q'. Comme $F(x)$ est monotone sur π, elle l'est *a fortiori* sur Q puisque Q est contenu dans π. Il en résulte que $\Phi(x)$ est monotone sur Q. En effet, si $\Phi(x)$ n'était pas monotone sur Q, comme ψ est monotone sur Q' il en résulterait que $F(x)$ n'est pas monotone sur Q.

Donc, nous pouvons affirmer que chaque ensemble parfait P, $\operatorname{mes} P > 0$, contient un ensemble Q, $\operatorname{mes} Q = 0$, tel que $\Phi(x)$ est monotone sur Q et $\operatorname{mes} \Phi(Q) > 0$, ce qui prouve que $\Phi(x)$ est une fonction ridée.

Tout revient donc à démontrer que E contient un ensemble parfait de mesure positive sur lequel ψ est monotone. Or la dérivée de ψ étant positive sur E ce fait résulte du lemme général suivant:

Lemme. — *Si $f(x)$ est une fonction continue dont la dérivée $f'(x)$ est positive en chaque point d'un ensemble* E, $\operatorname{mes}\mathsf{E} > 0$, *il existe un ensemble parfait P contenu dans* E, $\operatorname{mes} P > 0$, *et tel que $f(x)$ est monotone sur P.*

Tout d'abord, puisque la dérivée $f'(x)$ est déterminée en chaque point de E, il existe un ensemble parfait π, $\operatorname{mes}\pi > 0$, contenu dans E et tel que $f(x)$ est absolument continue sur π (voir le n° précédent). Donc, en posant $\psi(x) = f(x)$ sur π et en l'interpolant linéairement dans les contigus à π on voit que $\psi(x)$ est absolument continue et que sa dérivée est égale à celle de $f(x)$ donc positive partout sur π sauf peut-être aux points de première espèce pour π, et ces points forment un ensemble dénombrable.

Tout revient donc à démontrer le théorème pour la fonction $\psi(x)$ absolument continue.

Remarquons maintenant que, sans restreindre la généralité, on peut supposer $\psi'(x) > 1$ en chaque point de π. En effet, $\psi'(x)$ étant positive, il existe un ensemble parfait π' contenu dans π et de mesure positive, tel que $\psi'(x) > a$ sur π', a étant une constante positive. En posant $\psi_1(x) = \frac{1}{a}\psi(x)$; on voit que $\psi_1'(x) > 1$ sur π'. Si l'on démontre que $\psi_1(x)$ est monotone sur un ensemble parfait de mesure positive contenu dans π' il en est de même pour $\psi(x)$. Donc, pour ne pas changer les notations, nous supposons que $\psi'(x) > 1$ sur π.

Ceci étant, soit $\varphi(x)$ la dérivée de $\psi(x)$. Posons

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) \text{ sur } \pi \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = 0 \quad \text{en dehors de } \pi,$$
$$\varphi_2(x) = 0 \quad \text{sur } \pi \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = \varphi(x) \text{ en dehors de } \pi.$$

On a évidemment

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

donc, en posant

$$\psi_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx \quad \text{et} \quad \psi_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx,$$

on voit que

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x).$$

Désignons par $\overline{\psi}_2(x)$ l'intégrale indéfinie

$$\overline{\psi}_2(x) = \int |\varphi_2(x)|\,dx.$$

On voit que cette intégrale a pour dérivée $|\varphi_2(x)|$ presque partout, et comme $\varphi_2(x) = 0$ partout sur π, l'ensemble des points pour lesquels

$$\overline{\psi}_2'(x) = |\varphi_2(x)| = 0$$

est de mesure égale à celle de π.

D'autre part, tous les points de π qui sont des points de densité pour π [47]) forment aussi un ensemble de mesure égale à π. Il existe donc un point ξ de π qui est point de densité et tel que

$$\bar{\psi}_2'(\xi) = |\varphi_2(\xi)| = 0.$$

En vertu des deux propriétés du point ξ, un nombre ε aussi petit qu'on veut étant donné, il existe un segment Δ enfermant ξ et tel que

1° $$\operatorname*{osc}_{\Delta} \bar{\psi}_2(x) < \varepsilon \Delta;$$

et 2° P désignant la partie de π enfermée dans Δ, on a

$$\text{mes}\, P > \Delta(1-\varepsilon).$$

Nous allons démontrer que $\psi(x)$ est croissante sur un ensemble de mesure positive et contenu dans P. A cet effet, en désignant par $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n \ldots$ les intervalles contigus à P par rapport à Δ, nous démontrerons d'abord que la somme des oscillations de $\psi(x)$ sur les δ_n est $< 2\varepsilon\Delta$.

En effet, comme $\psi_1(x)$ est constante dans chaque δ_n, puisque $\varphi_1(x) = 0$ en dehors de π, on voit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_n} \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_n} \psi_2(x).$$

Or, en vertu du lemme 3 du n° 1 on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_n} \psi_2(x) \leqq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\delta_n} |\varphi_2(x)|\, dx \leqq 2 \int_{\Delta} |\varphi_2(x)|\, dx \leqq 2 \operatorname*{osc}_{\Delta} \bar{\psi}_2(x) < 2\varepsilon\Delta,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_n} \psi(x) < 2\varepsilon\Delta.$$

D'autre part, on a

$$\operatorname*{osc}_{\Delta} \psi(x) \geqq \operatorname*{osc}_{\Delta} \psi_1(x) - \operatorname*{osc}_{\Delta} \psi_2(x).$$

Or, $\psi_1(x)$ a une dérivée nulle en dehors de π et égale à $\varphi(x) = \psi'(x)$, donc > 1 presque partout sur π. Il en résulte

$$\operatorname*{osc}_{\Delta} \psi_1(x) \geqq \int_{\Delta} \varphi_1(x)\, dx \geqq \text{mes}\, P > \Delta(1-\varepsilon).$$

Comme

$$\operatorname*{osc}_{\Delta} \psi_2(x) \leqq \operatorname*{osc}_{\Delta} \bar{\psi}_2(x) < \varepsilon\Delta$$

on voit que

$$\operatorname*{osc}_{\Delta} \psi(x) \geqq \Delta(1-2\varepsilon).$$

---

[47]) On sait qu'un point ξ est dit point de densité pour un ensemble π si, quel que soit ε, il existe un intervalle Δ contenant ξ et tel que la partie P de π contenue dans Δ vérifie l'inégalité mes $P > \Delta(1-\varepsilon)$.

Il en résulte finalement

$$\underset{\Delta}{\operatorname{osc}}\,\psi(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n}{\operatorname{osc}}\,\psi(x) \geqq \Delta(1-4\varepsilon),$$

et comme ε est aussi petit que l'on veut, on voit bien que $\Delta(1-4\varepsilon)$ est positif.

Cela posé considérons le segment $[m, M]$ situé sur l'axe OY, où m et M sont le minimum et le maximum de $\psi(x)$ sur Δ. Si m_n et M_n sont le minimum et le maximum de $\psi(x)$ sur δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ l'inégalité précédente montre que

$$(M-m) - \sum_{n=1}^{\infty}(M_n - m_n) \geqq \Delta(1-4\varepsilon) > 0.$$

Donc, si l'on enlève du segment $[m, M]$ tous les intervalles (m_n, M_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ on obtient un ensemble fermé de mesure *positive*. Soit F cet ensemble. Menons par chaque point η de F une parallèle à l'axe OX et soit x_η l'abscisse du premier point d'intersection de cette droite et de la courbe $y = \psi(x)$ contenu dans Δ. Soit enfin F' l'ensemble de tous ces points x_η; F' est évidemment fermé et mes $\mathsf{F}' > 0$, puisque $\psi(x)$ est absolument continue et l'ensemble des valeurs de $\psi(x)$ sur F' coïncide avec l'ensemble F, mes $\mathsf{F} > 0$.

En vertu de la construction même de F' on voit qu'il appartient à P et que $\psi(x)$ est monotone sur F'. En effet, si un point de F' n'appartenait pas à P, il appartiendrait à un δ_n, donc la valeur de $\psi(x)$ en ce point serait dans l'intervalle (m_n, M_n), donc n'appartiendrait pas à F. D'autre part, chaque point de F' est l'abscisse du *premier* point de Δ qui est point d'intersection d'une parallèle à l'axe OX et de la courbe $y = \psi(x)$. Cette courbe étant continue, il est évident que $\psi(x)$ est monotone sur F', ce qui achève la démonstration du lemme, et, donc, celle du théorème qui le précède.

Il suit immédiatement du théorème précédent qu'une fonction ridée ne peut pas être présentée dans la forme

$$F(x) = \psi\{f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)]\},$$

les fonctions ψ, f_i et φ_i étant absolument continues, puisque s'il en était ainsi il existerait des fonctions ridées qui sont des sommes de deux superpositions de fonctions absolument continues, et nous avons démontré que ceci est impossible.

17. Existence des fonctions ridées. — Il est temps de démontrer l'existence des fonctions ridées. A cet effet nous allons construire d'abord une courbe peanienne de la manière suivante.

Considérons le carré $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$. Enlevons du segment $[0, 1]$ de l'axe OX la partie centrale de longueur $\frac{1}{4}$, de chacun des deux segments qui restent enlevons la partie centrale de longueur $\frac{1}{4^2}, \ldots$, de chacun des 2^{n-1} segments qui restent après les $n-1$ premières opérations enlevons la partie centrale de longueur $\frac{1}{4^n}$ et ainsi de suite indéfiniment.

Nous obtenons ainsi sur le segment $[0, 1]$ de l'axe OX un ensemble parfait P, $\operatorname{mes} P = \frac{1}{2}$.

Elevons en chaque point de P une perpendiculaire jusqu'à la droite $y = 1$. Nous obtenons ainsi un ensemble parfait plan Q formé de segments de droites parallèles à l'axe OY; en a évidemment

$$\operatorname{mes} Q = \frac{1}{2}.$$

Les bandes contigues à Q ont pour bases les intervalles contigus δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de P.

Plaçons dans le segment qu'on obtient en ajoutant à δ_n ses extrémités un ensemble de Cantor[48]) P_n et élevons aux points de P_n des perpendiculaires à l'axe OX jusqu'à la droite $y = 1$. Nous obtenons un ensemble plan Q_n de mesure nulle. La réunion de tous les Q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ est encore un ensemble de mesure nulle et nous désignerons par $Q^{(1)}$ la somme de Q et de tous les Q_n

$$Q^{(1)} = Q + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n;$$

$Q^{(1)}$ est évidemment parfait.

Soient $\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \ldots, \delta_n^{(1)}, \ldots$ les bases des bandes contigues à $Q^{(1)}$. Plaçons dans le segment qu'on obtient en ajoutant à $\delta_n^{(1)}$ ses extrémités un ensemble $P_n^{(2)}$ de mesure $\frac{1}{2}\delta_n^{(1)}$ construit par rapport à $\delta_n^{(1)}$ comme on a construit P par rapport à $[0, 1]$. En chaque point de $P_n^{(2)}$ élevons une perpendiculaire à l'axe OX jusqu'à la droite $y = 1$; nous obtenons un ensemble parfait $Q_n^{(2)}$; la réunion de tous les $Q_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est un ensemble de mesure $\frac{1}{4}$; nous désignerons par $Q^{(2)}$ la somme

$$Q^{(2)} = Q^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(2)};$$

[48]) On sait qu'un ensemble de Cantor situé dans un segment $[a, b]$ est l'ensemble qu'on obtient en divisant $[a, b]$ en trois parties égales dont on enlève la seconde et en répétant la même opération sur les deux segments qui restent, puis sur les quatre segments qui restent et ainsi indéfiniment. On obtient ainsi un ensemble parfait de mesure nulle.

$Q^{(2)}$ est évidemment un ensemble parfait et

$$\operatorname{mes} Q^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Soient $\delta_1^{(2)}, \delta_2^{(2)}, \ldots, \delta_n^{(2)}, \ldots$ les bases des bandes contigues à $Q^{(2)}$. Plaçons dans chaque $\delta_n^{(2)}$, après lui avoir ajouté ses extrémités, un ensemble de Cantor $P_n^{(3)}$. Elevons une perpendiculaire à l'axe OX aux points de $P_n^{(3)}$ jusqu'à la droite $y=1$; nous aurons un ensemble parfait $Q_n^{(3)}$; la réunion de tous les $Q_n^{(3)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est un ensemble de mesure nulle, et nous posons

$$Q^{(3)} = Q^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(3)}.$$

Nous continuons indéfiniment ce procédé alterné. En supposant les ensembles $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(m)}$ déjà définis, pour obtenir l'ensemble $Q^{(m+1)}$ on prend les bases $\delta_1^{(m)}, \delta_2^{(m)}, \ldots, \delta_n^{(m)}, \ldots$ des bandes contigues à $Q^{(m)}$ et en ajoutant à ces intervalles leurs extrémités, on place dans les segments obtenus des ensembles parfaits $P_n^{(m+1)}$ qui sont, si m est pair, des ensembles de Cantor, et si m est impair, les $P_n^{(m+1)}$ sont construits par rapport aux $\delta_n^{(m)}$ comme P l'est par rapport à $[0, 1]$, donc $\operatorname{mes} P_n^{(m+1)} = \frac{1}{2} \delta_n^{(m)}$. On élève des perpendiculaires à l'axe OX aux points des $P_n^{(m+1)}$ et en les menant jusqu'à la droite $y=1$, on obtient des ensembles plans parfaits $Q_n^{(m+1)}$ qui sont de mesure nulle ou positive suivant que m est pair ou impair. On pose

$$Q^{(m+1)} = Q^{(m)} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(m+1)},$$

$Q^{(m+1)}$ est parfait. Il est aisé de voir que

$$\operatorname{mes} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(m)} = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}+1}} \qquad \text{pour } m \text{ pair,}$$

$$\operatorname{mes} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(m)} = 0 \qquad \text{pour } m \text{ impair,}$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{mes} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(m)} = \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{1}{2^{\frac{m}{2}+1}} = 1 \text{ [49]).}$$

Cela posé, nous allons construire une courbe péanienne de la manière suivante. Divisons le carré en trois bandes horizontales égales, que nous appellerons bandes horizontales *du premier ordre*. La bande centrale contigue à Q et les deux bandes qui restent quand on enlève cette bande du carré formeront trois bandes verticales que nous appellerons bandes

---

[49]) On indique par $\sum'$ le fait que la sommation ne s'étend qu'aux valeurs paires de m.

verticales *du premier ordre*. Les frontières de toutes les bandes horizontales et verticales forment un réseau de droites qui divisent le carré en neuf rectangles que nous appellerons rectangles *du premier ordre*. Nous les numérotons comme il est indiqué dans la fig. 1 et nous prenons pour la première approximation de la courbe peanienne la ligne brisée formée des diagonales de ces rectangles parcourues dans le sens indiqué dans la figure 1.

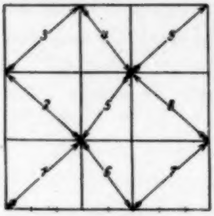


Fig. 1.

Divisons maintenant chaque bande horizontale en trois parties égales; nous obtiendrons neuf bandes horizontales *du second ordre*. D'autre part, dans la bande centrale verticale du premier ordre considérons la bande centrale contigue à $Q^{(1)}$ ainsi que les bandes qui y restent quand elle a été enlevée; et dans les bandes verticales gauche et droite du premier ordre considérons les plus grandes bandes contigues à Q qui y sont contenues ainsi que les bandes qui y restent après leur enlèvement. De cette manière chaque bande verticale du premier ordre sera divisée en trois bandes verticales que nous appellerons bandes verticales *du second ordre*.

Les frontières de toutes les bandes verticales et horizontales du second ordre forment un réseau de droites qui divise chaque rectangle du premier ordre en neuf rectangles *du second ordre*. Nous les numérotons de telle manière que chaque rectangle initial du second ordre se trouve dans l'un des angles du rectangle du premier ordre qui le contient, et d'ailleurs dans celui de ses angles d'où part la diagonale indiquée dans la fig. 1 de ce rectangle du premier ordre; de plus, le numérotage ira toujours de haut en bas ou de bas en haut mais jamais de gauche à droite ni de droite à gauche. Ainsi les rectangles du second ordre situés dans l'un des rectangles du premier ordre seront numérotés de l'une des quatre manières indiquées[50]) dans la fig. 2, où la forme 1 correspond aux rectangles 1, 3, 7 et 9 du premier ordre, la forme 2 aux rectangles 2 et 8, la forme 3 aux rectangles 4 et 6 et la forme 4 au rectangle 5.

3	4	9
2	5	8
1	6	7

forme 1

9	4	3
8	5	2
7	6	1

forme 2

1	6	7
2	5	8
3	4	9

forme 3

7	6	1
8	5	2
9	4	3

forme 4

Fig. 2.

---

[50]) Dans cette figure nous ne conservons pas les proportions des longueurs; elles indiquent seulement le sens du numérotage.

La seconde approximation de la courbe péanienne sera une ligne brisée formée des diagonales des rectangles du second ordre parcourues dans le sens de leur numérotage et de celui du numérotage des rectangles du premier ordre. La manière de faire ce numérotage prouve que cette ligne brisée sera continue.

D'une manière générale, supposons que l'on a déjà défini les bandes horizontales et verticales d'ordre n et les 9^n rectangles d'ordre n, qu'ils sont numérotés et que nous connaissons la n-ième approximation de la courbe peanienne: c'est une ligne continue brisée formée des diagonales des rectangles du n-ième ordre parcourus dans le sens de leur numérotage Divisons chaque bande horizontale d'ordre n en trois bandes égales que nous appellerons bandes horizontales d'ordre $n+1$. Soit λ une bande verticale d'ordre n. Désignons par λ' la bande verticale d'ordre $n-1$ qui contient λ. Deux cas seulement sont possibles. *Dans le premier cas* λ est la bande centrale de λ'. Dans ce cas elle est une bande contigue à un certain ensemble $Q^{(\nu)}$. Nous considérons la plus grande bande de $Q^{(\nu+1)}$ contenue dans λ et les bandes qui restent dans λ quand elle a été enlevée; λ est ainsi divisée en trois bandes verticales, nous les appellerons bandes verticales d'ordre $n+1$. *Dans le second cas* λ est la bande gauche ou droite dans λ'. Dans ce cas, le bande centrale de λ' est une bande contigue à un certain ensemble $Q^{(\nu)}$. Nous considérons la plus grande bande contigue à $Q^{(\nu)}$ contenue dans λ et les bandes qui y restent quand elle a été enlevée. Cette fois encore λ est divisée en trois bandes verticales d'ordre $n+1$.

Ainsi dans tous les cas chaque bande horizontale et verticale d'ordre n est divisée en trois bandes d'ordre $n+1$. Les frontières de toutes ces bandes forment un réseau de droites qui divise chaque rectangle d'ordre n en 9 rectangles d'ordre $n+1$. Nous les numérötons encore de telle manière que dans chaque rectangle d'ordre n le rectangle d'ordre $n+1$ initial se trouve à l'angle d'où part la diagonale du rectangle d'ordre n, et que le numérotage soit toujours vertical. On obtiendra encore seulement l'une des quatre formes de la figure 2. Nous prendrons pour la $(n+1)$-ième approximation de la courbe peanienne la ligne brisée formée des diagonales des rectangles d'ordre $n+1$ parcourus suivant le sens de leur numérotage et de celui des rectangles d'ordre n.

Prenons maintenant le segment $[0, 1]$ sur un axe nouveau OT, nous divisons ce segment, tout d'abord, en 9 parties de telle manière que la longueur du segment d'indice k (en les numérotant de gauche à droite, $1 \leq k \leq 9$) soit égale à l'aire du rectangle du premier ordre d'indice k. Nous divisons ensuite chacun de ces segments du premier ordre en 9 segments du second ordre de telle manière qu'en les numérotant de gauche

à droite le segment d'indice i placé dans un segment d'indice k ait une longueur égale à celle de l'aire du rectangle d'indice i du second ordre placé dans le rectangle d'indice k du premier ordre $(1 \leqq i \leqq 9,\ 1 \leqq k \leqq 9)$.

D'une manière générale, pour n quelconque, le segment $[0, 1]$ de l'axe OT sera divisé en 9^n segments et la longueur du segment d'ordre n d'indice i_n contenu dans le segment d'ordre $(n-1)$ d'indice $i_{n-1}, \ldots$ contenu dans le segment d'indice i_1 d'ordre 1 sera égale à l'aire du rectangle d'ordre n et ayant les mêmes indices.

On voit bien que la ligne brisée d'ordre n établit une correspondance entre les rectangles et les segments aux mêmes indices et qu'en passant à la limite pour n infini on obtient une courbe de Peano. Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de cette courbe. *Nous allons démontrer que $\psi(t)$ est une fonction ridée.*

A cet effet remarquons d'abord que, quel que soit l'ensemble parfait P_0 situé sur le segment $[0, 1]$ de l'axe OT, mes $P_0 > 0$, la courbe peanienne lui fait correspondre dans le carré un ensemble parfait $\overline{P}_0$ *de la même mesure*, donc de mesure positive. Ceci résulte de la construction des segments d'ordre n; leurs longueurs sont égales aux aires des rectangles correspondants. Donc mes $\overline{P}_0 > 0$.

On sait que

$$\operatorname{mes} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(m)} = 1;$$

donc l'ensemble des points n'appartenant à aucun des $Q_n^{(m)}$ est de mesure nulle; il en résulte que la partie commune à $\overline{P}_0$ et à l'un au moins des $Q_n^{(m)}$ est de mesure positive. Soit $Q_{n'}^{m'}$ l'un de ces ensembles, donc

$$\operatorname{mes}(Q_{n'}^{m'} \cdot \overline{P}_0) > 0.$$

Il en résulte que l'une au moins des $9^{m'}$ parties en lesquelles $Q_{n'}^{m'} \cdot \overline{P}_0$ est divisé par les rectangles d'ordre m' est encore de mesure positive; soit H cette partie.

Or, on sait que si un ensemble plan est de mesure positive, quelle que soit la direction choisie, parmi toutes les droites parallèles et ayant cette direction il en existe une infinité non dénombrable telles que les intersections de ces droites avec l'ensemble donné sont des ensembles de mesure *positive*. Donc, en particulier, il existe une infinité non dénombrable de droites verticales qui coupent H en des ensembles de mesure positive. Comme il n'y a qu'une infinité dénombrable de droites frontières aux bandes contigues à $Q_{n'}^{m'}$, nous pouvons, sans restreindre la généralité, ne considérer que les droites qui ne sont pas frontières aux bandes contigues à $Q_{n'}^{m'}$. Sur chacune

de ces droites il n'existe qu'une infinité dénombrable de points dont la coordonnée y est telle que l'équation $y = \psi(t)$ a plus d'une racine. Ces points étant exclus, il correspondra à chaque ensemble situé sur une telle droite verticale un ensemble bien déterminé sur l'axe OT. Mais nous avons vu qu'il existe une infinité non dénombrable de droites verticales qui coupent H en des ensembles de mesure positive. D'autre part, il ne peut exister qu'une infinité dénombrable au plus d'ensembles de mesure positive et n'empiétant pas sur le segment $[0, 1]$ de l'axe OT. Il en résulte qu'il existe sur ce segment des ensembles de mesure nulle auxquels correspondent des ensembles de mesure positive appartenant à H. D'après la définition même de H, ces ensembles seront situés dans P_0.

Nous arrivons à la conclusion suivante: ***quel que soit l'ensemble parfait*** P_0, mes $P_0 > 0$, ***situé sur le segment*** $[0, 1]$ ***de l'axe*** OT, ***il existe un ensemble parfait*** π_0 ***contenu dans*** P_0, mes $\pi_0 = 0$ ***et tel que*** mes $\psi(\pi_0) > 0$. Il reste à démontrer que $\psi(t)$ est ***monotone sur*** π_0.

A cet effet remarquons que d'après la définition même de π_0, l'ensemble $\psi(\pi_0) = \bar{\pi}_0$ est situé sur une droite verticale appartenant à l'ensemble $Q_n^{m'}$ et d'ailleurs sur une partie de cette droite contenue dans un seul rectangle d'ordre m'. Dans ce rectangle d'ordre m' le numérotage des rectangles d'ordre $m' + 1$ aura l'une des quatre formes de la fig. 2. Pour préciser la forme du numérotage dans le cas qui nous intéresse faisons la remarque suivante.

Quel que soit n, chaque rectangle d'ordre n est divisé en trois bandes verticales dont chacune contient trois rectangles d'ordre $(n + 1)$. Nous dirons, pour abréger, qu'une telle bande verticale est „croissante" (ou „décroissante") si le numérotage des rectangles d'ordre $n + 1$ contenus dans la bande va de bas en haut (resp. de haut en bas). Ainsi dans les rectangles où le numérotage a les formes 1 et 2 les bandes frontières sont croissantes tandis que la bande centrale est décroissante, et c'est le contraire pour les formes 3 et 4. Remarquons d'ailleurs, que si un rectangle d'ordre $n + 1$ appartient à une bande croissante (décroissante), le numérotage des rectangles d'ordre $n + 2$ qui lui appartiennent sera de la forme 1 ou 2 (resp. 3 ou 4).

Cela posé, remarquons que, d'après sa définition même et la remarque faite, toutes les droites de Q appartiennent à des bandes croissantes; les droites des $Q_n^{(1)}$ à des bandes décroissantes, etc. D'une manière générale, les droites des $Q_n^{(m)}$ appartiennent à des bandes croissantes ou décroissantes suivant que m est pair ou impair.

Or, comme tous les $Q_n^{(m)}$ pour m impair sont de mesure nulle, et mes $Q_n^{m'} > 0$, il en résulte que m' est pair, donc toutes les droites de $Q_n^{m'}$ appartiennent à des bandes ***croissantes***.

Donc, y_1 et y_2 étant deux points de $\bar{\pi}_0$, comme $\bar{\pi}_0$ appartient à $Q_{n'}^{m'}$, y_1 et y_2 sont situés dans une bande croissante du rectangle d'ordre m' qui contient $\bar{\pi}_0$. Supposons $y_1 < y_2$. Si ces points sont dans deux rectangles différents d'ordre $m'+1$, on voit de suite que pour les valeurs correspondantes de t on aura $t_1 < t_2$. Si y_1 et y_2 se trouvent dans un même rectangle d'ordre $m'+1$, il y aura pourtant un certain k, tel que y_1 et y_2 se trouvent dans deux rectangles différents d'ordre $m'+k$. Mais dans ce cas ils se trouveront encore dans une bande croissante, donc on aura $t_1 < t_2$ et l'on voit ainsi que $\psi(t)$ croît sur π_0.

Ainsi sur chaque ensemble de mesure positive sur le segment $(0, 1)$ de l'axe OT il existe un ensemble de mesure nulle où $\psi(t)$ croît et a un ensemble de valeurs de mesure positive. Ceci prouve que $\psi(t)$ est une fonction *ridée*, c. q. f. d.

(Eingegangen am 18. 10. 1929.)

Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen.

Von

Franz Rellich in Göttingen.

Einleitung.

In dieser Arbeit wird die Lösung der allgemeinen linearen hyperbolischen Differentialgleichung n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen explizite durch die Werte dargestellt, die sie und ihre Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung auf einer (nirgends charakteristischen) Anfangskurve annehmen.

Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung wird diese Aufgabe durch die sogenannte Riemannsche Integrationsmethode gelöst. Die Verallgemeinerung der Riemannschen Methode auf Differentialgleichungen höherer Ordnung wurde meines Wissens bisher nur von Et. Delassus [1]) in besonders einfachen Fällen unternommen. Für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gibt G. Herglotz [2]) explizite Auflösungsformeln.

Die zugrunde gelegte Differentialgleichung soll hyperbolisch in dem Sinne sein, daß alle Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung reell und einfach sind. Daß jede solche Differentialgleichung eine Lösung besitzt, die samt ihren Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung auf einer An-

---

[1]) Ann. ec. norm. (3) 12 (1895) Suppl. Vgl. auch C. R. 117 (1893), S. 510. Delassus betrachtet jedoch sehr spezielle Differentialgleichungen, bei denen insbesondere nur zwei verschiedene Charakteristiken auftreten.

Die von verschiedenen Mathematikern, insbesondere Hadamard herrührenden Untersuchungen über hyperbolische Differentialgleichungen gehen in eine andere Richtung; dort handelt es sich um Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung mit *mehr als zwei* Variablen.

[2]) G. Herglotz, „Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten I, II, III", Sächs. Akad. 1926, 1928.

fangskurve vorgeschriebene Werte annimmt, wird als bewiesen vorausgesetzt [8]).

Der Gedankengang der Arbeit ist folgender: In Analogie zur Riemannschen Methode bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden durch den Punkt P, in dem die Lösung $u(x, y)$ dargestellt werden soll, die n charakteristischen Linien der Differentialgleichung gezogen und mit der Anfangskurve zum Schnitt gebracht. Über das von den beiden äußersten Charakteristiken (in Fig. 1 $\widehat{PP_1}$ und $\widehat{PP_n}$) und der Anfangskurve A begrenzte Gebiet wird die mit einer zunächst willkürlichen Funktion v — der „Riemannschen Funktion" — multiplizierte Differentialgleichung integriert; auf das so entstandene Gebietsintegral wird eine Greensche Formel angewendet.

Fig. 1.

Es wäre nun entsprechend dem Falle einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Versuch naheliegend, für v eine Funktion zu wählen, die im Innern des „Dreiecks" P_1PP_n der zur ursprünglichen Differentialgleichung adjungierten Differentialgleichung genügt und die auf $\widehat{PP_1}$ bzw. $\widehat{PP_n}$ solche Werte annimmt, daß die in der Greenschen Formel auftretenden Integrale über diese Linien als Integranden eine totale Ableitung nach der Bogenlänge der betreffenden Integrationskurve besitzen und so die gesuchte Funktion u im Punkte P isoliert liefern. Der letzten Forderung würde man dadurch zu genügen haben, daß man für v und seine Ableitungen bis zur $(n-2)$-ten Ordnung auf $\widehat{PP_1}$ und $\widehat{PP_n}$ und ebenso im Punkte P selbst bestimmte, von den Koeffizienten der Differentialgleichung abhängende Werte vorschreibt. Dieser Versuch scheitert aber daran, daß die Bedingungen, welchen v und seine Ableitungen auf Grund dieser Forderungen im Punkte P genügen müßten, ein überbestimmtes Gleichungssystem darstellen, das jedenfalls nicht befriedigt werden kann, wenn man verlangt, die Randwerte von v auf PP_1 bzw. PP_n sollen samt ihren Ableitungen bis zur $(n-2)$-ten Ordnung im Punkte P stetig sein. Dies muß man aber verlangen, da man eine n-mal stetig differenzierbare zu diesen Randwerten gehörige Lösung der adjungierten Differentialgleichung benötigt.

Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, werden wir v und seinen Ableitungen *längs der mittleren Charakteristiken* $\widehat{PP_2}, \widehat{PP_3}, \ldots, \widehat{PP_{n-1}}$ *sprunghafte Unstetigkeiten gestatten.*

---

[8]) Dieser Existenzsatz folgt sogar für nicht lineare Differentialgleichungen aus der Arbeit von K. Friedrichs und H. Lewy, „Das Anfangswertproblem einer beliebigen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung ...". Math. Annalen **99** (1929), S. 200.

In dem Randintegral der Greenschen Formel werden so zu den Integralen über die Anfangskurve und den beiden äußersten Charakteristiken allerdings auch noch Integrale über die mittleren Charakteristiken hinzukommen, in deren Integranden statt v die Sprünge der Funktion v auftreten. Man hat nun v auf den beiden äußersten Charakteristiken bzw. die Sprünge von v auf den mittleren Charakteristiken so vorzuschreiben, daß in der Greenschen Formel von unbekannten Größen nur die Funktion u im Punkte P, multipliziert mit einem nicht verschwindenden Faktor, stehenbleibt.

Es zeigt sich, daß man dies erzielen kann, indem man für v eine Lösung der adjungierten Differentialgleichung wählt, die samt ihren Ableitungen bis zur einschließlich $(n-3)$-ten Ordnung auf den beiden äußersten Charakteristiken verschwindet und deren Sprünge samt den Sprüngen der Ableitungen bis zur $(n-3)$-ten Ordnung auf den mittleren Charakteristiken Null sind; jedoch sind für die Ableitungen $(n-2)$-ter Ordnung auf den äußeren Charakteristiken bzw. für die Sprünge der Ableitungen $(n-2)$-ter Ordnung auf den mittleren Charakteristiken bestimmte Werte vorzuschreiben, die sich als Lösung von gewissen homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung längs der betreffenden Charakteristik ergeben.

Diese so vorgeschriebenen Werte der $(n-2)$-ten Ableitungen bzw. deren Sprünge hängen übrigens nicht von allen Koeffizienten der Differentialgleichung ab, sondern nur von den Koeffizienten der Ableitungen n-ter und $(n-1)$-ter Ordnung.

Für eine solche Funktion v läßt sich ein Existenzbeweis erbringen. Dazu wird zunächst (in § 6) die Lösung einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung in einem von zwei charakteristischen Linien gebildeten Winkelraum betrachtet, wobei die Anfangswerte auf diesen charakteristischen Linien vorgegeben werden. Ich zeige an einem Beispiel, daß es zur eindeutigen Bestimmung der Lösung dieses Anfangswertproblems wesentlich ist, wie viele Charakteristiken es gibt, welche in dem Winkelraum, in dem die Lösung bestimmt werden soll, verlaufen und durch den Scheitel dieses Winkelraums hindurchgehen. *Je mehr solche Charakteristiken es gibt* — im äußersten Falle sind es $n-2$ —, *für desto mehr Ableitungen* kann man auf dem Rand des Winkelraums die Werte willkürlich vorschreiben.

Nach diesen orientierenden Überlegungen wird in § 7, § 12 der Existenzbeweis für die bei der Riemannschen Methode benötigte Funktion v erbracht; dabei wird die Methode der sukzessiven Approximation verwendet.

Der bequemen Lesbarkeit wegen werden die Überlegungen zunächst nur an der allgemeinen Differentialgleichung dritter Ordnung durchgeführt. Für die Differentialgleichung n-ter Ordnung formuliere ich die entsprechenden

Sätze ausführlich, während ich die triviale Übertragung der Beweise nur in knapper Form bringe.

Die Endformeln sind in einer vom übrigen Text unabhängig verständlichen Weise zusammengestellt; für den Fall $n = 3$ in § 5, für den allgemeinen Fall in § 10.

Herrn Hans Lewy möchte ich für eine Reihe wertvoller Ratschläge zu dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank aussprechen.

A. Differentialgleichungen dritter Ordnung.

§ 1.

Vorbemerkungen.

1. Abkürzungen.

Im folgenden laufen die Indizes i, k, l von 1 bis 2. An eine Klammer angehängt bedeuten sie Differentiation nach x bzw. nach y, sonst haben sie die Bedeutung gewöhnlicher Indizes. Über doppelt auftretende Indizes ist von 1 bis 2 zu summieren. Für griechische Indizes, etwa σ, sollen diese Bestimmungen nicht gelten. Es ist z. B.

$$a_{ikl}(u)_{ikl} = a_{111}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (a_{112} + a_{121} + a_{211})\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$$
$$+ (a_{122} + a_{212} + a_{221})\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + a_{222}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}.$$

2. Hyperbolischer Charakter und charakteristische Linien.

Die allgemeinste lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung läßt sich mit der genannten Symbolik in der Gestalt

$$(1) \qquad L_3(u) = a_{ikl}(u)_{ikl} + b_{ik}(u)_{ik} + c_i(u)_i + du = 0$$

schreiben, wobei die Koeffizienten a bis d bekannte Funktionen von x und y sind; da $(u)_{ikl}$ (bzw. $(u)_{ik}$) bei Vertauschung der Indizes in sich übergeht, darf man annehmen, daß dies auch für die Koeffizienten a_{ikl} (bzw. b_{ik}) gilt. Die Differentialgleichung heißt *hyperbolisch*, wenn die zu den Gliedern höchster Ordnung gehörige Form

$$a_{ikl}\xi_i\xi_k\xi_l$$

in drei *verschiedene reelle* Linearfaktoren zerfällt:

$$(2) \qquad a_{ikl}\xi_i\xi_k\xi_l = \prod_{j=1}^{3}(p^j\xi_1 + q^j\xi_2),$$

$$(2\text{a}) \qquad p^j, q^j \text{ reell}, \quad \begin{vmatrix} p^j & q^j \\ p^i & q^i \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Nach (2a) ist nirgends $p^j = q^j = 0$, also darf $(p^j)^2 + (q^j)^2 = 1$ angenommen werden, da man sonst die Differentialgleichung $L_3(u) = 0$ durch einen geeigneten nicht verschwindenden Faktor dividieren könnte.

Von den Koeffizienten der Differentialgleichung (1) setzen wir in einem gewissen Gebiet dreimalige stetige Differenzierbarkeit nach x und y voraus. Dann sind (wegen (2a) und der Normierung $(p^j)^2 + (q^j)^2 = 1$) auch die Funktionen p^j, q^j dreimal stetig nach x und y differenzierbar.

Diejenigen Linien $\varphi^\sigma(x, y) =$ konst. $(\sigma = 1, 2, 3)$, für die nirgends $\left(\frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial y}\right)^2 = 0$ ist und für die

$$p^\sigma \frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial x} + q^\sigma \frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

gilt, heißen die *Charakteristiken* der Differentialgleichung. Da für $i \neq j$ nach Voraussetzung $p^i q^j - p^j q^i \neq 0$ ist, können sich zwei Charakteristiken, die verschiedenen Scharen (d. h. verschiedenen Indizes σ) angehören, in keinem Punkt berühren.

Nennt man s_σ die Bogenlänge auf der Kurve $\varphi^\sigma =$ konst., so wird

$$\frac{\partial}{\partial s_\sigma} = \frac{\partial x}{\partial s_\sigma}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s_\sigma}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Aus (3) und der Relation $(p^\sigma)^2 + (q^\sigma)^2 = 1$ folgt

$$\frac{\partial x}{\partial s_\sigma} = p^\sigma, \qquad \frac{\partial y}{\partial s_\sigma} = q^\sigma, \tag{4}$$

also

$$\frac{\partial}{\partial s_\sigma} = p^\sigma \frac{\partial}{\partial x} + q^\sigma \frac{\partial}{\partial y}. \text{ [4]} \tag{5}$$

Bezeichnet $\frac{\partial}{\partial \nu_\sigma}$ die Differentiation nach der Normalenrichtung von $\varphi^\sigma =$ konst., so wird für passende Wahl der Normalenrichtung

$$\frac{\partial x}{\partial \nu_\sigma} = \frac{\partial y}{\partial s_\sigma}; \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_\sigma} = -\frac{\partial x}{\partial s_\sigma}. \tag{6}$$

Es gelten also die Formeln

$$\frac{\partial x}{\partial s_\sigma} = p^\sigma, \quad \frac{\partial y}{\partial s_\sigma} = q^\sigma; \quad \frac{\partial x}{\partial \nu_\sigma} = q^\sigma, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_\sigma} = -p^\sigma. \tag{7}$$

3. Drei Hilfssätze.

1. Hilfssatz. *Bedeutet $w^\sigma(x, y)$ eine längs $\varphi^\sigma =$ konst. verschwindende Funktion, so läßt sich der Ausdruck*[5] $a_{ikl}(u)_i \frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma}(w^\sigma)_l$ *umschreiben*

[4]) Bei beliebiger Richtung der Bogenlänge gelten diese Formeln unter Umständen erst, wenn man p^σ, q^σ durch $-p^\sigma, -q^\sigma$ ersetzt.

[5]) Zu den Bezeichnungen vgl. die beiden vorangehenden Nummern, insbesondere die Formeln (7).

in einen Ausdruck, der die Ableitungen von u nur in der Kombination $p^\sigma u_x + q^\sigma u_y = \frac{\partial u}{\partial s_\sigma}$ *enthält. In Formeln: Es gilt längs* $\varphi^\sigma =$ *konst. die Identität*

$$a_{ikl}(u)_i \frac{\partial x_k}{\partial v_\sigma}(w^\sigma)_l = \frac{\partial u}{\partial s_\sigma} \cdot a_{ikl}(w^\sigma)_l \frac{\partial x_k}{\partial v_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}. \tag{8}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\sigma = 1$. Aus (2) folgt durch „Polarisation", d. h. durch Ersetzung der beiden Variablen ξ_1 und ξ_2 durch die sechs Variablen ξ_1^j, ξ_2^j $(j = 1, 2, 3)$ die Identität

$$3!\, a_{ikl}\, \xi_i^1 \xi_k^2 \xi_l^3 = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \prod_{j=1}^{3} (p^{\alpha_j} \xi_1^j + q^{\alpha_j} \xi_2^j), \tag{9}$$

in der $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eine beliebige Permutation der Zahlen 1, 2, 3 ist und das Summenzeichen die Summation über die verschiedenen Permutationen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bedeutet.

Wendet man (9) an für $\xi_1^1 = u_x$, $\xi_2^1 = u_y$; $\xi_1^2 = w_x^1$, $\xi_2^2 = w_y^1$; $\xi_1^3 = \frac{\partial x}{\partial v_1}$, $\xi_2^3 = \frac{\partial y}{\partial v_1}$, so erhält man

$$\begin{aligned} &3!\, a_{ikl}(u)_i (w^1)_l \frac{\partial x_k}{\partial v_1} \\ &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} (p^{\alpha_1} u_x + q^{\alpha_1} u_y)(p^{\alpha_2} w_x^1 + q^{\alpha_2} w_y^1)\left(p^{\alpha_3} \frac{\partial x}{\partial v_1} + q^{\alpha_3} \frac{\partial y}{\partial v_1}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Berücksichtigt man, daß auf $\varphi^1 =$ konst.

$$p^1 \frac{\partial x}{\partial v_1} + q^1 \frac{\partial y}{\partial v_1} = 0 \quad \text{und} \quad p^1 w_x^1 + q^1 w_y^1 = 0$$

ist, so wird aus (10):

$$\begin{aligned} 3!\, a_{ikl}(u)_i (w^1)_l \frac{\partial x_k}{\partial v_1} = (p^1 u_x + q^1 u_y)\Big[&\left(p^2 \frac{\partial x}{\partial v_1} + q^2 \frac{\partial y}{\partial v_1}\right)(p^3 w_x^1 + q^3 w_y^1) \\ &+ \left(p^3 \frac{\partial x}{\partial v_1} + q^3 \frac{\partial y}{\partial v_1}\right)(p^2 w_x^1 + q^2 w_y^1)\Big]. \end{aligned} \tag{11}$$

Ersetzt man in Gleichung (9) ξ_1^1 durch $p^1 = \frac{\partial x}{\partial s_1}$ und ξ_2^1 durch $q^1 = \frac{\partial y}{\partial s_1}$ $\left(\text{d. h. ersetzt man in (11) } u_x \text{ durch } \frac{\partial x}{\partial s_1} \text{ und } u_y \text{ durch } \frac{\partial y}{\partial s_1}\right)$ und gibt den übrigen Variablen dieselbe Bedeutung wie eben, so wird wegen $(p^1)^2 + (q^1)^2 = 1$

$$\begin{aligned} 3!\, a_{ikl}(w^1)_l \frac{\partial x_i}{\partial s_1} \frac{\partial x_k}{\partial v_1} = &\left(p^2 \frac{\partial x}{\partial v_1} + q^2 \frac{\partial y}{\partial v_1}\right)(p^3 w_x^1 + q^3 w_y^1) \\ &+ \left(p^3 \frac{\partial x}{\partial v_1} + q^3 \frac{\partial y}{\partial v_1}\right)(p^2 w_x^1 + q^2 w_y^1) \end{aligned} \tag{12}$$

und daher nach (11)

$$a_{ikl}(u)_i (w^1)_l \frac{\partial x_k}{\partial v_1} = (p^1 u_x + q^1 u_y)\, a_{ikl}(w^1)_l \frac{\partial x_i}{\partial s_1} \frac{\partial x_k}{\partial v_1}.$$

Damit ist wegen $p^1 u_x + q^1 u_y = \frac{\partial u}{\partial s_1}$ der Hilfssatz bewiesen.

2. Hilfssatz. *Es sei wieder $w^\sigma(x, y)$ auf $\varphi^\sigma = $ konst. gleich Null. Dann läßt sich der Ausdruck $a_{ikl}(w^\sigma)_{lk}\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma}$ längs $\varphi^\sigma = $ konst. bis auf einen Differentialausdruck erster Ordnung in w^σ als totale Ableitung nach der Bogenlänge s_σ von $\varphi^\sigma = $ konst. eines Differentialausdruckes erster Ordnung in w^σ schreiben. In Formeln: Es gilt längs $\varphi^\sigma = $ konst. die Identität*

$$(13)\qquad a_{ikl}(w^\sigma)_{lk}\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} = 2\frac{\partial}{\partial s_\sigma}\left(a_{ikl}(w^\sigma)_l\frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma}\right) - 2\frac{\partial}{\partial s_\sigma}\left(a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma}\right)(w^\sigma)_l.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\sigma = 1$. Setzt man in (9) $\xi_i^1 = \frac{\partial x_i}{\partial \nu_1}$, $\xi_k^2 = \xi_k$, $\xi_l^3 = \xi_l$ und berücksichtigt $p^1\frac{\partial x}{\partial \nu_1} + q^1\frac{\partial y}{\partial \nu_1} = 0$, so ergibt sich

$$(14)\qquad a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial \nu_1}\xi_l\xi_k = \frac{2}{3!}(p^1\xi_1 + q^1\xi_2)$$
$$\times\left[\left(p^2\frac{\partial x}{\partial \nu_1} + q^2\frac{\partial y}{\partial \nu_1}\right)(p^3\xi_1 + q^3\xi_2) + \left(p^3\frac{\partial x}{\partial \nu_1} + q^3\frac{\partial y}{\partial \nu_1}\right)(p^2\xi_1 + q^2\xi_2)\right].$$

Ersetzt man auf beiden Seiten dieser Gleichung ξ_l durch $\frac{\partial}{\partial x_l}$ und wendet die beiden so entstehenden Operatoren auf w^1 an, so ergeben sich zwei Differentialausdrücke in w^1, die in den Gliedern höchster Ordnung, nämlich in den Ableitungen zweiter Ordnung von w^1 wegen (14) übereinstimmen. Der auf der rechten Seite entstandene Differentialausdruck ist wegen der längs $\varphi^1 = $ konst. gültigen Identität (12) gleich

$$2\frac{\partial}{\partial s_1}\left(a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial s_1}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_1}(w^1)_l\right),$$

also seine Glieder höchster Ordnung gleich

$$2\frac{\partial}{\partial s_1}\left(a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial s_1}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_1}(w^1)_l\right) - 2\frac{\partial}{\partial s_1}\left(a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial s_1}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_1}\right)(w^1)_l.$$

Der auf der linken Seite entstandene Differentialausdruck besteht nur aus Ableitungen zweiter Ordnung; er ist nämlich gleich $a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial \nu_1}(w^1)_{lk}$.

Es ergibt sich also

$$a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial \nu_1}(w^1)_{lk} = 2\frac{\partial}{\partial s_1}\left(a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial s_1}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_1}(w^1)_l\right) - 2\frac{\partial}{\partial s_1}\left(a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial s_1}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_1}\right)(w^1)_l,$$

womit die Behauptung für $\sigma = 1$ und damit für beliebiges σ bewiesen ist.

3. Hilfssatz. *Verschwindet $w^\sigma(x, y)$ längs $\varphi^\sigma = $ konst., so läßt sich w_x^σ und w_y^σ linear durch den Differentialausdruck $a_{ikl}(w^\sigma)_l\frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma}$*

darstellen; in Formeln: Es ist längs $\varphi^\sigma = konst.$

$$\text{(15)}\qquad \begin{aligned} w_y^\sigma &= \frac{-3p^\sigma}{\prod\limits_{j=1}^{3}{}'(p^\sigma q^j - q^\sigma p^j)} a_{ikl}(w^\sigma)_l \frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_k}{\partial v_\sigma}, \\ w_x^\sigma &= \frac{3q^\sigma}{\prod\limits_{j=1}^{3}{}'(p^\sigma q^j - q^\sigma p^j)} a_{ikl}(w^\sigma)_l \frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_k}{\partial v_\sigma}. \end{aligned}$$

(Der Strich am Produktzeichen bedeutet, der Faktor mit $j = \sigma$ ist wegzulassen.)

Diese Formeln sind zunächst sinnvoll, da die auftretenden Nenner nach Voraussetzung (siehe (2a) auf S. 252) nicht verschwinden. Ihr Beweis ergibt sich unmittelbar aus Formel (12) unter Benutzung der Abkürzungen (7) und der Beziehung $p^\sigma w_x^\sigma + q^\sigma w_y^\sigma = 0$.

§ 2.

Die Greensche Formel.

Es sei mit den Bezeichnungen des § 1

$$\text{(1)}\qquad L_3(u) = a_{ikl}(u)_{ikl} + b_{ik}(u)_{ik} + c_i(u)_i + du.$$

Der zu $L_3(u)$ adjungierte Differentialausdruck lautet

$$\text{(1a)}\qquad M_3(v) = (-1)^3(a_{ikl}v)_{ikl} + (b_{ik}v)_{ki} - (c_i v)_i + dv.$$

Für ein beliebiges x, y-Gebiet G mit dem Rand Γ gilt dann die übliche *Greensche Formel*:

$$\text{(16)}\qquad \begin{aligned} &\iint\limits_G (v L_3(u) - u M_3(v))\, dx\, dy \\ &= \oint\limits_\Gamma \begin{pmatrix} a_{ikl}(u)_{ik} v \frac{\partial x_l}{\partial \nu} - (a_{ikl}v)_l (u)_i \frac{\partial x_k}{\partial \nu} + (a_{ikl}v)_{lk} u \frac{\partial x_i}{\partial \nu} \\ + b_{ik}(u)_i v \frac{\partial x_k}{\partial \nu} - (b_{ik}v)_k u \frac{\partial x_i}{\partial \nu} + c_i u v \frac{\partial x_i}{\partial \nu} \end{pmatrix} |ds|, \end{aligned}$$

wenn s die Bogenlänge auf Γ und $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Differentiation nach der äußeren Normalen bedeutet.

Wenn ein Stück der Randkurve Γ von einer charakteristischen Linie gebildet wird, so läßt der Integrand des Integrals über Γ längs dieses Stückes noch weitere Umformungen zu, die für die Anwendbarkeit der Riemannschen Methode wesentlich sind. Diese Umformungen beziehen sich auf die Glieder mit den Koeffizienten a_{ikl} und sind als Hilfssatz 1 und 2 in § 1 genau formuliert. Im nächsten Paragraphen wird darauf ausführlich eingegangen.

§ 3.

Die Riemannsche Methode.

Es sei $u(x, y)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$L_3(u) = a_{ikl}(u)_{ikl} + b_{ik}(u)_{ik} + (c_i u)_i + du = 0,$$

die auf einer Anfangskurve A samt ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung vorgegebene Werte annimmt; A besitze eine stetige Tangente, deren Richtung nirgends mit einer der drei charakteristischen Richtungen zusammenfällt.

Um zu einer expliziten Darstellung der Funktion $u(x, y)$ in einem beliebigen Punkt P (s. Fig. 2) einer passend gewählten und hinreichend kleinen Umgebung eines endlichen Stückes der Anfangskurve zu gelangen, werden durch P die Charakteristiken C_1, C_2, C_3 gezogen, welche A in P_1, P_2, P_3 treffen mögen[*]); die Anordnung dieser Punkte sei so wie in der Fig. 2 angegeben. Die Numerierung der Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial s_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, 3, \ldots)$ (siehe Formel (5)) denken wir uns von vornherein so gewählt, daß $\frac{\partial}{\partial s_\sigma}$ die Differentiation nach der Bogenlänge von C_σ ist.

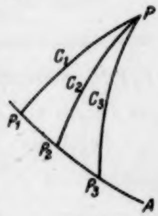


Fig. 2.

Auf das von A, C_1 und C_3 berandete Gebiet wird die Greensche Formel (16) angewandt. Dabei soll v eine vorläufig noch nicht näher festgelegte Lösung der zu $L_3(u) = 0$ adjungierten Differentialgleichung $M_3(v) = 0$ sein. Es wird jedoch nur vorausgesetzt, daß v in den einzelnen Gebieten P_1PP_2 und P_2PP_3 samt Rand stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung besitzt. Längs C_2 aber sollen v und seine Ableitungen sprunghafte Unstetigkeiten erleiden dürfen; im folgenden wird deshalb die Funktion v in P_1PP_2 mit v^1 bzw. in P_2PP_3 mit v^2 bezeichnet.

In dem Randintegral der Greenschen Formel tritt daher außer den Integralen über A, C_1 und C_3 auch noch ein Integral über C_2 auf, in dessen Integrand die Differenz $v^2 - v^1$ und deren Ableitungen eingehen.

Wir machen bereits an dieser Stelle den Ansatz, daß v^1 längs C_1, daß v^2 längs C_3 und daß $v^2 - v^1$ längs C_2 identisch verschwindet. Es sei jedoch bemerkt, daß sich dieses Verhalten zwangsläufig ergibt, sobald man fordert, $u(x, y)$ im Punkte P aus der Greenschen Formel isoliert zu erhalten.

---

[*]) Daß diese Konstruktion für jeden Punkt einer geeigneten Umgebung der Anfangskurve möglich ist, folgt, da die Anfangskurve nirgends charakteristisch gerichtet ist, leicht aus den bekannten Stetigkeitssätzen der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Bezeichnet man zur Abkürzung das Integral über die Anfangskurve, das in der Greenschen Formel auftritt, mit J_A, setzt

$$(17)\qquad v^1 = w^1, \quad v^2 - v^1 = w^2, \quad -v^2 = w^3$$

(die Ableitungen von w^σ sind entsprechend durch die Ableitungen der v^σ erklärt) und beachtet $L_3(u) = M_3(v) = 0$, sowie $w^\sigma = 0$ auf C_σ, so erhält man aus der Greenschen Formel

$$(18)\qquad 0 = J_A + \sum_{\sigma=1}^{3}\int_{C_\sigma}\Big(-a_{ikl}(w^\sigma)_l(u)_i\frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma} + (a_{ikl}w^\sigma)_{lk}u\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} - (b_{ik}w^\sigma)_k u\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma}\Big)|ds_\sigma|.$$

Dabei ist $\frac{\partial}{\partial \nu_1}$ die Differentiation nach der ins Äußere von P_1PP_2 weisenden Normalen von C_1; $\frac{\partial}{\partial \nu_2}$ die Ableitung nach der ins Äußere von P_2PP_3 weisenden Normalen von C_2 und $\frac{\partial}{\partial \nu_3}$ die Differentiation nach der ins Innere von P_2PP_3 weisenden Normalen von C_3 [7]).

Setzt man zur Abkürzung

$$(19)\qquad Z^\sigma = a_{ikl}(w^\sigma)_l\frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma}\frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}$$

und beachtet $w^\sigma = 0$ auf C_σ, so wird nach Hilfssatz 1 (Seite 253) längs C_σ

$$(20)\qquad a_{ikl}(w^\sigma)_l(u)_i\frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma} = \frac{\partial u}{\partial s_\sigma}\cdot Z^\sigma.$$

Ferner ist wegen $w^\sigma = 0$ auf C_σ:

$$(21)\qquad (a_{ikl}w^\sigma)_{lk}\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} = 2(a_{ikl})_l(w^\sigma)_k\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} + a_{ikl}(w^\sigma)_{lk}\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma}$$

und

$$(22)\qquad (b_{ik}w^\sigma)_k = b_{ik}(w^\sigma)_k.$$

Nach Hilfssatz 2 (S. 255) ist

$$(23)\qquad a_{ikl}(w^\sigma)_{lk}\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} = 2\frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} - 2\frac{\partial}{\partial s_\sigma}\Big(a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma}\Big)(w^\sigma)_l.$$

Es ist also, nochmals zusammengefaßt,

$$-a_{ikl}(w^\sigma)_l(u)_i\frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma} = -\frac{\partial u}{\partial s_\sigma}Z^\sigma \quad \text{nach (20)}$$

$$(a_{ikl}w^\sigma)_{lk}u\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} = 2\frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma}u - 2\frac{\partial}{\partial s_\sigma}\Big(a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma}\Big)(w^\sigma)_l u + 2(a_{ikl})_l(w^\sigma)_k\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma}u \quad \text{nach (21), (23)}$$

$$-(b_{ik}w^\sigma)_k u\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} = -b_{ik}(w^\sigma)_k u\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} \quad \text{nach (22).}$$

---

[7]) Nach der *inneren* Normalen wegen $w^3 = -v^2$. — In den Formeln (6) bzw. (7) ist der Richtungssinn der Bogenlänge so zu wählen, daß s auf ν folgt wie y auf x.

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergeben die linken Seiten gerade den Integranden über C_σ in der Greenschen Formel (18) und man erhält:

$$(23\text{a})\qquad 0 = J_A - \sum_{\sigma=1}^{3} \int_{C_\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial s_\sigma} Z^\sigma - 2u \frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} + R_k^\sigma \cdot (w^\sigma)_k u \right) ds_\sigma$$

mit der Abkürzung

$$(24)\qquad R_k^\sigma = 2 \frac{\partial}{\partial s_\sigma} \left(a_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma} \frac{\partial x_l}{\partial \nu_\sigma} \right) - 2 (a_{ikl})_l \frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} + b_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma}.$$

Aus (23a) kommt nach partieller Integration

$$(25)\qquad \left(\sum_{\sigma=1}^{3} u Z^\sigma \right)_P^{P_\sigma} = J_A + \sum_{\sigma=1}^{3} \int_{C_\sigma} \left(3 \frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} - R_k^\sigma \cdot (w^\sigma)_k \right) u \, ds_\sigma.$$

§ 4.

Bestimmung der Riemannschen Funktion.

Die Formel (25) liefert die gesuchte explizite Darstellung von u im Punkte P, wenn es möglich ist, die Funktionen w^σ so zu wählen, daß längs C_σ identisch

$$(26)\qquad 3 \frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} - R_k^\sigma \cdot (w^\sigma)_k = 0$$

und in P

$$(27)\qquad \sum_{\sigma=1}^{3} Z^\sigma = -1$$

ist.

Wie aus (15) folgt, läßt sich wegen des Verschwindens von w^σ auf C_σ jeder lineare Differentialausdruck in w^σ von der ersten Ordnung, also insbesondere $-R_k^\sigma \cdot (w^\sigma)_k$ längs C_σ in der Gestalt

$$(28)\qquad - R_k^\sigma \cdot (w^\sigma)_k = K^\sigma Z^\sigma$$

schreiben; dabei ist K^σ eine bekannte Funktion von x, y, die nur von den Koeffizienten a_{ikl} und b_{ik} abhängt. Damit geht (26) in die *gewöhnliche* Differentialgleichung erster Ordnung für Z^σ über:

$$(29)\qquad 3 \frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} + K^\sigma Z^\sigma = 0.$$

Wir wollen nun die Werte von Z^σ in P berechnen. In P muß der Bedingung (27) genügt werden, zu der die drei Gleichungen

$$(30)\qquad \frac{\partial w^\sigma}{\partial s_\sigma} = 0 \qquad\qquad (\sigma = 1, 2, 3)$$

hinzutreten, die natürlich auch im Punkte P erfüllt sein müssen. Diese vier Gleichungen (27), (30) sind nach (17) aufzufassen als Gleichungen

für die vier Unbekannten $v_x^1, v_y^1, v_x^2, v_y^2$ im Punkte P; schreibt man diese Gleichung in w^σ, so müssen die Ableitungen der w^σ auch noch den aus (17) folgenden Gleichungen

(31) $$w_x^1 + w_x^2 + w_x^3 = 0; \quad w_y^1 + w_y^2 + w_y^3 = 0$$

in P genügen.

Führt man in diesen Gleichungen die Ausdrücke Z^σ mittels der Formeln (15) ein, so erhält man zusammen mit (27) drei Gleichungen für die drei Größen Z^1, Z^2, Z^3, nämlich

$$Z^1 + Z^2 + Z^3 = -1,$$
$$\sum_{\sigma=1}^{3} \frac{q^\sigma}{\prod\limits_{i=1}^{3}{}'(p^\sigma q^i - q^\sigma p^i)} \cdot Z^\sigma = 0,$$
$$\sum_{\sigma=1}^{3} \frac{p^\sigma}{\prod\limits_{i=1}^{3}{}'(p^\sigma q^i - q^\sigma p^i)} \cdot Z^\sigma = 0.$$

Als Lösung verifiziert man $Z_1 = Z_2 = Z_3 = -\frac{1}{3}$. Für die erste Gleichung ist das klar, für die zweite und dritte ergibt es sich mühelos aus einem Satz der elementaren Algebra, wonach für jede algebraische Gleichung $f(x) = 0$ mit den einfachen Nullstellen a_i die Ausdrücke $\sum_i \frac{1}{f'(a_i)}$ und $\sum_i \frac{a_i}{f'(a_i)}$ verschwinden.

Aus diesen Werten von Z^σ ergeben sich die Werte von w_x^σ, w_y^σ in P nach (15); daß dann auch in P die Gleichungen (30) erfüllt sind, ist selbstverständlich.

Man hat das Resultat: Schreibt man im Punkte P für $a_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma} \frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma} (w^\sigma)_l$ den Wert $-\frac{1}{3}$ vor und bestimmt diesen Ausdruck auf C_σ nach der Differentialgleichung (29), so sind damit die Forderungen, die wir an die w^σ auf C_σ und im besonderen in P stellen mußten, sämtlich erfüllt. Nach (15) ist damit auf C_σ auch w_x^σ und w_y^σ vollständig festgelegt. Da die Koeffizienten der Differentialgleichung $L_3(u) = 0$ dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzt waren, so ist K^σ in (29) und damit auch Z^σ bzw. w_x^σ und w_y^σ zweimal stetig nach s_σ differenzierbar.

§ 5.

Zusammenfassendes Resultat.

1. Darstellung der Lösung.

Die Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung

$$L(u) = a_{ikl}(u)_{ikl} + b_{ik}(u)_{ik} + c_i(u_i) + du = 0 \text{ *)}$$

*) Über die Bedeutung der Indizes siehe § 1 S. 252.

läßt sich in einem beliebigen Punkt P aus der Umgebung der Anfangskurve A in der Gestalt darstellen:

(32)
$$u = -\sum_{\sigma=1}^{3} u Z^{\sigma}|_{P_\sigma}$$
$$+ \int\limits_{P_1 P_3} \begin{pmatrix} v a_{ikl}(u)_{lk} \frac{\partial x_i}{\partial \nu} - (v a_{ikl})_l (u)_i \frac{\partial x_k}{\partial \nu} + (v a_{ikl})_{lk} u \frac{\partial x_i}{\partial \nu} \\ + v b_{ik}(u)_i \frac{\partial x_k}{\partial \nu} - (v b_{ik})_k u \frac{\partial x_i}{\partial \nu} + v c_i u \frac{\partial x_i}{\partial \nu} \end{pmatrix} |ds|$$

mit

(33)
$$Z^{\sigma} = a_{ikl}(w^{\sigma})_l \frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma} \frac{\partial x_k}{\partial \nu_\sigma}.$$

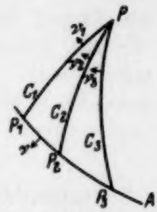


Fig. 3.

Dabei sind die P_σ die Punkte, die von den durch P gehenden Charakteristiken C_σ auf A ausgeschnitten werden; s ist die Bogenlänge auf A, ν, ν_σ sind die in Fig. 3 gezeichneten Normalenrichtungen; s_σ ist die Bogenlänge auf C_σ, deren Richtung so zu wählen ist, daß s_σ auf ν_σ folgt, wie y auf x.

2. Bestimmung der Riemannschen Funktion.

Die Funktion v ist sowohl im abgeschlossenen „Dreieck" P_1PP_2 als auch im abgeschlossenen „Dreieck" P_2PP_3 eine dreimal stetig differenzierbare Lösung der zu $L_3(u) = 0$ adjungierten Differentialgleichung

(34)
$$M(v) = -(a_{ikl}v)_{lki} + (b_{ik}v)_{ki} - (c_i v)_i + dv = 0$$

die auf C_σ folgenden Randbedingungen genügt: Bezeichnet man v in P_1PP_2 mit v^1 und in P_2PP_3 mit v^2 und setzt — wie dies in (33) geschehen ist —

$$v^1 = w^1, \qquad v^2 - v^1 = w^2, \qquad -v^2 = w^3,$$

so soll längs C_σ

(35)
$$w^{\sigma} = 0$$

sein und außerdem längs C_σ die Differentialgleichung

$$3\frac{\partial}{\partial s_\sigma}(Z^{\sigma}) - R_k^{\sigma} \cdot (w^{\sigma})_k = 0$$

mit

$$R_k^{\sigma} = 2\frac{\partial}{\partial s_\sigma}\left(a_{ikl}\frac{\partial x_i}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_l}{\partial \nu_\sigma}\right) - 2(a_{ikl})_l \frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma} + b_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial \nu_\sigma}$$

bestehen, der man nach (15) auch die Form

(36)
$$3\frac{\partial Z^{\sigma}}{\partial s_\sigma} + K^{\sigma} Z^{\sigma} = 0$$

geben kann, wo K^σ eine bekannte, nur von den a_{ikl} und b_{ik} abhängende Größe ist. Als Anfangsbedingung kommt zu (36) die Forderung

$$Z^\sigma(P) = -\frac{1}{8}. \tag{37}$$

Damit ist Z^σ eindeutig bestimmt. Aus Z^σ berechnen sich w_x^σ und w_y^σ nach den Formeln (15).

Es sind also die Werte von v, v_x, v_y auf C_1 bzw. C_3 und die Werte der Sprünge von v, v_x, v_y längs C_2 eindeutig bestimmt. Da $v^2 - v^1$ längs C_2 Null sein sollte, sieht man, daß die *Funktion* v (aber nicht ihre Ableitungen) längs C_2 stetig ist.

Man bemerkt, daß die Bedingungen, denen die „Riemannsche Funktion" v auf C_σ genügen muß, nur von den Koeffizienten a_{ikl}, b_{ik} und nicht von c_i bzw. d abhängen.

§ 6.
Orientierung über mögliche Vorgaben auf Charakteristiken.

Wir betrachten als typisches Beispiel die Differentialgleichung $u_{xxy} + u_{xyy} = 0$ mit den Charakteristiken $x =$ konst., $y =$ konst. und $x - y =$ konst.

Gibt man auf der positiven x-Achse (in Fig. 4 PP_1) die Werte $u = 0$, $u_x = 0$, $u_y = 0$ und auf der Geraden $x - y = 0$, $x \geq 0$ den Wert $u = 0$ vor, so gibt es im Winkelraum P_1PP_2 zu diesen Anfangswerten eine einzige Lösung der Differentialgleichung, nämlich $u = 0$; denn es ist nach der Differentialgleichung mit den Bezeichnungen der Figur $u_{xy}(Q) = u_{xy}(L) = 0$, daraus $u_x(Q) = u_x(M) = 0$ und schließlich $u(Q) = u(N) = 0$.

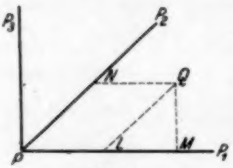


Fig. 4.

Verwendet man genau dieselben Daten als Anfangswerte, jedoch für den Winkelraum P_3PP_1, d. h. fordert man $u = 0$, $u_x = 0$, $u_y = 0$ auf PP_1 und $u = 0$ auf PP_3, so ist die Lösung der Differentialgleichung durch diese Anfangswerte nicht mehr eindeutig bestimmt. Neben $u = 0$ gibt es z. B. noch die Lösungen

$$u = y^{n+1} - (y - x)^{n+1} \quad \text{für } x \leqq y,$$
$$u = y^{n+1} \quad \text{für } x \geqq y,$$

$n \geqq 3$ ganz, die in dem ganzen Winkelraum P_1PP_3 stetige Ableitung bis zur einschließlich n-ten Ordnung besitzen und auf PP_3 bzw. PP_1 die richtigen Anfangswerte annehmen.

Dieses Verhalten beruht darauf, daß man auf PP_3 außer $u = 0$ (und dem daraus folgenden $u_y = 0$) noch u_z vorschreiben darf (hier: $u_z = (n+1)\,y^n$). Allgemein darf man bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung auf zwei Charakteristiken um so mehr Daten vorgeben, je mehr Charakteristiken es gibt, welche in dem durch diese beiden gebildeten Winkelraum liegen und durch den Scheitel des Winkels hindurchgehen.

§ 7.

Existenzbeweis für die Riemannsche Funktion.

Um die Existenz zweier Funktionen v^1 und v^2 zu beweisen, die den für die Riemannsche Funktion geforderten Bedingungen genügen, beweisen wir folgenden etwas allgemeineren Satz:

Es seien wie oben C_1, C_2, C_3 die durch einen Punkt P gehenden Charakteristiken der Differentialgleichung $L_3(u) = 0$. Dann gibt es zwei Funktionen v^1 und v^2 mit den Eigenschaften:

1. *Es ist v^1 in dem Winkelraum C_1PC_2 bzw. v^2 in C_2PC_3* (siehe Fig. 5) (falls man sich auf eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes P beschränkt) *dreimal stetig differenzierbar und genügt der zu $L_3(u)$ adjungierten Differentialgleichung $M_3(v) = 0$.*

2. *v^1 nimmt auf C_1 samt seinen Ableitungen erster Ordnung vorgeschriebene Werte an und dasselbe gilt für v^2 auf C_3; auf der mittleren Charakteristik C_2 nehmen die Differenzen $v^2 - v^1$ und deren Ableitungen erster Ordnung vorgeschriebene Werte an.*

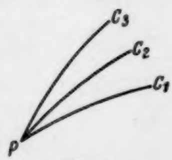


Fig. 5.

Dabei sollen die auf C_1 vorgeschriebenen Werte von v^1 dreimal und die von v_x^1, v_y^1 zweimal stetig nach der Bogenlänge s_1 von C_1 differenzierbar sein, und es soll dort die übliche Streifenbedingung $\frac{\partial v^1}{\partial s_1} = v_x^1 \frac{\partial x}{\partial s_1} + v_y^1 \frac{\partial y}{\partial s_1}$ gelten. Entsprechendes soll auf C_2 bzw. C_3 für $v^2 - v^1$ bzw. v^2 gelten. In P sind die vorgeschriebenen Werte außerdem noch dadurch eingeschränkt, daß der Wert, den man für v^τ $(\tau = 1, 2)$ erhält, wenn man auf C_τ gegen P rückt, derselbe sein muß, wie der, welcher sich ergibt, wenn man auf $C_{\tau+1}$ gegen P rückt; dasselbe gilt für die Ableitungen von v^τ.

Dieser Existenzsatz wird in üblicher Weise durch sukzessive Approximation bewiesen.

Dazu ist es bequem, die Differentialgleichung $M_3(\tau)$, also

$$(a_{ikl}v^\tau)_{lki} - (b_{ik}v^\tau)_{ki} + c_i v^\tau - d v^\tau = 0 \qquad (\tau = 1, 2)$$

unter Benutzung von (2) und (5) in der Gestalt

$$\frac{\partial^3 v^\tau}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3} - [v^\tau]_2 = 0 \qquad (\tau = 1, 2) \tag{38}$$

zu schreiben, wo $[v^\tau]_2$ ein bestimmter homogener linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung in v^τ ist. $\frac{\partial^3 v^\tau}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3}$ bedeutet, man soll auf v zuerst den Operator $\frac{\partial}{\partial s_3}$ (siehe Formel (5) auf Seite 253) anwenden, darauf $\frac{\partial}{\partial s_2}$ und schließlich $\frac{\partial}{\partial s_1}$. Verändert man in (38) die Reihenfolge der Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \frac{\partial}{\partial s_3}$, so ändert sich im allgemeinen auch $[v^\tau]_2$. Da die Koeffizienten von $L_3(u)$ dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzt waren, so sind die Koeffizienten von $[v^\tau]_2$ einmal stetig differenzierbar.

1. Die nullte Näherung.

Als erster Schritt wird die Existenz von Funktionen v^1, v^2 gezeigt, die allen gestellten Randbedingungen, jedoch statt (38) der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3 v^\tau}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3} = f(x, y) \qquad (\tau = 1, 2) \tag{39}$$

genügen, wobei $f(x, y)$ eine gegebene stetige Funktion von x und y bedeutet.

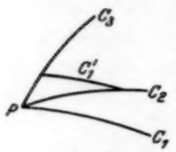


Fig. 6.

Zieht man von einem beliebigen Punkt der Kurve C_2 die Charakteristik C_1' (d. h. diejenige Charakteristik, die zu derselben Schar gehört wie C_1) bis zum Schnitt mit C_3 (s. Fig. 6)*), integriert (39) (für $\tau = 2$) längs C_1' und beachtet, daß längs C_2 sowohl $\frac{\partial v^2}{\partial s_3}$, als auch $\frac{\partial^2 v^2}{\partial s_2 \partial s_3}$ und daher auch $\frac{\partial^2 v^2}{\partial s_2 \partial s_3}$ vorgegeben ist, so wird in dem betrachteten Punkt von C_2

$$\frac{\partial^2 v^2}{\partial s_2 \partial s_3} = f_1^2(x, y), \tag{39$_1$}$$

wobei $f_1^2(x, y)$ sich aus einem Integral über $f(x, y)$ und gegebenen Anfangswerten von v^2 auf C_3 zusammensetzt. Integriert man (39$_1$) nochmals nach s_2, so entsteht

$$\frac{\partial v^2}{\partial s_3} = f_2^2(x, y), \tag{39$_2$}$$

wo $f_2^2(x, y)$ eine Funktion bedeutet, die sich aus den gegebenen Anfangswerten, aus einem Integral über diese und aus Integralen über $f(x, y)$ zusammensetzt.

Um ein bequemes Wort zu haben, werden wir von einer Funktion sagen, sie lasse sich in der „verlangten" Art darstellen, wenn sie sich, wie

---

*) Daß der Verlauf von C_1' qualitativ der in der Figur angegebene ist, folgt sofort daraus, daß zwei *charakteristische* Richtungen nirgends zusammenfallen.

eben $\frac{\partial v^2}{\partial s_3}$, darstellen läßt als Summe von den auf C_1, C_2, C_3 gegebenen Anfangswerten, von Integralen über diese Anfangswerte und von Integralen (evtl. mehrfachen) über $f(x, y)$.

Es ist natürlich nicht möglich, v^2 vollständig zu bestimmen, ohne vorher v^1 bestimmt zu haben. Da nun $\frac{\partial(v^2 - v^1)}{\partial s_3}$ auf C_2 gegeben ist, so läßt sich nach (39_2) auch $\frac{\partial v^1}{\partial s_3}$ ermitteln, wodurch auch $\frac{\partial^2 v^1}{\partial s_2 \partial s_3}$ gegeben ist. Man kennt also $\frac{\partial^2 v^1}{\partial s_2 \partial s_3}$ auf C_2 und natürlich v^1 und $\frac{\partial v^1}{\partial s_3}$ auf C_1. Mit diesen Anfangswerten läßt sich in jedem Punkt Q des Winkelraums $C_2 P C_1$ eindeutig eine Lösung von

$$(40) \qquad \frac{\partial^3 v^1}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3} = f(x, y)$$

bestimmen. Man ziehe nämlich durch Q die in Fig. 7 angegebenen charakteristischen Linien C_1', C_2', C_3', von denen C_1' die Linie C_2 trifft und C_2', C_3' die Linie C_1 schneidet[10]), und integriere (40) sukzessive längs C_1', C_2', C_3'. Man erhält so

$$(40_1) \qquad \frac{\partial^2 v^1}{\partial s_2 \partial s_3} = f_1^1(x, y),$$

$$(40_2) \qquad \frac{\partial v^1}{\partial s_3} = f_2^1(x, y),$$

$$(40_3) \qquad v^1 = f_3^1(x, y),$$

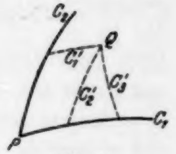


Fig. 7.

wo f_1^1, f_2^1, f_3^1 Funktionen sind, die sich in der „verlangten" Art darstellen lassen.

Die so gewonnene Funktion v^1 besitzt nach Konstruktion der Reihe nach die (stetigen) Ableitungen $\frac{\partial v^1}{\partial s_3}, \frac{\partial^2 v^1}{\partial s_2 \partial s_3}, \frac{\partial^3 v^1}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3}$ und genügt der Differentialgleichung (40). Sie besitzt aber auch *alle* Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Zunächst folgert man nämlich in bekannter Weise aus (40_1), daß die ersten Ableitungen von v^1 stetig sind und sich in der verlangten Weise darstellen lassen und daß

$$(41) \qquad \frac{\partial^2 v^1}{\partial s_3 \partial s_2} = \frac{\partial^2 v^1}{\partial s_2 \partial s_3} + k_1 \frac{\partial v^1}{\partial s_2} + k_2 \frac{\partial v^1}{\partial s_3}$$

ist, wo $k_1(x, y)$ und $k_2(x, y)$ bekannte stetig differenzierbare Koeffizienten sind, die von v^1 nicht abhängen.

Um die Stetigkeit aller zweiten Ableitungen zu beweisen, genügt es, wie man leicht zeigt, die Stetigkeit der drei linear unabhängigen Ab-

---

[10]) Über die Möglichkeit dieser Konstruktion siehe Anm. S. 264.

leitungen

$$\frac{\partial^2 v^1}{\partial s_1 \partial s_2}, \quad \frac{\partial^2 v^1}{\partial s_2 \partial s_2}, \quad \frac{\partial^2 v^1}{\partial s_1 \partial s_1} \tag{42}$$

zu zeigen. Von $\frac{\partial^2 v^1}{\partial s_2 \partial s_2}$ ist das schon gezeigt. Für $\frac{\partial^2 v^1}{\partial s_1 \partial s_2}$ folgt die Behauptung, indem man in (40) $\frac{\partial v^1}{\partial s_2}$ als gesuchte Funktion betrachtet und denselben Schluß zieht, der von (40_1) zu (41) führt; man erhält so die Stetigkeit von $\frac{\partial^3 v^1}{\partial s_2 \partial s_1 \partial s_2}$ und daraus die von $\frac{\partial^2 v^1}{\partial s_1 \partial s_2}$. Schließlich ist die rechte Seite von (41) stetig nach s_1 differenzierbar, daher auch die linke. Differenziert man also (41) nach s_1 und setzt zur Abkürzung $\frac{\partial v^1}{\partial s_2} = w$, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial w}{\partial s_2} - k_1 w\right) = g(x, y), \tag{43}$$

wo $k_1(x, y)$ stetig differenzierbar ist und g eine stetige Funktion bedeutet, die sich in verlangter Art aus den Anfangswerten und der Funktion $f(x, y)$ zusammensetzt. Aus (43) ergibt sich wieder in bekannter Weise, daß $\frac{\partial w}{\partial s_2}$, $\frac{\partial w}{\partial s_1}$ und sogar $\frac{\partial^2 w}{\partial s_2 \partial s_1}$ stetig ist und in verlangter Art dargestellt werden kann. Damit ist aber wegen $\frac{\partial w}{\partial s_1} = \frac{\partial^2 v^1}{\partial s_1 \partial s_2}$ gezeigt, daß die Ableitungen (42) und damit alle Ableitungen zweiter Ordnung von v^1 stetig sind und sich in verlangter Art durch die gegebenen Abfangswerte von v^1 bzw. $v^2 - v^1$ und v^2 und die Funktion $f(x, y)$ darstellen lassen.

Die Konstruktion zeigt, daß die Lösung die Gestalt hat

$$v^1(x, y) = \{v^1, v^2 - v^1, v^2\}^1 + \sum \int_{(1)} f(x, y)\, ds, \tag{44}$$

wo der Klammerausdruck ein gewisses von $f(x, y)$ unabhängiges Funktional der gegebenen Randwerte v^1, $v^2 - v^1$, v^2 und deren Ableitungen bedeutet. Das Integral rechts steht symbolisch für eine Summe von einfachen bis dreifachen Integralen, die längs charakteristischer Linien zu erstrecken sind, die teils in C_1PC_2, teils in C_2PC_3 verlaufen; die Längen der Integrationswege gehen alle gegen Null, wenn der Punkt x, y gegen P rückt.

Eine zu (44) analoge Darstellung gibt es, wie soeben bewiesen wurde, auch für alle ersten und zweiten Ableitungen von $v^1(x, y)$. Da von Anfangswerten in diesen Darstellungen höchstens Ableitungen bis zur zweiten Ordnung vorkommen, während wir Stetigkeit der Ableitungen bis zur dritten Ordnung vorausgesetzt haben, ergibt sich nunmehr auch die Stetigkeit der *dritten* Ableitungen von v^1, falls $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ stetig sind. Es lassen sich auch alle dritten Ableitungen von v^1 in einer (44) analogen Form darstellen, nur daß in den Integralen statt f die Funktion f_x bzw. f_y tritt.

Im übrigen nimmt die Lösung v^1, wie sich aus (40_2) und (40_3) ergibt, auf C_1 die dort vorgeschriebenen Werte von v^1 und $\frac{\partial v^1}{\partial s_3}$ an, woraus wegen der Stetigkeit der ersten Ableitungen folgt, daß sie die Werte *beider* ersten Ableitungen v_x^1 und v_y^1 annimmt. Auf C_2 nimmt nach (40_1) die Ableitung $\frac{\partial^2 v^1}{\partial s_2 \partial s_3}$ den durch die frühere Konstruktion (siehe (39_1)) bereits festgelegten Wert an und durch Integration ergibt sich das auch für $\frac{\partial v^1}{\partial s_3}$. Für v^1 selbst nehmen wir die Werte, die sich aus der im ganzen Gebiet C_2PC_1 konstruierten Lösung v^1 ergeben. Damit ist v^1 und seine ersten Ableitungen längs C_2 bekannt. Da auf C_2 die Werte von $v^2 - v^1$ und ihre Ableitungen bekannt sind, kennt man auf C_2 jetzt auch v^2 und seine ersten Ableitungen.

Nun bestimmt man in C_3PC_2 eine Lösung v^2 der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3 v^2}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3} = f(x, y), \tag{46}$$

indem man genau wie oben durch einen beliebigen inneren Punkt Q (s. Fig. 8) die Charakteristiken C_1' und C_2' mit C_3 und C_3' mit C_2 zum Schnitt bringt und nach diesen die Gleichung (46) integriert. Man erhält in genauer Analogie zu (40) der Reihe nach

$$\frac{\partial^2 v^2}{\partial s_2 \partial s_3} = f_1^2(x, y), \tag{47_1}$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial s_3} = f_2^2(x, y), \tag{47_2}$$

$$v^2 = f_3^2(x, y). \tag{47_3}$$

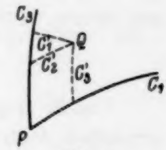


Fig. 8

Die so gewonnene Lösung v^2 nimmt nach Konstruktion samt Ableitungen auf C_3 die vorgegebenen Werte an, während auf C_2 wenigstens v^2 den oben konstruierten Wert annimmt. Außerdem nimmt aber auch $\frac{\partial v^2}{\partial s_3}$ auf C_2 den richtigen Wert an, da ja $\frac{\partial v^2}{\partial s_3}$ oben gerade durch die mit (47_2) äquivalente Differentialgleichung (39_2) festgelegt wurde.

Alle übrigen Eigenschaften der Lösung, insbesondere (44) und die entsprechenden Darstellungen für die Ableitungen folgen wörtlich so wie oben. Damit ist der zu Beginn der Nummer angekündigte Existenzsatz für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3 v^\tau}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3} = f(x, y) \qquad (\tau = 1, 2)$$

bewiesen.

2. Die ν-te Näherung.

Wir bestimmen durch Rekursion zwei Funktionenfolgen $v^{\tau,\nu}$ $(\tau=1,2)$, die in $C_{\tau+1}PC_{\tau}$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3 v^{\tau,\nu}}{\partial s_1\,\partial s_2\,\partial s_3}=[v^{\tau,\nu-1}]_2 \qquad (\nu=1,2,\ldots) \tag{38a}$$

genügt; $[v^{\tau,\nu-1}]_2$ ist dabei der in (38) vorkommende Ausdruck, in dem v^{τ} durch $v^{\tau,\nu-1}$ zu ersetzen ist. Für $\nu=1,2,\ldots$ soll $v^{1,\nu}$ auf C_1, $v^{2,\nu}$ auf C_3 und $v^{2,\nu}-v^{1,\nu}$ auf C_2 die dort vorgeschriebenen Werte annehmen; $v^{1,0}$ und $v^{2,0}$ sei identisch Null.

Nach der vorigen Nummer gibt es zwei derartige Funktionen $v^{1,\nu}$ und $v^{2,\nu}$ und sie gestatten die Darstellung

$$v^{\tau,\nu}=\{v^1,v^2-v^1,v^2\}_{\tau}+\sum_{\tau=1}^{2}\int[v^{\tau,\nu-1}]_2\,ds, \tag{48}$$

die die oben (siehe die Erläuterung zu (44)) auseinandergesetzte Bedeutung hat, wo also insbesondere der durch die geschweifte Klammer dargestellte Ausdruck *nicht* von ν abhängt.

Eine analoge Darstellung gilt für die *Ableitungen* von $v^{\tau,\nu}$ bis zur dritten Ordnung; bei den Ableitungen dritter Ordnung ist natürlich statt $[v^{\tau,\nu-1}]_2$ jetzt $[v^{\tau,\nu-1}]_3$ zu schreiben, da dieser Ausdruck Ableitungen bis zur dritten Ordnung enthält.

3. Der Grenzübergang.

Um zu zeigen, daß die Funktionen $v^{\tau,\nu}$ und ihre Ableitungen bis einschließlich dritter Ordnung mit $\nu\to\infty$ gleichmäßig gegen stetige Grenzfunktionen streben, bilde man die Summe

$$S^{\tau,\nu}=|v^{\tau,\nu}-v^{\tau,\nu-1}|+|v_x^{\tau,\nu}-v_x^{\tau,\nu-1}|+\ldots+|v_{yyy}^{\tau,\nu}-v_{yyy}^{\tau,\nu-1}|.$$

Nach (48) ist

$$v^{\tau,\nu}-v^{\tau,\nu-1}=\sum_{\tau=1}^{2}\int[v^{\tau,\nu-1}-v^{\tau,\nu-2}]_2\,ds,$$

also

$$|v^{\tau,\nu}-v^{\tau,\nu-1}|\leqq\sum_{\tau=1}^{2}K'\int S^{\tau,\nu-1}|ds|,$$

wo K' eine geeignete von ν freie Konstante bedeutet. Dieselbe Abschätzung der Reihe nach für alle Ableitungen bis zur dritten Ordnung aufgeschrieben und addiert liefert

$$S^{\tau,\nu}\leqq K\sum_{\tau=1}^{2}\int S^{\tau,\nu-1}|ds|, \tag{49}$$

wo K eine geeignete neue von ν freie Konstante ist.

Markiert man (s. Fig. 9) auf C_3 bzw. C_1 zwei Punkte R_3 bzw. R_1, so daß die Längen der Kurvenstücke PR_3 bzw. PR_1 kleiner gleich l werden, und zieht durch R_3 die charakteristische Linie C_1', die C_2 etwa in R_2 schneiden möge, und durch R_1 die charakteristische Linie C_2', so erhält man zwei abgeschlossene Gebiete R_3R_2P und PR_2RR_1; ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir mit der Figur an, daß der Schnittpunkt R von C_1' und C_2' in C_2PC_1 liegt.

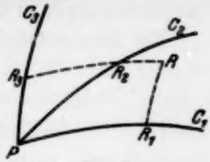


Fig. 9.

Der größte Wert von $S^{\nu,\nu}$ in dem ganzen abgeschlossenen Gebiet PR_3RR_1 sei M_ν. Dieses Maximum[11]) möge in einem Punkt R' von R_3PR_2 angenommen werden[12]).

Wendet man (49) auf diesen Punkt R' an, so wird

$$S^{\nu,\nu}(R') = M_\nu \leqq K \sum_{i=1}^{2} \int S^{\nu,\nu-1} |ds|. \tag{50}$$

Da die rechts auftretenden Integrale alle ganz im Gebiet PR_3RR_1 verlaufen, so ist $S^{\nu,\nu-1} \leqq M_{\nu-1}$. Bezeichnet man die Länge des längsten in (50) auftretenden Integrationsweges mit $m(l)$, so erhält man aus (48) leicht

$$M_\nu \leqq m(l) \cdot c \cdot M_{\nu-1}, \tag{51}$$

wo c eine feste von l, ν, x, y unabhängige Zahl ist; $m(l)$ strebt mit l gegen Null. Aus (51) folgert man

$$M_1 + M_2 + \dots + M_\nu \leqq M_1 + m(l)\, c\,(M_1 + M_2 + \dots + M_\nu),$$

so daß für hinreichend kleines l, für das $1 - m(l)\,c > \frac{1}{2}$ ist, die Ungleichung

$$M_1 + M_2 + \dots + M_\nu \leqq M_1 \frac{1}{1 - m(l)\,c} \leqq 2 M_1 \tag{52}$$

besteht. Bezeichnet man eine beliebige der Funktionen $v^{\nu,\nu}, v_x^{\nu,\nu}, \dots, v_{yyy}^{\nu,\nu}$ mit $w^{\nu,\nu}$, so ist

$$|w^{\nu,\nu} - w^{\nu,\nu-1}| \leqq S^{\nu,\nu} \leqq M_\nu,$$

woraus in Verbindung mit (52) die *gleichmäßige Konvergenz* von $w^{\nu,\nu}$ gegen eine stetige Grenzfunktion w^ν folgt.

Damit ist also vollständig gezeigt, daß es in C_1PC_2 bzw. C_2PC_3 (sobald man sich auf eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes P be-

---

[11]) Die folgende Verwendung des Maximums der charakteristischen Größe verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn Hans Lewy. Vgl. auch Perron, „Eine hinreichende Bedingung ...“, Math. Zeitschr. 28, S. 216.

[12]) Liegt R' in PR_2RR_1, so verlaufen alle folgenden Überlegungen genau ebenso.

schränkt[13])) zwei dreimal stetig differenzierbare Funktionen v^1 bzw. v^2 gibt, die der Differentialgleichung (38) genügen und alle zu Beginn aufgezählten Randbedingungen erfüllen.

Die *Eindeutigkeit* der Lösung ergibt sich, indem man mit Hilfe der zu (50) und (51) analogen Abschätzungen zeigt, daß für zwei Lösungen v^τ und z^τ das Maximum von $S^\tau = |v^\tau - z^\tau| + |v^\tau_x - z^\tau_x| + \ldots + |v^\tau_{yyy} - z^\tau_{yyy}|$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von P Null ist.

B. Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

§ 8.

Vorbemerkungen.

1. Hyperbolischer Charakter und charakteristische Linien.

Es seien $i_1, i_2, \ldots, i_n$ von 1 bis 2 laufende Indizes mit derselben Bedeutung wie i, k, l in § 1. Dann läßt sich die allgemeinste lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung in der Gestalt

$$(53)\quad L_n(u) = a_{i_1\ldots i_n}(u)_{i_1\ldots i_n} + b_{i_1\ldots i_{n-1}}(u)_{i_1\ldots i_{n-1}} + \cdots + q_{i_1}(u)_{i_1} + r\,u = 0$$

schreiben, wobei die Koeffizienten $a_{i_1\ldots i_n}$ bis r bekannte Funktionen von x, y sind, die sich bei einer Vertauschung zweier Indizes i_k und i_l nicht ändern.

Die Differentialgleichung heißt *hyperbolisch*, wenn die zu den Gliedern höchster Ordnung gehörige Form

$$a_{i_1\ldots i_n}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_n}$$

in n verschiedene reelle Linearfaktoren zerfällt:

$$(54)\qquad a_{i_1\ldots i_n}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_n} = \prod_{j=1}^{n}(p^j\xi_1 + q^j\xi_2),$$

$$(54\text{a})\qquad p^j, q^j \text{ reell;}\quad \begin{vmatrix} p^j & q^j \\ p^i & q^i \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{für}\quad i \neq j.$$

Da nirgends $p^j = q^j = 0$ ist, darf $(p^j)^2 + (q^j)^2 = 1$ angenommen werden.

Die Koeffizienten von (53) setzen wir als n-mal stetig differenzierbare Funktionen von x und y voraus; dann sind es auch die Funktionen p^j, q^j.

Die Linien $\varphi^\sigma(x, y) = \text{konst.}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n)$ mit $(\varphi^\sigma_x)^2 + (\varphi^\sigma_y)^2 \neq 0$ und

$$(55)\qquad p^\sigma\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial x} + q^\sigma\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial y} = 0$$

heißen die charakteristischen Linien der Differentialgleichung.

---

[13]) Wie man unmittelbar sieht, können diese Lösungen in dem Winkelraum C_1PC_2 beliebig fortgesetzt werden, solange die vorausgesetzten Stetigkeitsbedingungen für die Randwerte und Koeffizienten der Differentialgleichung erfüllt sind.

Mit s_σ wird die Bogenlänge, mit ν_σ die Normale auf $\varphi^\sigma = \text{konst.}$ bezeichnet. Nach geeigneter Richtungswahl gelten dann wieder die Formeln (7) von § 1.

2. Drei Hilfssätze.

1. Hilfssatz. *Bedeutet* $w^\sigma(x, y)$ *eine längs* $\varphi^\sigma = \text{konst.}$ *mit allen Ableitungen bis zur Ordnung* $n - 3$ *einschließlich verschwindende Funktion, so läßt sich für jede Funktion* $u(x, y)$ *längs* $\varphi^\sigma = \text{konst.}$ *der Ausdruck* $a_{i_1 \ldots i_n}(u)_{i_1}(w^\sigma)_{i_3 \ldots i_n}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial \nu_\sigma}$ [14]) *längs* $\varphi^\sigma = \text{konst.}$ *in einen Ausdruck umschreiben, der die Ableitungen von u nur in der Kombination* $p^\sigma u_x + q^\sigma u_y = \frac{\partial u}{\partial s_\sigma}$ *enthält. In Formeln: Es gilt längs* $\varphi^\sigma = \text{konst.}$ *die Identität*

$$(56) \qquad a_{i_1 \ldots i_n}(u)_{i_1}(w^\sigma)_{i_3 \ldots i_n}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial \nu_\sigma} = \frac{\partial u}{\partial s_\sigma}\cdot a_{i_1 \ldots i_n}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial \nu_\sigma}(w^\sigma)_{i_3 \ldots i_n}.$$

Der Beweis läuft wörtlich so wie für $n = 3$, indem man wieder die aus (54) durch „Polarisation" entstehende Identität

$$(57) \qquad n!\, a_{i_1 \ldots i_n}\xi^1_{i_1}\xi^2_{i_2}\cdots\xi^n_{i_n} = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}\prod_{j=1}^{n}(p^{\alpha_j}\xi^j_1 + q^{\alpha_j}\xi^j_2)$$

heranzieht, in der rechts über alle Permutationen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu summieren ist. Beim Beweis hat man zu benutzen, daß längs $\varphi^\sigma = \text{konst.}$ alle Ableitungen von w^σ bis zur $(n-3)$-ten Ordnung also auch die durch Differentiation nach s_σ aus diesen entstehenden verschwinden.

Insbesondere gelangt man zu der (12) entsprechenden Formel

$$(58) \qquad n!\, a_{i_1 \ldots i_n}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial \nu_\sigma}(w^\sigma)_{i_3 \ldots i_n}$$
$$= \sum{}'\left(p^1\frac{\partial x}{\partial \nu_\sigma} + q^1\frac{\partial y}{\partial \nu_\sigma}\right)\left(p^2\frac{\partial}{\partial x} + q^2\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(p^n\frac{\partial}{\partial x} + q^n\frac{\partial}{\partial y}\right)w^\sigma,$$

in der der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß das Glied mit p^σ, q^σ *nicht* vorkommt und wo die Summe über alle Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, \sigma - 1, \sigma + 1, \ldots, n$ zu erstrecken ist.

2. Hilfssatz. *Die Funktion* $w^\sigma(x, y)$ *möge samt allen Ableitungen bis zur* $(n-3)$*-ten Ordnung einschließlich längs* $\varphi^\sigma = \text{konst.}$ *verschwinden. Dann läßt sich der Ausdruck* $a_{i_1 \ldots i_n}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial \nu_\sigma}(w^\sigma)_{i_3 \ldots i_n}$ *längs* $\varphi^\sigma = \text{konst.}$ *bis auf einen Differentialausdruck* $(n-2)$*-ter Ordnung in* w^σ *als totale Ableitung nach der Bogenlänge* s_σ *von* $\varphi^\sigma = \text{konst.}$ *eines Differential-*

[14]) Zu den Bezeichnungen siehe insbesondere die Formeln (7) S. 253.

ausdruckes $(n-2)$-ter Ordnung in w^σ schreiben. In Formeln

$$(59)\qquad a_{i_1\ldots i_n}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu_\sigma}(w^\sigma)_{i_2\ldots i_n}=(n-1)\frac{\partial}{\partial s_\sigma}\left(a_{i_1\ldots i_n}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial \nu_\sigma}(w^\sigma)_{i_3\ldots i_n}\right)$$
$$-(n-1)\frac{\partial}{\partial s_\sigma}\left(a_{i_1\ldots i_n}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial \nu_\sigma}\right)\cdot(w^\sigma)_{i_3\ldots i_n}.$$

Der Beweis verläuft wieder unter Benutzung von (57) ganz analog dem Beweis für den entsprechenden Hilfssatz für $n=3$.

3. Hilfssatz. *Verschwindet $w^\sigma(x,y)$ und alle seine Ableitungen bis zur $(n-3)$-ten Ordnung einschließlich längs $\varphi^\sigma=$ konst., so lassen sich dort alle Ableitungen $(n-2)$-ter Ordnung von w^σ linear durch den Differentialausdruck $a_{i_1\ldots i_n}\frac{\partial x_1}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_2}{\partial \nu_\sigma}(w^\sigma)_{i_3\ldots i_n}$ darstellen*; in Formeln

$$(60)\qquad \frac{\partial^{n-2}w^\sigma}{\partial x^\nu\partial y^{n-2-\nu}}=(-1)^{\nu+1}\frac{n\,(p^\sigma)^{n-2-\nu}(q^\sigma)^\nu}{\prod\limits_{i=1}^{n}{}'(p^\sigma q^i-q^\sigma p^i)}\cdot a_{i_1\ldots i_n}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial s_\sigma}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial \nu_\sigma}(w^\sigma)_{i_3\ldots i_n}$$
$$(\nu=0,1,2,\ldots,n-2).$$

(Der Strich am Produktzeichen bedeutet, der Faktor mit $i=\sigma$ ist wegzulassen.)

Der Beweis ergibt sich, da für $\sigma\neq i$ auch $q^\sigma p^i-p^\sigma q^i\neq 0$ ist, unmittelbar aus der Formel (58), indem man dort die Formeln (7) benutzt und bedenkt, daß die einzelnen Faktoren der rechten Seite von (58) mittels der Gleichung $p^\sigma\frac{\partial}{\partial x}+q^\sigma\frac{\partial}{\partial y}=0$ umgeformt werden dürfen.

§ 9.
Die Greensche Formel.

Der zu $L_n(u)$ adjungierte Differentialausdruck ist

$$(61)\qquad M_n(v)=(-1)^n(a_{i_1\ldots i_n}v)_{i_n\ldots i_1}+(-1)^{n-1}(b_{i_1\ldots i_{n-1}}v)_{i_{n-1}\ldots i_1}+\cdots$$
$$-(q_{i_1}v)_{i_1}+rv=0.$$

Für ein beliebiges x,y-Gebiet G, dessen Rand Γ die Bogenlänge s und die äußere Normale ν besitze, gilt die Greensche Formel

$$(62)\qquad \iint\limits_G[v\,L_n(u)-u\,M_n(v)]\,dx\,dy$$
$$=\int\limits_\Gamma\left(\begin{array}{l}a_{i_1\ldots i_n}(u)_{i_1\ldots i_{n-1}}v\frac{\partial x_{i_n}}{\partial\nu}-(a_{i_1\ldots i_n}v)_{i_n}(u)_{i_1\ldots i_{n-2}}\frac{\partial x_{i_{n-1}}}{\partial\nu}+-\cdots\\ +(-1)^{n-2}(a_{i_1\ldots i_n}v)_{i_n\ldots i_3}(u)_{i_1}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial\nu}+(-1)^{n-1}(a_{i_1\ldots i_n}v)_{i_n\ldots i_2}u\frac{\partial x_{i_1}}{\partial\nu}\\ +b_{i_1\ldots i_{n-1}}(u)_{i_1\ldots i_{n-2}}v\frac{\partial x_{i_{n-1}}}{\partial\nu}-+\cdots+(-1)^{n-2}(b_{i_1\ldots i_{n-1}}v)_{i_{n-1}\ldots i_2}u\frac{\partial x_{i_1}}{\partial\nu}\\ +\cdots\cdots\\ +q_{i_1}uv\frac{\partial x_{i_1}}{\partial\nu}\end{array}\right)\cdot|ds|.$$

§ 10.

Die Riemannsche Methode.

Es sei $u(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung, die auf einer Anfangskurve A samt ihren Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung vorgegebene Werte annimmt. Gesucht ist die explizite Darstellung von $u(x, y)$ in einem beliebigen Punkt P aus einer (hinreichend kleinen) Umgebung von A.

Dazu werden durch P die n charakteristischen Linien $C_1, \ldots, C_n$ gezogen, die A in $P_1, \ldots, P_n$ treffen mögen; die Anordnung sei so wie in Fig. 10 angegeben, insbesondere sollen C_1 bzw. C_n die beiden äußersten Charakteristiken sein und es sei s_i die Bogenlänge auf C_i.

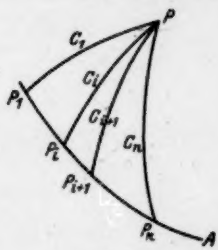


Fig. 10.

Auf das von A, C_1 und C_n berandete Gebiet wird die Greensche Formel (62) angewandt. Dabei soll v eine Funktion sein, die in jedem abgeschlossenen „Dreieck" $P_i P P_{i+1}$ $(i=1, \ldots, n-1)$ n-mal stetig differenzierbar ist und der Differentialgleichung $M_n(v) = 0$ genügt. Längs der „mittleren" Charakteristiken C_i $(i = 2, \ldots, n-1)$ sind für v und seine Ableitungen endliche Sprünge zugelassen. Wir setzen jedoch bereits jetzt fest, daß diese Sprünge von v und seinen Ableitungen bis einschließlich $(n-3)$-ter Ordnung verschwinden sollen; ebenso soll v auf C_1 und auf C_n mit seinen Ableitungen bis zur $(n-3)$-ten Ordnung Null sein. Setzt man

$$v^1 = w^1, \qquad -v^{n-1} = w^n,$$

$$v^{i+1} - v^i = w^{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2), \tag{63}$$

so soll also w^σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n)$ samt den Ableitungen bis einschließlich $(n-3)$-ter Ordnung auf C_σ verschwinden.

Nennt man das Randintegral über A in der Greenschen Formel J_A, so wird aus (62) angewandt auf $P_1 P P_n$:

$$0 = J_A + \sum_{\sigma=1}^{n} J_{C_\sigma} \tag{64}$$

mit

$$J_{C_\sigma} = \int_{C_\sigma} \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} (a_{i_1 \ldots i_n} w^\sigma)_{i_n \ldots i_3} (u)_{i_2} \dfrac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu_\sigma} \\ + (-1)^{n-1} (a_{i_1 \ldots i_n} w^\sigma)_{i_n \ldots i_2} u \dfrac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu_\sigma} \\ + (-1)^{n-2} (b_{i_1 \ldots i_{n-1}} w^\sigma)_{i_{n-1} \ldots i_2} u \dfrac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu_\sigma} \end{pmatrix} |ds_\sigma|. \tag{65}$$

(Man beachte, daß alle Ableitungen von w^σ bis einschließlich $(n-3)$-ter Ordnung auf C_σ verschwinden.) Dabei ist ν_σ für $\sigma = 1, 2, \ldots, n-1$ die Normale von C_σ, welche in das Äußere von $P_\sigma P P_{\sigma+1}$ weist, hingegen ν_n die in das Innere von $P_{n-1} P P_n$ weisende Normale von C_n. Da längs C_σ alle Ableitungen von w^σ bis zur $(n-3)$-ten Ordnung einschließlich verschwinden, hat man auf C_σ:

$$(66) \qquad (a_{i_1 \ldots i_n} w^\sigma)_{i_n \ldots i_1} = a_{i_1 \ldots i_n} (w^\sigma)_{i_n \ldots i_1},$$

$$(67) \qquad (a_{i_1 \ldots i_n} w^\sigma)_{i_n \ldots i_1} = (n-1)(a_{i_1 \ldots i_n})_{i_n} (w^\sigma)_{i_{n-1} \ldots i_1} + a_{i_1 \ldots i_n} (w^\sigma)_{i_n \ldots i_1},$$

$$(68) \qquad (b_{i_1 \ldots i_{n-1}} w^\sigma)_{i_{n-1} \ldots i_1} = b_{i_1 \ldots i_{n-1}} (w^\sigma)_{i_{n-1} \ldots i_1}.$$

Verwendet man Hilfssatz 1 und 2 und schreibt zur Abkürzung

$$(69) \qquad Z^\sigma = a_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial s_\sigma} \frac{\partial x_{i_n}}{\partial \nu_\sigma} (w^\sigma)_{i_1 \ldots i_n}$$

und

$$(70) \qquad R^\sigma_{i_1 \ldots i_{n-1}} = (n-1) \frac{\partial}{\partial s_\sigma} \left(a_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu_\sigma} \frac{\partial x_{i_n}}{\partial s_\sigma} \right) -$$
$$- (n-1)(a_{i_1 \ldots i_n})_{i_n} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu_\sigma} + b_{i_1 \ldots i_{n-1}} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu_\sigma},$$

so erhält man für (65):

$$J_{C_\sigma} = (-1)^n \int_{C_\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial s_\sigma} \cdot Z^\sigma - (n-1) u \frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} + R^\sigma_{i_1 \ldots i_{n-1}} \cdot (w^\sigma)_{i_1 \ldots i_{n-1}} u \right) ds_\sigma$$

oder

$$(71) \quad J_{C_\sigma} = (-1)^n \cdot u Z^\sigma \Big|_{P_\sigma}^{P} - (-1)^n \int_{C_\sigma} \left(n \frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} - R^\sigma_{i_1 \ldots i_{n-1}} \cdot (w^\sigma)_{i_1 \ldots i_{n-1}} \right) u \, ds_\sigma.$$

Fordert man längs C_σ

$$(72) \qquad n \frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} - R^\sigma_{i_1 \ldots i_{n-1}} \cdot (w^\sigma)_{i_1 \ldots i_{n-1}} = 0$$

und im Punkte P

$$(73) \qquad \sum_{\sigma=1}^{n} Z^\sigma = (-1)^n,$$

so ergibt sich aus (71) und (64) als gesuchte Lösung

$$(74) \qquad u(P) = J_A + \sum_{\sigma=1}^{n} (-1)^n u Z^\sigma \big|_{P_\sigma}.$$

Unter Verwendung von (60) läßt sich (72) als gewöhnliche Differentialgleichung für Z^σ schreiben:

$$(72\text{a}) \qquad n \frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} + K_\sigma Z^\sigma = 0,$$

wo K_σ eine bekannte Funktion von x, y ist, die nach (70) nur von den Koeffizienten $a_{i_1 \ldots i_n}$, $b_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ abhängt.

Im Punkte P müssen die Ausdrücke $\dfrac{\partial^{n-2} w^\sigma}{\partial x^\nu \partial y^{n-2-\nu}}$ auf Grund ihrer Definition (63) den $n-1$ Gleichungen

$$\sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^{n-2} w^\sigma}{\partial x^\nu \partial y^{n-2-\nu}} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2)$$

genügen. Drückt man diese Ableitungen auf Grund von (60) durch die Z^σ aus, so ergeben sich in P zusammen mit (73) für $Z^1, Z^2, \ldots, Z^n$ die n Gleichungen

$$\sum_{\sigma=1}^{n} Z^\sigma = (-1)^n,$$

$$\sum_{\sigma=1}^{n} \frac{(p^\sigma)^{n-2-\nu}(q^\sigma)^\nu}{\prod\limits_{i=1}^{n}{}'(q^\sigma p^i - p^\sigma q^i)} \cdot Z^\sigma = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2).$$

Eine Lösung ist $Z^1 = Z^2 = \ldots = Z^n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Für die erste Gleichung ist das klar, für die übrigen ergibt es sich leicht aus dem Satz der elementaren Algebra, wonach für jede algebraische Gleichung mit lauter einfachen Wurzeln $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{f'(a_i)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2)$$

gelten.

Da somit Z^σ in P gegeben ist, berechnet sich nach (72a) sein Wert eindeutig auf der ganzen Linie C_σ. Aus Z^σ ergeben sich die Werte *aller* Ableitungen $(n-2)$-ter Ordnung von w^σ nach den Formeln (60). Da K_σ gewiß einmal stetig differenzierbar ist, so ist auch Z^σ bzw. alle Ableitungen $(n-2)$-ter Ordnung von w^σ zweimal stetig nach der Bogenlänge von C_σ differenzierbar.

§ 11.

Zusammenfassendes Resultat.

1. Darstellung der Lösung.

Die Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung

$$L_n(u) = a_{i_1 \ldots i_n}(u)_{i_1 \ldots i_n} + b_{i_1 \ldots i_{n-1}}(u)_{i_1 \ldots i_{n-1}} + \cdots + q_{i_1}(u)_{i_1} + ru = 0$$

läßt sich in einem beliebigen Punkt P aus der Umgebung der Anfangskurve A in der Gestalt darstellen:

$$u(P) = \sum_{\sigma=1}^{n} (-1)^n u \cdot Z^\sigma |_{P_\sigma}$$

$$+ \int\limits_{\overline{P_1 P_n}} \left(\begin{array}{l} a_{i_1 \dots i_n} v (u)_{i_1 \dots i_{n-1}} \frac{\partial x_{i_n}}{\partial \nu} - (a_{i_1 \dots i_n} v)_{i_n} (u)_{i_1 \dots i_{n-2}} \frac{\partial x_{i_{n-1}}}{\partial \nu} + - \\ \qquad \dots + (-1)^{n-1} (a_{i_1 \dots i_n} v)_{i_n \dots i_2} u \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu} \\ + b_{i_1 \dots i_{n-1}} v (u)_{i_1 \dots i_{n-2}} \frac{\partial x_{i_{n-1}}}{\partial \nu} - + \dots + (-1)^{n-2} (b_{i_1 \dots i_{n-1}} v)_{i_{n-1} \dots i_2} u \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ + q_{i_1} v u \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \nu} \end{array} \right) |ds|$$

mit

$$Z^\sigma = a_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial s_\sigma} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial \nu_\sigma} (w^\sigma)_{i_3 \dots i_n}.$$

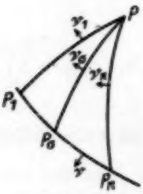


Fig. 11.

Dabei sind die P_σ die Punkte, die von den durch P gehenden Charakteristiken C_σ auf A ausgeschnitten werden; s ist die Bogenlänge auf A, ν, ν_σ sind die in der Fig. 11 gezeichneten Normalenrichtungen; s_σ ist die Bogenlänge auf C_σ, deren Richtung so zu wählen ist, daß s_σ auf ν_σ folgt wie y auf x.

2. Bestimmung der Riemannschen Funktion.

Die Funktion v ist in jedem der abgeschlossenen „Dreiecke" $P_\sigma P P_{\sigma+1}$ eine n-mal stetig differenzierbare Lösung der zu $L(u) = 0$ adjungierten Differentialgleichung

$$M_n(v) = (-1)^n (a_{i_1 \dots i_n} v)_{i_n \dots i_1} + (-1)^{n-1} (b_{i_1 \dots i_{n-1}} v)_{i_{n-1} \dots i_1}$$
$$\dots + - (q_{i_1} v)_{i_1} + r v = 0,$$

die auf C_σ folgenden Bedingungen genügt: Bezeichnet man v in $P_\sigma P P_{\sigma+1}$ mit v^σ und setzt, wie dies bereits in dem Ausdruck Z^σ geschehen ist:

$$v^1 = w^1, \quad -v^{n-1} = w^n; \quad v^{i+1} - v^i = w^{i+1} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

so soll w^σ $(\sigma = 1, 2, \dots, n)$ auf C_σ mit allen Ableitungen bis zur einschließlich $(n-3)$-ten Ordnung verschwinden. Außerdem soll im Punkte P

(76) $$Z^\sigma(P) = \frac{(-1)^n}{n}$$

sein und längs C_σ

(77) $$n \frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} - R^\sigma_{i_2 \dots i_{n-1}} \cdot (w^\sigma)_{i_2 \dots i_{n-1}} = 0$$

gelten. Dabei ist

$$R^{\sigma}_{i_1\dots i_{n-1}} = (n-1)\frac{\partial}{\partial s_\sigma}\left(a_{i_1\dots i_n}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial r_\sigma}\frac{\partial x_{i_n}}{\partial s_\sigma}\right) - (n-1)(a_{i_1\dots i_n})_{i_n}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial r_\sigma}$$
$$+ b_{i_1\dots i_{n-1}}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial r_\sigma}.$$

Da man alle Ableitungen von w^σ der $(n-2)$-ten Ordnung durch Z^σ ausdrücken kann (siehe die Formeln (60)), so läßt sich (77) auch als gewöhnliche Differentialgleichung in Z^σ auffassen:

$$n\frac{\partial Z^\sigma}{\partial s_\sigma} + K^\sigma Z^\sigma = 0, \tag{78}$$

wo K^σ eine bestimmte, nur von den Koeffizienten $a_{i_1\dots i_n}$ und $b_{i_1\dots i_{n-1}}$ abhängende Funktion ist.

Man sieht, daß Z^σ wegen (76) längs C_σ eindeutig bestimmt ist, und daraus ergeben sich wieder *alle* Ableitungen von w^σ der $(n-2)$-ten Ordnung durch (60).

Die Funktion v besitzt also im ganzen Gebiet P_1PP_n stetige Ableitungen bis zur $(n-3)$-ten Ordnung. Hingegen erleiden ihre Ableitungen $(n-2)$-ter Ordnung längs der „inneren" Charakteristiken $C_2, C_3, \dots, C_{n-1}$ vorgegebene Sprünge. Die Werte dieser Sprünge hängen überdies nur von den Koeffizienten $a_{i_1\dots i_n}$ und $b_{i_1\dots i_{n-1}}$ ab.

§ 12.

Der Existenzsatz für die Riemannsche Funktion.

Die Existenz von $n-1$ Funktionen $v^1, v^2, \dots, v^{n-1}$, die die bei der Riemannschen Methode geforderten Eigenschaften besitzen, folgt aus folgendem, etwas allgemeineren Satz: Es seien $C_1, C_2, \dots, C_n$ die durch einen Punkt P gezogenen charakteristischen Linien der Differentialgleichung $L_n(u) = 0$. Dann gibt es $n-1$ Funktionen $v^1, v^2, \dots, v^{n-1}$ mit den Eigenschaften:

1. *Es ist v^i in dem abgeschlossenen Winkelraum $C_{i+1}PC_i$* $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ (s. Fig. 12) (*falls man sich auf eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes P beschränkt*) *n-mal stetig differenzierbar und genügt der zu $L_n(u)$ adjungierten Differentialgleichung $M_n(v^i) = 0$.*

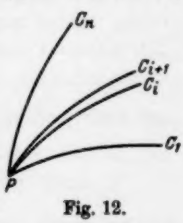


Fig. 12.

2. *v^1 nimmt auf C_1 samt seinen Ableitungen bis zur $(n-2)$-ten Ordnung vorgeschriebene Werte an, und ebenso v^{n-1} auf C_n; auf den mittleren Charakteristiken C_i $(i = 2, 3, \dots, n-1)$ nehmen die Differenzen $v^i - v^{i-1}$ und deren Ableitungen bis zur $(n-2)$-ten Ordnung vorgeschriebene Werte an.*

Dabei sollen die Vorgaben auf den einzelnen Charakteristiken so beschaffen sein, daß auch noch die $(n-2)$-ten Ableitungen zweimal stetig nach der Bogenlänge der betreffenden Charakteristik differenzierbar sind. Natürlich müssen die Ableitungen den üblichen Streifenbedingungen genügen, und im Punkte P müssen die auf den einzelnen Charakteristiken vorgegebenen Werte stetig aneinander anschließen.

Der Beweis dieses Satzes verläuft genau so wie der Beweis des entsprechenden Satzes für $n = 3$ in § 7. Man errechnet nach der Methode der sukzessiven Approximation zunächst auf Grund der auf C_n bekannten Vorgaben von v^{n-1} gewisse Ableitungen von v^{n-1} auf C_{n-1}, ebenso dann auf C_{n-2} gewisse Ableitungen von v^{n-2} usw., bis man schließlich zu C_2 kommt. Die so auf C_2 ermittelten Werte von v^1 reichen zusammen mit den Vorgaben auf C_1 aus, um v^1 in $C_2 P C_1$ vollständig zu bestimmen. Nunmehr kann man auch rückwärts der Reihe nach $v^2, v^3, \ldots, v^{n-1}$ in den zugehörigen Winkelräumen bestimmen. Die dabei benutzten Schlüsse sind triviale Verallgemeinerungen der in § 7 ausgeführten. Insbesondere kommt man beim Nachweis, daß die nach dem geschilderten Verfahren bestimmten Funktionen v^i n-mal stetig differenzierbar sind, mit den an (41) und (43) geknüpften Vertauschungssätzen aus.

(Eingegangen am 10. 8. 1929.)

Thetareihen in total-reellen algebraischen Zahlkörpern.

Von

H. D. Kloosterman in Münster i. W.

Schon öfters sind in der Literatur Reihen vom Typus

$$(1) \qquad \sum_{\xi \equiv 0 (\mathfrak{m})} e^{\pi i [\tau^{(1)} (\xi^{(1)})^2 + \tau^{(2)} (\xi^{(2)})^2 + \dots + \tau^{(n)} (\xi^{(n)})^2]}$$

aufgetreten. Es sind hier $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)}$ komplexe Veränderliche mit positivem Imaginärteil, und ξ durchläuft sämtliche Zahlen des Ideals $\mathfrak{m}$ in einem total-reellen Zahlkörper n-ten Grades K. Die Zahlen $\xi^{(1)} = \xi, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$ sind die Konjugierten von ξ. Die komplexe Veränderliche $\tau^{(p)}$ ist dem zu $K = K^{(1)}$ konjugierten Körper $K^{(p)}$ zugeordnet $(p = 1, 2, \dots, n)$. Falls $n = 1$, $\mathfrak{m} = (1)$ ist (d. h. wenn man den Körper der rationalen Zahlen zugrunde legt), ist (1) nichts anderes als eine einfache Jacobische ϑ-Reihe. Wenn man die Reihen in rationaler Gestalt schreibt, sind sie nichts anderes als gewöhnliche n-fache ϑ-Reihen, in denen die $\frac{1}{2} n (n+1)$ Moduln als lineare Funktionen von n Veränderlichen angesetzt sind.

Herr Hecke hat bei verschiedenen Gelegenheiten die große Bedeutung hervorgehoben, welche den Reihen (1) zukommt, sowohl für die Funktionentheorie wie für die Zahlentheorie. Ich brauche z. B. bloß zu erinnern an seinen Beweis der Fortsetzbarkeit der Dedekindschen ζ-Funktion über die ganze Ebene und an seinen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes in algebraischen Zahlkörpern. Diese Bedeutung beruht, genau so wie bei den „rationalen" Jacobischen ϑ-Reihen auf der Tatsache, daß die Reihen (1) ein sehr einfaches Verhalten aufweisen bei der Substitution $\tau^{(p)} \to -\frac{1}{\tau^{(p)}}$. Bei den „rationalen" ϑ-Reihen ist dies ein Spezialfall der viel allgemeineren Tatsache, daß sie „Modulformen" sind, d. h. daß sie bei einer Substitution der Hauptkongruenzgruppe einer gewissen Stufe N

$$\tau_1 = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a \equiv d \equiv 1, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{N}$$

bis auf eine Potenz von $c\tau + d$ unverändert bleiben.

Nun hat Herr Hilbert für mehrere Veränderliche Substitutionen betrachtet, welche als Verallgemeinerungen betrachtet werden können von den gewöhnlichen „rationalen“ Modulsubstitutionen in einer Veränderlichen. Es sind dies die Substitutionen

$$\tau_1^{(1)} = \frac{\alpha^{(1)}\tau^{(1)}+\beta^{(1)}}{\gamma^{(1)}\tau^{(1)}+\delta^{(1)}}, \quad \tau_1^{(2)} = \frac{\alpha^{(2)}\tau^{(2)}+\beta^{(2)}}{\gamma^{(2)}\tau^{(2)}+\delta^{(2)}}, \quad \ldots, \quad \tau_1^{(n)} = \frac{\alpha^{(n)}\tau^{(n)}+\beta^{(n)}}{\gamma^{(n)}\tau^{(n)}+\delta^{(n)}},$$

für die

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ganz}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \text{total-positive Einheit des Körpers } K.$$

Hier sind $\alpha^{(p)}, \beta^{(p)}, \gamma^{(p)}, \delta^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ die Konjugierten der ganzen Körperzahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Wir werden die Gruppe dieser Substitutionen (*Modulgruppe in n Veränderlichen*) mit Γ oder auch mit $\Gamma(1)$ bezeichnen. Diejenige Untergruppe von Γ, für deren Substitutionen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist, werden wir die *engere Modulgruppe in n Veränderlichen* nennen, sie soll mit Γ_1 oder auch mit $\Gamma_1(1)$ bezeichnet werden. Kongruenzuntergruppen von Γ bzw. von Γ_1 erhält man, wenn man die Substitutionskoeffizienten noch gewissen Kongruenzbedingungen unterwirft. Diejenigen Substitutionen von Γ bzw. von Γ_1, für die noch

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{n}} \quad (\mathfrak{n} \text{ ein ganzes Ideal in } K)$$

ist, bilden die *Hauptkongruenzgruppe* $\Gamma(\mathfrak{n})$ *der Stufe* $\mathfrak{n}$ bzw. *engere Hauptkongruenzgruppe* $\Gamma_1(\mathfrak{n})$ *der Stufe* $\mathfrak{n}$.

Herr Blumenthal hat die Ansätze Hilberts ausgearbeitet und in zwei Abhandlungen ausführlich dargestellt[1]). Von seinen Resultaten erwähne ich bloß folgendes:

Die Gruppe Γ ist im $\frac{1}{2^n}$-Teilraum

$$\mathfrak{J}(\tau^{(1)}) > 0, \ \mathfrak{J}(\tau^{(2)}) > 0, \ \ldots, \ \mathfrak{J}(\tau^{(n)}) > 0 \qquad (\text{Teilraum } T)$$

eigentlich diskontinuierlich und besitzt dort einen Fundamentalbereich.

Es läßt sich nun sehr leicht beweisen, daß die Gruppen Γ_1, $\Gamma(\mathfrak{n})$, $\Gamma_1(\mathfrak{n})$ einen endlichen Index innerhalb Γ haben, und hieraus folgt sofort, daß der eben erwähnte Blumenthalsche Satz auch für diese Gruppen gültig ist.

Es entsteht jetzt die Aufgabe, die Reihen vom Typus (1) vom Standpunkte der Theorie der Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen aus zu untersuchen, und diese Aufgabe soll in der vorliegenden Abhandlung behandelt werden. Dabei werden allgemein „mehrfache ϑ-Reihen des Körpers K“ eingeführt. Für diese Reihen wird sich herausstellen, daß sie *ganze Modulformen* in den Veränderlichen $\tau^{(p)}$ sind. Dabei sind ganze

---

[1]) Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen, Math. Annalen **56** (1903), S. 509—548 und **58** (1904), S. 497—527.

Modulformen der Stufe $\mathfrak{n}$ definiert als solche Funktionen der n Veränderlichen $\tau^{(p)}$, die sich bei den Substitutionen der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{n})$ bzw. $\Gamma_1(\mathfrak{n})$ bloß um eine Potenz von

$$\prod_{p=1}^{n}(\gamma^{(p)}\tau^{(p)}+\delta^{(p)})$$

als Faktor ändern und überdies noch gewissen Regularitätsbedingungen genügen [2]). Falls diese Eigenschaft bloß gilt in bezug auf die engere Gruppe $\Gamma_1(\mathfrak{n})$, werde ich von *Modulformen in engerem Sinne* reden.

Diese Eigenschaft der ϑ-Reihen, ganze Modulformen in mehreren Veränderlichen darzustellen, ist der Hauptgrund, weshalb man diesen Funktionen ein besonderes Interesse entgegenbringen muß. Für die Theorie der Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen beweisen sie durch ihr Dasein unmittelbar gewisse Existenzsätze.

Die ϑ-Reihen werden betrachtet in einer Gestalt, die etwas verschieden ist von der Gestalt, in der Herr Hecke die Reihen betrachtet. Diese neue Gestalt hat auch für die Anwendungen gewisse Vorteile. Um diese Vorteile zu illustrieren, gebe ich in § 2 einen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, der formal etwas einfacher ist als der Heckesche Beweis [3]) (obgleich der Beweis prinzipiell natürlich mit dem Heckeschen Beweis identisch ist).

Weiter bediene ich mich der folgenden Bezeichnungen und Abkürzungen:

$K = K^{(1)}$ ist ein total-reeller algebraischer Zahlkörper n-ten Grades. Algebraische Zahlen in K werden durch kleine griechische Buchstaben, wie $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bezeichnet und die Konjugierten durch obere Indizes $\alpha^{(p)}, \beta^{(p)}, \gamma^{(p)}, \ldots$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$. Es sind aber immer $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}$ unabhängige komplexe Variable, die auf den Teilraum T eingeschränkt sein sollen und wobei $\tau^{(p)}$ dem zu K konjugierten Körper $K^{(p)}$ zugeordnet ist. Ideale in K werden wie immer durch kleine deutsche Buchstaben bezeichnet. Der Buchstabe $\mathfrak{d}$ wird reserviert für die Differente von K. Ausnahmen von diesen Regeln werden immer ausdrücklich erwähnt.

Es ist immer

$$Q(\xi) = Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) = \sum_{i,k=1}^{N} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k \qquad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$$

eine total-positiv-definite quadratische Form, deren Koeffizienten α_{ik} ganze Zahlen des Körpers K sind (mit Ausnahme des Hilfssatzes in § 1,

---

[2]) Vergleiche für die genaue Definition meine Abhandlung „Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen", Abh. a. d. math. Sem. d. Hamburgischen Univ. 6 (1928), S. 163—188.

[3]) Hecke, Algebraische Zahlen, § 59.

wo die Koeffizienten von Q noch willkürlich reell sein dürfen). Weiter schreiben wir

$$Q^{(p)}(\xi^{(p)}) = Q^{(p)}(\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots, \xi_N^{(p)}) = \sum_{i,k=1}^{N} \alpha_{ik}^{(p)} \xi_i^{(p)} \xi_k^{(p)},$$

wo

$$(2) \qquad \xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots, \xi_N^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, N)$$

N Systeme von reellen Variablen sind. Falls für die ξ Körperzahlen substituiert werden, sollen die Systeme (2) natürlich wieder in bezug auf K konjugierte Zahlensysteme sein.

Es bedeutet weiter $N(F)$ (*Norm von* F), wo F irgendein Ausdruck ist in gewissen Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots, \tau, \ldots$, ein Produkt von n Faktoren, die man erhält, wenn man die in F eingehenden Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots, \tau, \ldots$ durch $\alpha^{(p)}, \beta^{(p)}, \ldots, \tau^{(p)}, \ldots$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ ersetzt. Eine ähnliche Festsetzung gilt für die *Spur* $S(F)$ eines Ausdrucks F. So schreiben wir $N(\gamma\tau + \delta)$ statt

$$(\gamma^{(1)}\tau^{(1)} + \delta^{(1)})(\gamma^{(2)}\tau^{(2)} + \delta^{(2)}) \ldots (\gamma^{(n)}\tau^{(n)} + \delta^{(n)})$$

und $SQ(\xi)$ statt

$$\sum_{p=1}^{n} Q^{(p)}(\xi^{(p)}).$$

Alle Formeln, Gleichungen oder Ungleichungen, in denen die oberen Indizes fehlen, sind immer Abkürzungen für die n *„konjugierten" Formeln, Gleichungen oder Ungleichungen.* So bedeutet $\alpha > 0$, daß die Zahlen $\alpha^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ alle positiv, d. h. α total-positiv ist. Dagegen wird eine Ungleichung wie $\alpha^{(p)} > 0$ sich bloß auf die eine Konjugierte $\alpha^{(p)}$ beziehen.

§ 1.

Die ϑ-Reihen des Körpers und ihr Verhalten bei der Substitution $-\frac{1}{\tau}$.

Hilfssatz. Es sei

$$Q(u) = Q(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i,k=1}^{N} \alpha_{ik} u_i u_k \qquad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$$

eine positiv-definite quadratische Form mit reellen Koeffizienten und mit der Determinante $\|\alpha_{ik}\| = \Delta$. Es sei A_{ik} die Unterdeterminante von α_{ik} in Δ und

$$Q'(u) = Q'(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i,k=1}^{N} A_{ik} u_i u_k \text{ [4]}.$$

---

[4]) Es ist also $\Delta^{-1} Q'$ die zu Q inverse Form.

Weiter sei $t > 0$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ seien beliebige reelle Zahlen. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{-\pi t Q(u)} e^{2\pi i \sum_{q=1}^{N} \alpha_q u_q} du_1 du_2 \ldots du_N = \frac{1}{\sqrt{\Delta \cdot t^N}} e^{-\pi \frac{Q'(\alpha)}{t\Delta}},$$

wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist.

Beweis. Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t \alpha_{11} u_1^2} e^{2\pi i \alpha_1 u_1} du_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11} \cdot t}} e^{-\pi \frac{\alpha_1^2}{t \cdot \alpha_{11}}} \qquad (\alpha_{11} > 0).$$

Für $N = 1$ ist die Behauptung also wahr. Es werde jetzt angenommen, daß die Behauptung für $(N-1)$-fache Integrale schon bewiesen ist. Um dann das N-fache Integral J_N zu berechnen, führe man statt u_1 die neue Veränderliche

$$v = u_1 + \sum_{q=2}^{N} \frac{\alpha_{1q}}{\alpha_{11}} u_q$$

ein. Dann wird

$$Q(u) = \alpha_{11} v^2 + Q_1(u),$$

wo

$$Q_1(u) = \sum_{i,k=2}^{N} \beta_{ik} u_i u_k, \quad \beta_{ik} = \alpha_{ik} - \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1k}}{\alpha_{11}} \qquad (i, k = 2, 3, \ldots, N).$$

Schreibt man noch

$$\beta_q = \alpha_q - \frac{\alpha_{1q}}{\alpha_{11}} \alpha_1 \qquad (q = 2, 3, \ldots, N),$$

so geht das zu berechnende Integral über in ein Produkt von zwei Integralen:

$$J_N = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t \alpha_{11} v^2} e^{2\pi i \alpha_1 v} dv \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{-\pi t Q_1(u)} e^{2\pi i \sum_{q=2}^{N} \beta_q u_q} du_2 \ldots du_N.$$

Ist Δ_1 die Determinante von Q_1 und B_{ik} die Unterdeterminante von β_{ik} in Δ_1 $(i, k = 2, 3, \ldots, N)$, so wird also

$$(3) \qquad J_N = \frac{1}{\sqrt{t \cdot \alpha_{11}}} e^{-\pi \frac{\alpha_1^2}{t\alpha_{11}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \cdot t^{N-1}}} e^{-\frac{\pi}{t\Delta_1} \sum_{i,k=2}^{N} B_{ik} \beta_i \beta_k}$$

Nun beweist man aber leicht die Beziehungen

$$\Delta = \alpha_{11} \Delta_1, \quad A_{ik} = \alpha_{11} B_{ik} \qquad (i, k = 2, 3, \ldots, N)$$

und hieraus folgt unter Anwendung der zwischen den α_{ik} und A_{ik} bestehenden identischen Relationen, daß

$$\sum_{i,k=2}^{N} B_{ik} \beta_i \beta_k = \frac{1}{\alpha_{11}} Q'(\alpha) - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_{11}} \Delta.$$

Setzt man dies in (3) ein, so findet man für J_N den behaupteten Wert. Wenn die Behauptung für $(N-1)$-fache Integrale wahr ist, muß sie also auch für N-fache Integrale gelten. Weil sie für $N=1$ wahr ist, gilt sie also allgemein.

Von jetzt an werden wir voraussetzen, daß die Koeffizienten der quadratischen Form ganze algebraische Zahlen des Körpers K sind $(\alpha_{ik}=\alpha_{ki})$. Die Unterdeterminanten A_{ik} von α_{ik} in Δ, die Koeffizienten der Form Q', sind also auch ganze algebraische Zahlen in K und es ist auch $A_{ik}=A_{ki}$. Die Form Q sei weiter total-positiv-definit [5]). Dasselbe gilt dann bekanntlich auch für die Form Q'. Mit den üblichen Heckeschen Methoden wollen wir dann beweisen den

Satz 1. *Es seien die $t^{(p)}$ $(p=1,2,\ldots,n)$ positive Veränderliche und die $u_q^{(p)}$ $(q=1,2,\ldots,N;\ p=1,2,\ldots,n)$ willkürliche reelle Veränderliche. Es seien weiter $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots,\mathfrak{a}_N$ ganze Ideale in K und d die Determinante von K. Dann gilt folgende Transformationsformel:*

$$\sum_{\xi_q\equiv 0(\mathfrak{a}_q)} e^{-\pi S(tQ(\xi+u))} = \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_N)\cdot|d|^{\frac12 N}\cdot N(\Delta)^{\frac12}\cdot N(t)^{\frac12 N}}$$

$$\times \sum_{\eta_q\equiv 0\left(\frac{1}{\mathfrak{a}_q\mathfrak{d}}\right)} e^{-\pi S\left(\frac{Q'(\eta)}{t\Delta}\right)} e^{-2\pi i S\left(\sum_{q=1}^{N} u_q\eta_q\right)},$$

wo sämtliche Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind.

Beweis. Es sei $\omega_{q1},\omega_{q2},\ldots,\omega_{qn}$ eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}_q$ $(q=1,2,\ldots,N)$. Dann ist für eine Zahl des Ideals $\mathfrak{a}_q$

$$\xi_q^{(p)}=\sum_{s=1}^{n} m_{qs}\,\omega_{qs}^{(p)} \qquad (p=1,2,\ldots,n;\ q=1,2,\ldots,N)$$

mit ganzen rationalen m_{qs}. Wir betrachten noch die Veränderlichen $x_q^{(p)}$, welche bestimmt sind durch die N Gleichungssysteme

$$u_q^{(p)}=\sum_{s=1}^{n} x_q^{(s)}\,\omega_{qs}^{(p)} \qquad (p=1,2,\ldots,n;\ q=1,2,\ldots,N).$$

Die x lassen sich dann in den u folgendermaßen ausdrücken:

$$x_q^{(p)}=\sum_{s=1}^{n} u_q^{(s)}\,\Omega_{qp}^{(s)},$$

wo bekanntlich die Zahlen $\Omega_{q1},\Omega_{q2},\ldots,\Omega_{qn}$ eine Basis bilden für das Ideal $\frac{1}{\mathfrak{a}_q\mathfrak{d}}$ $(q=1,2,\ldots,N)$.

---

[5]) Die Determinante Δ ist also speziell eine ganze total-positive Zahl.

Die Funktion im linken Glied der zu beweisenden Formel läßt sich dann schreiben:

$$\varphi(t) = \sum_{m_{qs}=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\pi \sum_{p=1}^{n} t^{(p)} \sum_{i,k=1}^{N} \alpha_{ik}^{(p)} (\xi_i^{(p)} + u_i^{(p)})(\xi_k^{(p)} + u_k^{(p)})\right\}$$

$$= \sum_{m_{qs}=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\pi \sum_{p=1}^{n} t^{(p)} \sum_{i,k=1}^{N} \alpha_{ik}^{(p)} \left(\sum_{s=1}^{n} \omega_{is}^{(p)} (m_{is} + x_i^{(s)})\right)\right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{s=1}^{n} \omega_{ks}^{(p)} (m_{ks} + x_k^{(s)})\right)\right\}.$$

Nun gilt aber folgende Fourierentwicklung. Für irgendeine Funktion von r reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ist

$$(4) \qquad \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_r = -\infty}^{+\infty} f(m_1 + x_1, m_2 + x_2, \ldots, m_r + x_r)$$

$$= \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_r = -\infty}^{+\infty} A(m_1, m_2, \ldots, m_r)\, e^{-2\pi i \sum_{l=1}^{r} m_l x_l},$$

wo die Fourierkoeffizienten gegeben sind durch

$$A(m) = A(m_1, m_2, \ldots, m_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \!\!\cdots\! \int f(v_1, v_2, \ldots, v_r)\, e^{2\pi i \sum_{l=1}^{r} m_l v_l}\, dv_1\, dv_2, \ldots, dv_r.$$

Man wende diese Formel nun an auf die Funktion $\varphi(t)$, betrachtet als Funktion der $r = Nn$ Veränderlichen $x_q^{(p)}$. Dann wird der Fourierkoeffizient

$$(5) \qquad A(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \!\!\cdots\! \int \exp\left\{-\pi \sum_{p=1}^{n} t^{(p)} \sum_{i,k=1}^{N} \alpha_{ik}^{(p)} \left(\sum_{s=1}^{n} \omega_{is}^{(p)} v_i^{(s)}\right)\left(\sum_{s=1}^{n} \omega_{ks}^{(p)} v_k^{(s)}\right)\right\}$$

$$\times e^{2\pi i \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{N} m_{qp} v_q^{(p)}} \cdot dV,$$

wo zur Abkürzung

$$dV = \prod_{p=1}^{n} \prod_{q=1}^{N} d v_q^{(p)}$$

geschrieben ist. In diesem Integral führe man neue Veränderliche w ein durch

$$w_q^{(p)} = \sum_{s=1}^{n} \omega_{qs}^{(p)} v_q^{(s)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n;\; q = 1, 2, \ldots, N).$$

Dann ist umgekehrt

$$v_q^{(p)} = \sum_{s=1}^{n} \Omega_{qp}^{(s)} w_q^{(s)},$$

und die Funktionaldeterminante ist

$$\left|\frac{\partial(w)}{\partial(v)}\right| = N(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_N) \cdot |d|^{\frac{1}{2}N}.$$

Schreibt man weiter

$$(6) \qquad \eta_q = \sum_{s=1}^{n} m_{qs}\Omega_{qs}, \qquad \text{so daß} \qquad \eta_q \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{1}{\mathfrak{a}_q \mathfrak{b}}\right),$$

so ist

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{N} m_{qp} v_q^{(p)} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{N} w_q^{(p)} \eta_q^{(p)}.$$

Das Integral (5) zerfällt jetzt in das Produkt von n Integralen von dem Typus, der in dem vorangehenden Hilfssatz berechnet ist. Man findet unter Anwendung dieses Hilfssatzes

$$(7) \quad A(m) = \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_N)\cdot|d|^{\frac{1}{2}N}} \prod_{p=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\!\int e^{-\pi t^{(p)} Q^{(p)}(w^{(p)})}\, e^{2\pi i \sum_{q=1}^{N} w_q^{(p)}\eta_q^{(p)}}\, dw_1^{(p)}\, dw_2^{(p)} \ldots dw_N^{(p)}$$

$$= \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_N)\cdot|d|^{\frac{1}{2}N}\cdot N(\Delta)^{\frac{1}{2}}\cdot N(t)^{\frac{1}{2}N}}\, e^{-\pi S\left(\frac{Q'(\eta)}{t\Delta}\right)},$$

wo die m mit den η durch (6) zusammenhängen.

In (4) hat man weiter statt $\sum_{l=1}^{r} m_l x_l$ zu lesen

$$(8) \qquad \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{N} m_{qp} x_q^{(p)} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{N} u_q^{(p)} \eta_q^{(p)} = S\left(\sum_{q=1}^{N} u_q \eta_q\right).$$

Wenn man nun (7) und (8) in (4) einsetzt und dabei noch (6) beachtet, ist die Behauptung bewiesen.

Es seien jetzt $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{a}$ solche ganze Ideale des Körpers K, daß $\mathfrak{m}\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}$ ein Hauptideal (λ) ist, und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_N$ seien Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$. Weiter seien die komplexen Veränderlichen $\tau^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ auf den Teilraum T eingeschränkt. Wir definieren dann

$$(9) \qquad \vartheta(\tau; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda) = \sum_{\xi_q \equiv \varrho_q (\mathfrak{m}\mathfrak{a})} e^{\pi i S\left(\frac{\tau Q(\xi)}{|\lambda|}\right)}.$$

Später werden wir noch voraussetzen, daß die Zahl λ total-positiv ist. Vorläufig kann die Signatur von λ aber noch willkürlich sein.

Unser Ziel ist, das Verhalten der Reihen (9) bei Modulsubstitutionen zu untersuchen. Das Verhalten bei der Substitution $-\frac{1}{\tau}$ läßt sich jetzt schon aus dem Satz 1 ableiten.

Erstens gilt die Formel des Satzes 1 als analytische Formel auch noch für komplexe Werte der Veränderlichen $t^{(p)}$, solange die Reihen auf der linken und rechten Seite noch konvergieren, d. h. solange diese Veränderlichen einen positiven Realteil besitzen. Dabei ist dann

$$N(t)^{\frac{1}{2}N} = \left(\sqrt{t^{(1)}}\sqrt{t^{(2)}}\ldots\sqrt{t^{(n)}}\right)^N, \qquad \left|\arg\sqrt{t^{(p)}}\right| < \frac{\pi}{4} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

zu nehmen.

Um jetzt die Transformationsformel für die Funktion (9) abzuleiten, nehme man in Satz 1 speziell $\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{a}_q$ $(q = 1, 2, \ldots, N)$ und wähle für die Veränderliche $u_q^{(p)}$ die speziellen Werte $\varrho_q^{(p)}$. Weiter schreibe man $\frac{-i\tau}{|\lambda|}$ statt t. Dadurch geht die linke Seite der Formel des Satzes 1 in die Funktion (9) über. Auf der rechten Seite führe man weiter statt der η_q die neuen Summationsveränderlichen ξ_q durch

$$\xi_q = \eta_q \lambda \qquad (q = 1, 2, \ldots, N)$$

ein. Beachtet man dann noch, daß

$$|d| = N(\mathfrak{d}), \qquad |N(\lambda)| = N(\mathfrak{m}) \cdot N(\mathfrak{a})^2 \cdot N(\mathfrak{d}),$$

so entsteht folgende Formel:

$$\vartheta(\tau; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda)$$

$$= \frac{1}{N(\mathfrak{m})^{\frac{1}{2}N} \cdot N(\varDelta) \cdot N(-i\tau)^{\frac{1}{2}N}} \sum_{\xi_q \equiv 0(\mathfrak{a})} e^{-\pi i S\left(\frac{Q'(\xi)}{\tau \varDelta |\lambda|}\right)} e^{-2\pi i S\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{q=1}^{N} \varrho_q \xi_q\right)} \left(\left|\arg \sqrt{-i\tau}\right| < \frac{\pi}{4}\right).$$

Hier schreibe man noch

$$\sum_{\xi_q \equiv 0(\mathfrak{a})} = \sum_{\substack{\alpha_q \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{m} \\ \alpha_q \equiv 0(\mathfrak{a})}} \; \sum_{\xi_q \equiv \alpha_q (\mathfrak{a}\mathfrak{m})}$$

Ist aber $\xi_q \equiv \alpha_q (\mathfrak{a}\mathfrak{m})$, so ist wegen $\alpha_q \equiv 0(\mathfrak{a})$:

$$e^{-2\pi i S\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{q=1}^{N} \varrho_q \xi_q\right)} = e^{-2\pi i S\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{q=1}^{N} \varrho_q \alpha_q\right)}$$

Dadurch gelangt man zu dem folgenden

Satz 2. *Es gilt die Transformationsformel*

$$\vartheta(\tau; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda)$$

$$= \frac{1}{N(\mathfrak{m})^{\frac{1}{2}N} \cdot N(\varDelta)^{\frac{1}{2}} \cdot N(-i\tau)^{\frac{1}{2}N}} \sum_{\substack{\alpha_q \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{m} \\ \alpha_q \equiv 0(\mathfrak{a})}} e^{-2\pi i S\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \varrho_q\right)} \vartheta\left(-\frac{1}{\tau \varDelta}; Q'; \alpha_q, \mathfrak{a}; \lambda\right),$$

wo

$$\left|\arg \sqrt{-i\tau}\right| < \frac{\pi}{4}$$

und die übrigen Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind.

§ 2.

Die allgemeinen Gaußschen Summen des Körpers und ihre Berechnung.

Bevor wir zur Bestimmung des Verhaltens der ϑ-Funktionen bei willkürlichen Modulsubstitutionen übergehen, ist es notwendig, einige Betrachtungen über die allgemeinen Gaußschen Summen des Zahlkörpers vorangehen zu

lassen. Für die Beweise der in diesem Paragraph auftretenden Formeln werde ich meistenteils auf Kapitel VIII von Heckes „Algebraische Zahlen" verweisen, weil vieles mit dort dargestellten Beweisen weitgehend analog verläuft. Es sei

$$\omega = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}} \qquad ((\mathfrak{q}, \mathfrak{r}) = 1)$$

eine Körperzahl. Wir definieren dann die Gaußschen Summen in der Gestalt

$$S(\omega; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda) = \sum_{\substack{\alpha_q \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{r} \\ \alpha_q \equiv \varrho_q (\mathfrak{m}\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\omega Q(\alpha)}{\lambda}\right)},$$

wobei wir ausdrücklich immer $\lambda > 0$ voraussetzen. Diese Definition ist formal etwas verschieden von der Form, in der Herr Hecke die Gaußschen Summen einführt[6]).

Um die Reziprozitätsformel für diese Summen abzuleiten, schreibe man in der Formel des Satzes 2

$$\tau = \tau_1 + 2\omega$$

und untersuche man das Verhalten der beiden Seiten dieser Formel, falls $\tau_1 \to 0$. Man erhält dann folgendes Resultat[7]):

Satz 3. *Es ist*

$$S(\omega; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda)$$

$$(10) \qquad = \frac{e^{\frac{N\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\omega)}}{|N(8\mathfrak{m}\omega)|^{\frac{1}{2}N} \cdot N(\Delta)^{N-\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{\beta_q \bmod 4\mathfrak{m}\mathfrak{a}\Delta\mathfrak{q} \\ \beta_q \equiv 0 (\mathfrak{a})}} e^{-2\pi i S\left(\frac{Q'(\beta)}{4\omega\Delta\lambda}\right)} e^{-2\pi i S\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{q=1}^{N} \varrho_q \beta_q\right)}.$$

Mit Hilfe dieser Formel wollen wir die Gaußschen Summen in einem speziellen Fall berechnen. Es sei

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1q} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{q1} & \alpha_{q2} & \cdots & \alpha_{qq} \end{vmatrix} \qquad (q = 1, 2, \ldots, N),$$

so daß Δ_N mit Δ identisch ist. Dann gilt

Satz 4. *Falls*

$$(\beta, \delta) = 1, \quad \beta \equiv 0 \pmod{2\mathfrak{m}}, \quad \beta = 2\beta_1, \quad \delta \equiv 1 \pmod{4\mathfrak{m}}, \quad (\delta, \Delta_q) = 1$$
$$(q = 1, 2, \ldots, N),$$

---

[6]) Hecke, Algebraische Zahlen, S. 220, und Gött. Nachr. 1919.

[7]) Vergleiche für den Beweis: Hecke, Algebraische Zahlen, § 56.

so ist

$$S = \sum_{\substack{\xi_q \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\delta \\ \xi_q \equiv \varrho_q (\mathfrak{m}\mathfrak{a})}} e^{\pi i S \frac{\beta Q(\xi)}{\delta\lambda}} = \left(\frac{\beta_1}{\delta}\right)^N \cdot \left(\frac{\Delta}{\delta}\right) \cdot e^{\frac{N\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\delta - 1)} \cdot |N(\delta)|^{\frac{1}{2}N}$$

Beweis. Wir wollen die Formel zuerst für den Fall $N = 1$ beweisen, d. h. wir berechnen zuerst

$$S_1 = \sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\delta \\ \xi \equiv \varrho (\mathfrak{m}\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S \frac{\beta_1 \alpha_{11} \xi^2}{\delta\lambda}}.$$

Dazu bestimme man ein ganzes zu δ teilerfremdes Ideal $\mathfrak{c}$ derart, daß $\mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{c} = (\mu)$ ein Hauptideal ist. Ein vollständiges System ganzer Zahlen, welche mod $\mathfrak{m}\mathfrak{a}\delta$ inkongruent sind, und $\equiv \varrho(\mathfrak{m}\mathfrak{a})$ sind, erhält man dann, wenn man $\xi = \varrho + \mu\eta$ ansetzt, und η ein vollständiges Restsystem mod δ durchläuft. Dann ist

$$S_1 = \sum_{\eta \bmod \delta} e^{2\pi i S \frac{\beta_1 \alpha_{11} (\varrho + \mu\eta)^2}{\delta\lambda}}.$$

Jetzt schreibe man $\eta + \zeta$ statt η, wo die ganze Zahl ζ derart gewählt wird, daß

$$\eta\zeta + \varrho \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \delta\mathfrak{a}),$$

was wegen der gemachten Voraussetzungen möglich ist. Wegen $\beta_1 \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \mathfrak{m})$ folgt dann

$$(11) \qquad S_1 = \sum_{\eta \bmod \delta} e^{2\pi i S \frac{\beta_1 \alpha_{11} \eta^2 \mu^2}{\delta\lambda}} = \left(\frac{\beta_1 \alpha_{11}}{\delta}\right) \sum_{\eta \bmod \delta} e^{2\pi i S \frac{\eta^2 \mu^2}{\delta\lambda}} = \left(\frac{\beta_1 \alpha_{11}}{\delta}\right) \sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\delta \\ \xi \equiv 0 (\mathfrak{m}\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S \frac{\xi^2}{\delta\lambda}}.$$

Auf die Summe rechts wende man jetzt die Formel (10) an. Dann folgt wegen $\delta \equiv 1 \ (\operatorname{mod} 4\mathfrak{m})$, daß

$$\sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\delta \\ \xi \equiv 0 (\mathfrak{m}\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S \frac{\xi^2}{\delta\lambda}} = e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\delta)} \left| N\left(\frac{\delta}{8\mathfrak{m}}\right)\right|^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\xi \bmod 4\mathfrak{m}\mathfrak{a} \\ \xi \equiv 0 (\mathfrak{a})}} e^{-2\pi i S \frac{\delta\xi^2}{4\lambda}}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\delta)} \left| N\left(\frac{\delta}{8\mathfrak{m}}\right)\right|^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\xi \bmod 4\mathfrak{m}\mathfrak{a} \\ \xi \equiv 0 (\mathfrak{a})}} e^{-2\pi i S \frac{\xi^2}{4\lambda}}.$$

Die Summe rechts kann man berechnen, wenn man in dieser Formel $\delta = 1$ nimmt. Dann folgt

$$\sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\delta \\ \xi \equiv 0 (\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S \frac{\xi^2}{\delta\lambda}} = e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\delta - 1)} \cdot |N(\delta)|^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn man dies in (11) einsetzt, folgt hieraus die Behauptung in dem Spezialfall $N = 1$.

Es werde jetzt angenommen, daß die Behauptung für $(N-1)$-fache Summen schon bewiesen ist. Satz 4 wird bewiesen sein, wenn wir hieraus folgern, daß sie dann auch für N-fache Summen gilt.

Wegen der Voraussetzung $(\alpha_{11}, \delta) = (\Delta_1, \delta) = 1$ können wir ganze Zahlen α'_{1q} $(q = 1, 2, \ldots, N)$ finden, derart, daß

$$\alpha_{1q} \equiv \alpha_{11}\, \alpha'_{1q} \pmod{\delta}.$$

Weiter führen wir dann in der N-fachen Summe statt ξ_1 einen neuen Summationsbuchstaben ξ'_1 ein, welcher bestimmt wird durch

$$\xi'_1 = \xi_1 + \alpha'_{12}\xi_2 + \alpha'_{13}\xi_3 + \ldots + \alpha'_{1N}\xi_N.$$

Dann wird wegen $\beta \equiv 0 \pmod{2\mathfrak{m}}$ die Summe S das Produkt von zwei Summen:

$$S = \sum_{\substack{\xi'_1 \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\delta \\ \xi'_1 \equiv \varrho'_1 (\mathfrak{m}\mathfrak{a})}} e^{\pi i S \frac{\beta \alpha_{11} \xi_1'^2}{\delta\lambda}} \sum_{\substack{\xi_q \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\delta \\ \xi_q \equiv \varrho_q (\mathfrak{m}\mathfrak{a})}} e^{\pi i S \frac{\beta Q_1(\xi)}{\delta\lambda}},$$

wo

$$\varrho'_1 = \varrho_1 + \sum_{q=2}^{N} \alpha'_{1q}\varrho_q,$$

und $Q_1(\xi)$ die quadratische Form in $(N-1)$ Veränderlichen

$$Q_1(\xi) = \sum_{i,k=2}^{N} \beta_{ik}\xi_i\xi_k, \qquad \beta_{ik} = \alpha_{ik} - \alpha_{11}\,\alpha'_{1i}\alpha'_{1k} \qquad (i, k = 2, 3, \ldots, N)$$

ist. Die erste Summe ist eine einfache Summe, deren Wert bekannt ist. Weil wir angenommen haben, daß Satz 4 für $(N-1)$-fache Summen schon bewiesen ist, können wir auch die zweite Summe berechnen, falls δ mit den Determinanten

$$\Delta'_{q-1} = \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2q} \\ \beta_{32} & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{q2} & \beta_{q3} & \cdots & \beta_{qq} \end{vmatrix} \qquad (q = 2, 3, \ldots, N)$$

teilerfremd ist. Nun bestätigt man leicht, daß

$$\alpha_{11}\,\Delta'_{q-1} \equiv \Delta_q \pmod{\delta} \qquad (q = 2, 3, \ldots, N),$$

so daß die Determinanten Δ'_{q-1} wirklich mit δ teilerfremd sind, und wir finden deshalb

$$S = \left(\frac{\beta_1\alpha_{11}}{\delta}\right) e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\delta - 1)} |N(\delta)|^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\beta_1}{\delta}\right)^{N-1} \cdot \left(\frac{\Delta'_{N-1}}{\delta}\right) e^{\frac{(N-1)\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\delta - 1)} |N(\delta)|^{\frac{1}{2}(N-1)}.$$

Hieraus folgt die Behauptung, wenn man noch beachtet, daß $\alpha_{11}\,\Delta'_{N-1} \equiv \Delta \pmod{\delta}$.

Ich gebe jetzt noch kurz an, wie man aus den obigen Formeln einen einfachen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes für den total-reellen Körper K ableiten kann.

Es seien also α und β zwei teilerfremde ungerade ganze Zahlen von K, von denen eine, z. B. β, *primär*, d. h. Quadratrest mod 4 ist. Wir bestimmen dann erst ein ganzes, zu 2β primes Ideal $\mathfrak{m}$ derart, daß $\mathfrak{m}\mathfrak{d}$ ein total-positives Hauptideal (λ) ist. Jetzt berechnen wir auf zwei verschiedene Weisen den Wert der Summe

$$S = \sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{m}\beta \\ \xi \equiv 0(\mathfrak{m})}} e^{2\pi i S \frac{\alpha\xi^2}{\beta\lambda}}. \tag{12}$$

Erstens gibt die Formel (10):

$$S = e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\alpha\beta)} \cdot \left|N\left(\frac{\beta}{8\mathfrak{m}\alpha}\right)\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\xi \bmod 4\mathfrak{m}\alpha} e^{-2\pi i S \frac{\beta\xi^2}{4\alpha\lambda}}. \tag{13}$$

Nun ist aber $\mathfrak{m}\alpha$ nach Voraussetzung ungerade. Ist also $\mathfrak{c}$ ein zu $2\mathfrak{m}\beta$ teilerfremdes ganzes Ideal derart, daß $\mathfrak{m}\mathfrak{c}$ ein Hauptideal (μ) ist, so kann man ein vollständiges Restsystem mod $4\mathfrak{m}\alpha$ ansetzen in der Gestalt

$$\xi = \xi_1 \alpha\mu + 4\xi_2,$$

wo ξ_1 ein vollständiges Restsystem mod 4 und ξ_2 ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{m}\alpha$ durchläuft. Weil β primär ist, folgt dann

$$\sum_{\xi \bmod 4\mathfrak{m}\alpha} e^{-2\pi i S \frac{\beta\xi^2}{4\alpha\lambda}} = \sum_{\xi_1 \bmod 4} e^{-2\pi i S \frac{\beta\xi_1^2\mu^2\alpha}{4\lambda}} \sum_{\xi_2 \bmod \mathfrak{m}\alpha} e^{-2\pi i S \frac{4\beta\xi_2^2}{\alpha\lambda}}$$

$$= \left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}\alpha}\right) \sum_{\xi_1 \bmod 4} e^{-2\pi i S \frac{\xi_1^2\mu^2\alpha}{4\lambda}} \sum_{\xi_2 \bmod \mathfrak{m}\alpha} e^{-2\pi i S \frac{4\xi_2^2}{\alpha\lambda}} = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}\alpha}\right) \cdot \sum_{\xi \bmod 4\mathfrak{m}\alpha} e^{-2\pi i S \frac{\xi^2}{4\alpha\lambda}}.$$

Setzt man dies in (13) ein, so kommt

$$S = e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\alpha\beta)} \left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}\alpha}\right) \cdot \left|N\left(\frac{\beta}{8\mathfrak{m}\alpha}\right)\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\xi \bmod 4\mathfrak{m}\alpha} e^{-2\pi i S \frac{\xi^2}{4\alpha\lambda}}.$$

Nimmt man hier $\beta = 1$, so kommt

$$1 = e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\alpha)} \cdot \left|N\left(\frac{1}{8\mathfrak{m}\alpha}\right)\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\xi \bmod 4\mathfrak{m}\alpha} e^{-2\pi i S \frac{\xi^2}{4\alpha\lambda}},$$

und wenn man dies in dem Ausdruck für S einsetzt, so kommt

$$S = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}\alpha}\right) e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\alpha\beta - \operatorname{sgn}\alpha)} \cdot |N(\beta)|^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Andrerseits ist auch

$$S = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{m}\beta \\ \xi \equiv 0\,(\mathfrak{m})}} e^{2\pi i S \frac{\xi^2}{\beta\lambda}},$$

und die Summe rechts ist nichts andres, als die Summe S, nachdem $\alpha = 1$ genommen ist. Nach (14) ist also auch

$$S = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}}\right) e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\beta - 1)} \cdot |N(\beta)|^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Wenn man nun die beiden Ausdrücke (14) und (15) einander gleichsetzt, so findet man

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = (-1)^{S \frac{\operatorname{sgn}\alpha - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}\beta - 1}{2}}.$$

Eine ähnliche Methode liefert auch das quadratische Reziprozitätsgesetz in dem Falle, daß eine der Zahlen α oder β einen geraden Faktor enthält.

Setzt man noch speziell voraus, daß β das Quadrat eines Ideals und weiter total-positiv ist (d. h. β sei eine *total-positive singuläre Primärzahl*), so findet man aus (15)

$$\left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}}\right) = +1.$$

Dies ist gültig für *jede* total-positive singuläre Primärzahl. Nach bekannten Sätzen[8]) gehört also $\mathfrak{m}$ zum Hauptverband der Gruppe der absoluten Idealklassen von K, d. h. die Differente ϑ des Zahlkörpers ist einem Idealquadrat äquivalent.

§ 3.

Das Verhalten der ϑ-Reihen als ganze Modulformen[9]).

Es sei

$$\tau_1 = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

eine Substitution der Gruppe Γ. Es ist also die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ eine total-positive Einheit σ. Weiter machen wir noch die Annahmen

$$\alpha \equiv 0\ (\operatorname{mod} 2),\quad \delta \equiv 0\ (\operatorname{mod} 2\Delta). \tag{16}$$

---

[8]) Vgl. Hecke, Algebraische Zahlen, § 62.

[9]) Die Betrachtungen dieses Paragraphen verlaufen in genau derselben Weise, in der Herr Hecke das Verhalten seiner binären ϑ-Reihen bei Modulsubstitutionen untersucht (Math. Annalen **97** (1926), S. 210–242).

Wir wollen jetzt das Verhalten der Funktion (9) bei dieser Substitution ermitteln. Dazu schreibe man

$$\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{1}{\gamma(\gamma\tau+\delta)}.$$

In (9) schreibe man weiter

$$\sum_{\xi_q\equiv\varrho_q\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a})}=\sum_{\substack{\varkappa_q \bmod \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma\\ \varkappa_q\equiv\varrho_q\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a})}}\;\sum_{\xi_q\equiv\varkappa_q\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma)}$$

Wenn man dann noch beachtet, daß aus $\xi_q\equiv\varkappa_q\,(\bmod\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma)$ foglt, daß $Q(\xi)\equiv Q(\varkappa)\,(\bmod\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}^2\gamma)$, so findet man wegen der Voraussetzungen (16):

$$\vartheta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};Q;\varrho_q,\mathfrak{a};\lambda\right)=\sum_{\substack{\varkappa_q \bmod \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma\\ \varkappa_q\equiv\varrho_q\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a})}} e^{\pi i S\frac{\alpha Q(\varkappa)}{\gamma\lambda}}\sum_{\xi_q\equiv\varkappa_q\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma)} e^{-\pi i S\frac{Q(\xi)\cdot\sigma\,\mathrm{sgn}\,\gamma}{(\gamma\tau+\delta)\cdot|\gamma\lambda|}}$$

$$=\sum_{\substack{\varkappa_q \bmod \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma\\ \varkappa_q\equiv\varrho_q\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a})}} e^{\pi i S\frac{\alpha Q(\varkappa)}{\gamma\lambda}}\,\vartheta\left(\frac{-\sigma\,\mathrm{sgn}\,\gamma}{\gamma\tau+\delta};Q;\varkappa_q,\mathfrak{a};\lambda\gamma\right).$$

Auf der rechten Seite wende man jetzt Satz 2 an. Dann kommt

$$\vartheta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=\frac{N(-i(\gamma\tau+\delta)\,\mathrm{sgn}\,\gamma)^{\frac{1}{2}N}}{|N(\mathfrak{m}\gamma)|^{\frac{1}{2}N}\cdot N(\varDelta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sum_{\substack{\mu_q \bmod \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma\\ \mu_q\equiv 0\,(\mathfrak{a})}}\;\sum_{\substack{\varkappa_q \bmod \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma\\ \varkappa_q\equiv\varrho_q\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a})}} e^{\pi i S\left(\frac{\alpha Q(\varkappa)}{\gamma\lambda}\right)-2\pi i S\left(\frac{1}{\lambda\gamma}\sum_{q=1}^{N}\varkappa_q\mu_q\right)}\,\vartheta\left(\frac{\gamma\tau+\delta}{\varDelta\,\sigma\,\mathrm{sgn}\,\gamma};Q';\mu_q,\mathfrak{a};\lambda\gamma\right)$$

$$\left(\left|\arg\left(-i(\gamma\tau+\delta)\,\mathrm{sgn}\,\gamma\right)^{\frac{1}{2}}\right|<\frac{\pi}{4}\right).$$

Wegen (16) ist aber

$$\vartheta\left(\frac{\gamma\tau+\delta}{\varDelta\,\sigma\,\mathrm{sgn}\,\gamma};Q';\mu_q,\mathfrak{a};\lambda\gamma\right)=e^{\pi i S\frac{\delta Q'(\mu)}{\varDelta\sigma\gamma\lambda}}\cdot\vartheta\left(\frac{|\gamma|\tau}{\varDelta\sigma};Q';\mu_q,\mathfrak{a};\lambda\gamma\right).$$

Schreibt man weiter zur Abkürzung

$$\varphi(\varrho_q,\mu_q)=\sum_{\substack{\varkappa_q \bmod \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma\\ \varkappa_q\equiv\varrho_q\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a})}} e^{\pi i S\left(\frac{\alpha Q(\varkappa)}{\gamma\lambda}\right)-2\pi i S\left(\frac{1}{\lambda\gamma}\sum_{q=1}^{N}\varkappa_q\mu_q\right)+\pi i S\left(\frac{\delta Q'(\mu)}{\varDelta\sigma\gamma\lambda}\right)} \tag{17}$$

und bemerkt man, daß

$$\sum_{\substack{\mu_q \bmod \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma\\ \mu_q\equiv 0\,(\mathfrak{a})}}=\sum_{\substack{\nu_q \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{m}\\ \nu_q\equiv 0\,(\mathfrak{a})}}\;\sum_{\substack{\mu_q \bmod \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\gamma\\ \mu_q\equiv\nu_q\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a})}},$$

so findet man

$$(18)\quad \vartheta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=\frac{N(-i(\gamma\tau+\delta)\,\mathrm{sgn}\,\gamma)^{\frac{1}{2}N}}{|N(\mathfrak{m}\gamma)|^{\frac{1}{2}N}\cdot N(\Delta)^{\frac{1}{2}}}\sum_{\substack{\nu_q \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{m}\\ \nu_q\equiv 0\,(\mathfrak{a})}}\;\sum_{\substack{\mu_q \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\gamma\\ \mu_q\equiv\nu_q\,(\mathfrak{a}\mathfrak{m})}}\varphi(\varrho_q,\mu_q)\,\vartheta\left(\frac{|\gamma|\tau}{\Delta\sigma};Q';\mu_q,\mathfrak{a};\lambda\gamma\right).$$

Nun bestätigt man durch eine kleine Rechnung leicht, daß für die Summe $\varphi(\varrho_q,\mu_q)$ folgende Formel gültig ist.

Falls

$$\zeta_k=\frac{\delta}{\sigma\Delta}\sum_{i=1}^{N}A_{ik}\mu_i\qquad (k=1,2,\ldots,N),$$

wo wieder die A_{ik} die Unterdeterminanten der α_{ik} in Δ sind, so ist

$$(19)\qquad \varphi(\varrho_q+\zeta_q,\mu_q)=e^{\pi i S\left(\frac{\beta\delta Q'(\mu)}{\sigma^2\Delta\lambda}\right)}\,e^{2\pi i S\left(\frac{\beta}{\sigma\lambda}\sum_{q=1}^{N}\varrho_q\mu_q\right)}\,\varphi(\varrho_q,0).$$

Aus dieser Formel geht hervor, daß $\varphi(\varrho_q,\mu_q)$ nicht von den Restklassen mod $\mathfrak{m}\mathfrak{a}\gamma$ der μ_q abhängen, sondern bloß von den Restklassen mod $\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ der μ_q. In (18) ist also $\varphi(\varrho_q,\mu_q)=\varphi(\varrho_q,\nu_q)$. Weiter ist noch

$$\sum_{\substack{\mu_q \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\gamma\\ \mu_q\equiv\nu_q\,(\mathfrak{m}\mathfrak{a})}}\vartheta\left(\frac{|\gamma|\tau}{\Delta\sigma};Q';\mu_q,\mathfrak{a};\lambda\gamma\right)=\vartheta\left(\frac{\tau}{\Delta\sigma};Q';\nu_q,\mathfrak{a};\lambda\right).$$

Aus (18) findet man also folgenden

Satz 5. *Für eine Modulsubstitution, welche den Bedingungen* (16) *genügt, gilt*

$$(20)\quad \vartheta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};Q;\varrho_q,\mathfrak{a};\lambda\right)=\frac{N(-i(\gamma\tau+\delta)\,\mathrm{sgn}\,\gamma)^{\frac{1}{2}N}}{|N(\mathfrak{m}\gamma)|^{\frac{1}{2}N}\cdot N(\Delta)^{\frac{1}{2}}}\sum_{\substack{\nu_q \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{m}\\ \nu_q\equiv 0\,(\mathfrak{a})}}\varphi(\varrho_q,\nu_q)\,\vartheta\left(\frac{\tau}{\Delta\sigma};Q';\nu_q,\mathfrak{a};\lambda\right),$$

wo

$$\left|\arg\left(-i(\gamma\tau+\delta)\,\mathrm{sgn}\,\gamma\right)^{\frac{1}{2}}\right|<\frac{\pi}{4}$$

zu nehmen ist.

Diese Formel gestaltet sich besonders einfach, falls man noch annimmt, daß

$$\delta\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\,\mathfrak{m}\Delta).$$

Dann findet man nämlich aus (19), daß

$$\varphi(\varrho_q,\mu_q)=e^{2\pi i S\left(\frac{\beta}{\sigma\lambda}\sum_{q=1}^{N}\varrho_q\mu_q\right)}\,\varphi(\varrho_q,0).$$

Man setze dies in (20) ein, ersetze überall τ durch $-\frac{1}{\tau}$ und wende auf der rechten Seite noch einmal Satz 2 an. Man erhält dann folgende Formel

$$\vartheta\left(\frac{\beta\tau-\alpha}{\delta\tau-\gamma};\, Q;\, \varrho_q,\, \mathfrak{a};\, \lambda\right)$$

$$= \frac{N(-i(\gamma\tau+\delta)\operatorname{sgn}\gamma)^{\frac{1}{2}N}}{N(\mathfrak{m})^N\cdot|N(\gamma)|^{\frac{1}{2}N}}\,\varphi(\varrho_q, 0) \sum_{\substack{\mu_q \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{m}\\ \mu_q\equiv 0\,(\mathfrak{a})}} \sum_{\substack{\nu_q \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{m}\\ \nu_q\equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{1}{\sigma\lambda}\sum_{q=1}^{N}\nu_q(\beta\varrho_q-\sigma\mu_q)\right)}\,\vartheta(\sigma\tau;\, Q;\, \mu_q,\, \mathfrak{a};\, \lambda)$$

$$\left(\left|\arg(-i(\delta\tau-\gamma)\operatorname{sgn}\gamma)^{\frac{1}{2}}\right| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Nun ist aber

$$\sum_{\substack{\nu_q \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{m}\\ \nu_q\equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{1}{\sigma\lambda}\sum_{q=1}^{N}\nu_q(\beta\varrho_q-\sigma\mu_q)\right)} = 0 \quad \text{falls} \quad \beta\varrho_q-\sigma\mu_q \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}\mathfrak{m}};$$

$$= N(\mathfrak{m})^N \quad \text{falls} \quad \beta\varrho_q-\sigma\mu_q \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}.$$

Man findet also

$$\vartheta\left(\frac{\beta\tau-\alpha}{\delta\tau-\gamma};\, Q;\, \varrho_q,\, \mathfrak{a};\, \lambda\right) = \frac{N(-i(\delta\tau-\gamma)\operatorname{sgn}\gamma)^{\frac{1}{2}N}}{|N(\gamma)|^{\frac{1}{2}N}}\,\varphi(\varrho_q, 0)\,\vartheta\left(\sigma\tau;\, Q;\, \frac{\beta\varrho_q}{\sigma},\, \mathfrak{a};\, \lambda\right)$$

und deshalb durch Abänderung der Bezeichnungen

$$\vartheta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\, Q;\, \varrho_q,\, \mathfrak{a};\, \lambda\right) = \frac{N(-i(\gamma\tau+\delta)\operatorname{sgn}\delta)^{\frac{1}{2}N}}{|N(\delta)|^{\frac{1}{2}N}}\cdot \sum_{\substack{\xi_q \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}\delta\\ \xi_q\equiv\varrho_q\,(\mathfrak{m}\mathfrak{a})}} e^{\pi i S\frac{\beta Q(\xi)}{\delta\lambda}}$$

$$\times\,\vartheta\left(\sigma\tau;\, Q;\, \frac{\alpha\varrho_q}{\sigma},\, \mathfrak{a};\, \lambda\right),$$

falls

$$\beta \equiv 0 \pmod 2, \qquad \gamma \equiv 0 \pmod{2\mathfrak{m}\Delta}.$$

Die hier auftretende Gaußsche Summe kann man nach Satz 4 berechnen, falls man noch die folgenden Annahmen macht

$$\beta \equiv 0 \pmod{2\mathfrak{m}}, \qquad \delta \equiv 1 \pmod{4\mathfrak{m}}, \qquad (\delta, \Delta_q) = 1 \qquad (q = 1, 2, \ldots, N).$$

Unter diesen Voraussetzungen erhält man zuletzt folgende Formel:

$$\vartheta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\, Q;\, \varrho_q,\, \mathfrak{a};\, \lambda\right) = \left(\frac{\beta_1}{\delta}\right)^N \left(\frac{\Delta}{\delta}\right) e^{\frac{N\pi i}{4}S(\operatorname{sgn}\delta-1)}\, N(-i(\gamma\tau+\delta)\operatorname{sgn}\delta)^{\frac{1}{2}N}$$

$$\times\,\vartheta\left(\frac{\tau}{\sigma};\, Q;\, \alpha\varrho_q,\, \mathfrak{a};\, \lambda\right).$$

Wir setzen jetzt speziell voraus, daß wir mit einer Substitution der engeren Hauptkongruenzgruppe der Stufe $4\mathfrak{m}\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_N$ zu tun haben, d. h.

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{4\mathfrak{m}\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_N}, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = 1.$$

Durch Anwendung des Reziprozitätsgesetzes folgt

$$\left(\frac{\Delta}{\delta}\right) = 1.$$

Für *gerades* N ist weiter

$$e^{\frac{N\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\delta - 1)} N(-i \operatorname{sgn}\delta)^{\frac{1}{2}N} = 1$$

und wir gelangen jetzt zu dem folgenden Satz, der als der Hauptsatz dieser Abhandlung anzumerken ist:

Satz 6. *Falls N gerade ist, ist die Funktion $\vartheta(\tau; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda)$ eine ganze Modulform (im engeren Sinne) von der Stufe $4\mathfrak{m}\, \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_N$ und von der Dimension $-\frac{1}{2}N$* [10]).

§ 4.

Über die Darstellung ganzer Körperzahlen durch definite quadratische Formen, deren Koeffizienten ganze Körperzahlen sind.

In meiner unter [2]) zitierten Abhandlung habe ich eine allgemeine Methode angegeben zur Bestimmung asymptotischer Formeln für die Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen in mehreren Veränderlichen. Ein wesentliches Hilfsmittel dazu bildeten die verallgemeinerten Eisensteinschen Reihen vom Typus

$$(21) \qquad G_k(\tau; \varrho_l, \mathfrak{n}; \mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\varkappa_l \equiv \varrho_l (\mathfrak{n}\mathfrak{a}) \\ (\varkappa_1, \varkappa_2)_\mathfrak{n}}} \frac{N(\mathfrak{a})^k}{N(\varkappa_1 \tau + \varkappa_2)^k}.$$

Hier sind wieder $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}$ komplexe Veränderliche, die auf den Teilraum T eingeschränkt sind, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{a}$ sind ganze Ideale in K, und ϱ_1 und ϱ_2 sind Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$, und der Zusatz $(\varkappa_1, \varkappa_2)_\mathfrak{n}$ bedeutet, daß unter den Zahlenpaaren $\varkappa_1, \varkappa_2$ keine mod $\mathfrak{n}$ assoziierten Zahlenpaare auftreten sollen. Von diesen Reihen wurde nachgewiesen, daß sie ganze Modulformen der Stufe $\mathfrak{n}$ und der Dimension $-k$ bilden. Weiter wurden folgende Sätze bewiesen:

1. Zu jeder ganzen Modulform $F(\tau)$ gibt es eine lineare Verbindung $G(\tau)$ von endlich vielen Reihen vom Typus (21) derart, daß $F(\tau) - G(\tau)$ eine ganze Modulform einer gewissen Stufe ist, welche in allen Punkten $\tau = \mu$ (μ eine beliebige Körperzahl) verschwindet.

---

[10]) In der Definition des Begriffes „ganze Modulform“, die ich in meiner unter [2]) zitierten Abhandlung aufgestellt habe, muß eine ganze Modulform auch noch gewissen Regularitätsbedingungen genügen, welche sich auf das Verhalten der betreffenden Funktion in der Umgebung eines Punktes $\tau = \mu$ (μ eine Körperzahl) beziehen. Es muß nämlich noch eine Potenzreihenentwicklung bestehen in den „ortsuniformisierenden“ Variablen der Umgebung eines solchen Punktes. Daß diese Bedingungen für die obigen ϑ-Funktionen erfüllt sind, sieht man leicht ein, wenn man wie im Anfang dieses Paragraphen vorgeht. Allerdings ist dabei die Bedingung 3 auf S. 167 meiner genannten Abhandlung nur für die Stufe $8\mathfrak{m}\, \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_N$ erfüllt.

2. Falls

$$H(\tau) = \sum_{\nu \equiv 0\left(\frac{1}{\mathfrak{n}\mathfrak{d}}\right);\, \nu > 0} c(\nu)\, e^{2\pi i S(\nu\tau)}$$

eine ganze Modulform von der Stufe $\mathfrak{n}$ und von der Dimension $-k$ ($k \geqq 2$) ist, welche in allen Punkten $\tau = \mu$ (μ eine beliebige Körperzahl) verschwindet, so ist

$$c(\nu) = O\left(N(\nu)^{\frac{k}{2}}\right).$$

Wir wollen diese Sätze jetzt anwenden auf die spezielle Modulform $\vartheta(\tau; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda)$, falls $N = 2k$ gerade ist und $\geqq 6$. Dazu bestimmen wir nach 1. eine lineare Verbindung $G(\tau)$ von endlich vielen Reihen vom Typus (21) derart, daß

$$H(\tau) = \vartheta(\tau; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda) - G(\tau)$$

in sämtlichen Punkten $\tau = \mu$ (μ eine beliebige Körperzahl) verschwindet. Jetzt entwickeln wir ϑ, G und H in Fourierreihen des Körpers K. Erstens ist

$$\vartheta(\tau; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda) = \sum_{\nu \equiv 0(\mathfrak{a}^2);\, \nu > 0} A(\nu)\, e^{\pi i S\left(\frac{\nu\tau}{\lambda}\right)},$$

wo $A(\nu)$ die Anzahl der Darstellungen von ν durch die quadratische Form $Q(\xi)$ ist mit den Nebenbedingungen

$$\xi_q \equiv \varrho_q \pmod{m\mathfrak{a}} \qquad (q = 1, 2, \ldots, 2k).$$

Wie man die Fourierentwicklung der Reihen G_k und deshalb auch von $G(\tau)$ bestimmt, habe ich in § 2 meiner oben zitierten Abhandlung angegeben. Sie hat immer die Gestalt

$$G(\tau) = \sum_{\varkappa \equiv 0\left(\frac{1}{\mathfrak{n}\mathfrak{d}}\right);\, \varkappa > 0} N(\varkappa)^{k-1}\, \mathfrak{S}_1(\varkappa)\, e^{2\pi i S(\varkappa\tau)}.$$

Hier ist $\mathfrak{n}$ die Stufe von $G(\tau)$, und $\mathfrak{S}_1(\varkappa)$ ist eine gewisse arithmetische Funktion, welche von den Idealteilern von $\varkappa$ abhängt und nach oben beschränkt ist. Wendet man jetzt den Satz 2 an, so erhält man eine Formel von der folgenden Gestalt:

$$A(\nu) = N(\nu)^{k-1}\, \mathfrak{S}(\nu) + O\left(N(\nu)^{\frac{k}{2}}\right), \tag{22}$$

wo $\mathfrak{S}(\nu)$ praktisch mit $\mathfrak{S}_1(\varkappa)$ identisch ist. Um nun zu untersuchen, ob (22) wirklich eine asymptotische Formel ist, bleiben noch zwei Probleme übrig, und zwar

a) die formale Konstruktion der arithmetischen Funktion $\mathfrak{S}(\nu)$, falls die quadratische Form Q und $m, \varrho_q, \mathfrak{a}$ gegeben sind. Im wesentlichen ist $\mathfrak{S}(\nu)$ identisch mit der Hardy-Littlewood-Siegelschen „singulären Reihe“ [11]);

[11]) C. L. Siegel, Additive Theorie der Zahlkörper, Math. Annalen 87 (1922), S. 1—35 und 88 (1923), S. 184—210.

b) die Untersuchung der Funktion $\mathfrak{S}(\nu)$ in bezug auf die Frage, ob sie auch nach unten beschränkt ist.

Die Lösung des Problems a) gelingt mit den Methoden, welche ich in meiner Abhandlung [2]) angegeben habe. Man muß dazu die lineare Verbindung $G(\tau)$ der Reihen G_k wirklich bestimmen. Vor allem muß hier hervorgehoben werden, daß man in dieser Weise $\mathfrak{S}(\nu)$ sofort in geschlossener Form erhält, nämlich als Summe von Normen von Teilerpotenzen, während man bei Anwendung der Hardy-Littlewood-Siegelschen Methode $\mathfrak{S}(\nu)$ in Gestalt einer unendlichen Reihe („singuläre Reihe") erhält.

Um nun die lineare Verbindung $G(\tau)$ der $G_k(\tau)$ wirklich zu bestimmen, verwendet man zweckmäßig statt der Reihen G_k die durch

$$G_k^*(\tau; \varrho_l; \mathfrak{n}; \mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\varkappa_l \equiv \varrho_l\,(\mathfrak{n}\mathfrak{a}) \\ (\varkappa_1, \varkappa_2)_{\mathfrak{n}};\, \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{a}}, \frac{\varkappa_2}{\mathfrak{a}}\right) = (1)}} N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\varkappa_1 \tau + \varkappa_2}\right)^k$$

definierten Reihen. Hier finden folgende Resultate meiner Abhandlung [2]) Anwendung:

1. Man teile sämtliche Körperzahlen μ in folgender Weise in Klassen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_H$ ein. Zwei Körperzahlen μ und μ_1 sollen derselben Klasse angehören, falls sie bezüglich der Gruppe $\Gamma_1(\mathfrak{n})$ äquivalent sind. Die Anzahl dieser Klassen ist dann gleich

$$H = h\,\frac{N(\mathfrak{n})^2}{w(\mathfrak{n})} \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right),$$

wo $w(\mathfrak{n})$ die Anzahl der mod $\mathfrak{n}$ inkongruenten Einheiten und h die Klassenzahl im gewöhnlichen Sinne von K ist.

2. Es gibt genau H linear unabhängige Reihen G_k^*. Die Reihen G_k^* lassen sich ebenfalls in H Klassen einteilen, welche den unter 1. erwähnten Klassen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_H$ eineindeutig zugeordnet sind, und zwar folgendermaßen: Die Reihen G_k^* einer Klasse $\mathfrak{K}_m$ verschwinden in sämtlichen Punkten $\tau = \mu$, welche nicht der Klasse $\mathfrak{K}_m$ angehören. In den Punkten $\tau = \mu = -\frac{\delta}{\gamma}$, welche zur Klasse $\mathfrak{K}_m$ gehören, nimmt aber $N(\gamma\tau + \delta)^k\, G_k^*$ den Wert

$$N((\gamma, \delta))^k \sum_{\varepsilon} \frac{1}{N(\varepsilon)^k} = N((\gamma, \delta))^k A$$

an, falls $\mathfrak{a} = (\gamma, \delta)$ genommen ist und die Summation erstreckt werden muß über sämtliche $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$ verschiedener Signatur. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß A nicht verschwindet.

Man wähle aus jeder Klasse $\mathfrak{K}_m$ ein beliebiges G_k^*, welches wir durch $G_k^*(\tau; \mathfrak{K}_m)$ bezeichnen. Ebenso wähle man in jeder Klasse eine dazugehörige Körperzahl

$$\mu_m = -\frac{\delta_m}{\gamma_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, H).$$

Es sei weiter $F(\tau)$ eine ganze Modulform der Stufe $\mathfrak{n}$, für welche $N(\gamma_m \tau + \delta_m)^k \, F(\tau)$ im Punkte $-\frac{\delta_m}{\gamma_m}$ den Wert a_m annimmt. Dann ist die zu $F(\tau)$ gehörige Funktion $G(\tau)$ offenbar gegeben durch

$$G(\tau) = \frac{1}{A} \sum_{m=1}^{H} \frac{a_m}{N((\gamma_m, \delta_m))^k} G_k^*(\tau; \mathfrak{K}_m).$$

Für die Funktion

$$\vartheta(\tau; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda) \qquad (N = 2k)$$

ist

$$a_m = \frac{i^{nk} N((2\gamma_m, \delta_m))^{2k}}{N(4\mathfrak{m})^k \, N(\gamma_m)^k \, N(\Delta)^{\frac{1}{2}}} S\left(-\frac{\delta}{2\gamma}; Q; \varrho_q, \mathfrak{a}; \lambda\right).$$

Weiter lassen sich noch die G_k^* linear durch die G_k ausdrücken[12]), und damit ist dann die Bestimmung von $G(\tau)$ geleistet.

Die Lösung des Problems b) erfordert sehr komplizierte Rechnungen, welche sich aber in speziellen Fällen einfacher gestalten können. Für den Fall der Darstellung von ganzen Körperzahlen als Quadratsummen hat Herr Siegel[11]) die Untersuchung durchgeführt.

---

[12]) Loc. cit. [7]), S. 179, Formel (15).

(Eingegangen am 1. 7. 1929.)

Praktische Lösung der Grundaufgaben über Determinanten, Matrizen und lineare Transformationen.

(Beiträge zur praktischen Analysis, II.)

Von

R. Mehmke in Stuttgart.

Die folgende Mitteilung schließt sich an eine frühere[1]) an und enthält, wie diese, Beiträge zur „praktischen Analysis“. Nachstehende Aufgaben über eine vorgelegte Determinante oder rechteckige Matrix, mögen deren Elemente in Buchstaben oder in Zahlen bestehen, sowie über eine lineare Transformation, deren Konstanten ebenfalls entweder als Buchstaben oder als Zahlen gegeben sind, sollen behandelt werden: Den Rang einer Matrix zu ermitteln (Nr. 4), eine Determinante auszuwerten (Nr. 5 und 6), die zu einer linearen Transformation gehörigen Hamilton-Cayleysche und Säkular-Gleichung (wie auch die „Neumannsche Reihe“) aufzustellen (Nr. 7 und 8). Wohl sind von all diesen, an sich leichten Aufgaben symbolische Lösungen, mittels Determinanten, sehr lange bekannt, aber wer, außer einem geborenen Rechenkünstler, wird z. B. — was nach verbreiteter Meinung unter Umständen nötig sein soll, um etwa den Rang einer Matrix mit mehr als vier Zeilen zu finden — Determinanten von höherer als vierter Ordnung, besonders in größerer Anzahl, gern und ohne ein Gefühl der Unsicherheit ausrechnen? So halte ich es für notwendig, Aufgaben dieser Art auch vom Standpunkte des ausübenden Mathematikers zu betrachten und andere Lösungen als nur „mit dem Munde“ ins Auge zu fassen.

Das Hilfsmittel zur Lösung aller genannten (wie noch einer Reihe weiterer) Aufgaben, das ich auf Grund zahlreicher Versuche besonders empfehlen kann, besteht in dem schon in der erwähnten Mitteilung be-

---

[1]) „Zum Rechnen mit Potenzreihen“, Math. Annalen **99** (1928), S. 616–624.

nützten[2]) „beschleunigten" Eliminieren. Bei diesem wie bei dem hergebrachten „gewöhnlichen" Eliminieren spielen wertvolle Proben (Nr. 2 und 3) eine Rolle, die nach meinen Erkundigungen bei hervorragenden Sachkennern sogar für das gewöhnliche Eliminieren, wie es beim Auflösen von Ketten linearer Gleichungen immer noch geübt wird[3]), sonderbarerweise nicht bekannt zu sein scheinen. Anhangsweise wird ein „doppeltbeschleunigtes" Eliminieren und die Verwendung der Graßmannschen äußeren Multiplikation bei Integralgleichungen besprochen.

1. Symbolische Darstellung der Minoren einer Matrix.

Führt man in bekannter Weise linear unabhängige normale Einheiten $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ein und bildet aus ihnen mit Hilfe der Elemente einer Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

die Extensen[4])

$$\begin{aligned} &(1) \quad \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots = a \\ &(2) \quad \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \ldots = b \\ &(3) \quad \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \ldots = c \\ &(4) \quad \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \ldots = d \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so lassen sich außer den Elementen selbst auch die in der Matrix enthaltenen Minoren zweiter und höherer Ordnung sehr leicht als Graßmannsche innere Produkte jener Extensen und ihrer Graßmannschen äußeren Produkte in die Einheiten und ihre äußeren Produkte darstellen[5]). Denn

[2]) a. a. O. S. 622 ff.

[3]) Vgl. Anm. [14]).

[4]) H. Graßmann unterschied in seiner „Ausdehnungslehre" von 1844 intensive und extensive Größen. Statt des ersteren Ausdrucks hat sich der von Hamilton stammende „skalare Größe" oder „Skalar" eingebürgert. Dem letzteren ziehe ich „extense Größe" oder „Extense" vor, was sprachlich einwandfrei ist, weil im Lateinischen extensus und extensivus gleichbedeutend sind.

[5]) Mit Graßmann (Ausdehnungslehre von 1862 Nr. 138 = Werke I 2, S. 112) bezeichne ich innere Produkte durch einen senkrechten Strich zwischen den beiden Faktoren, äußere („kombinatorische") Produkte (wie Graßmann in seiner Ausdehnungslehre von 1862) durch Einschließen der Faktoren in eckige Klammern.

für beliebige Indizes $i, j, k, \ldots$ wird nicht nur

$$\alpha_i = a \mid e_i, \quad \beta_j = b \mid e_j, \quad \gamma_k = c \mid e_k, \quad \ldots,$$

sondern, wenn man zur Abkürzung beispielsweise Minoren zweiter und dritter Ordnung so bezeichnet:

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} = |\alpha\beta|_{ij},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{vmatrix} = |\alpha\beta\gamma|_{ijk}, \quad \text{usw.},$$

dann ergibt sich überdies:

$$|\alpha\beta|_{ij} = [ab \mid e_i e_j], \qquad |\alpha\beta\gamma|_{ijk} = [abc \mid e_i e_j e_k], \qquad \text{usw.}^{*)}.$$

Diese Darstellung eignet sich besonders gut, um die in der Einleitung erwähnten Proben und Vereinfachungen (s. Nr. 2 und 3), die bei den verschiedenen Arten des Eliminierens (Nr. 2) möglich sind, erkennen zu lassen.

2. Gewöhnliches und beschleunigtes Eliminieren.

Die zu Anfang betrachtete Matrix könnte statt zu den Ausdrücken (I) für die Extensen $a, b, c, \ldots$ auch zu den ebenso gebauten Linearformen der Zahlveränderlichen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, nämlich

$$(\mathrm{I}') \qquad \begin{aligned} &(1) \quad \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 + \ldots = \eta_1, \\ &(2) \quad \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 + \ldots = \eta_2, \\ &(3) \quad \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3 + \ldots = \eta_3, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

gehören. Gleich Null gesetzt geben diese Formen eine Kette linearer Gleichungen für die Unbekannten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$. Unter „gewöhnlichem" Eliminieren werde nun ein solches Vorgehen verstanden, bei dem erst eine und dieselbe der Größen ξ, etwa ξ_1 — oder beim Zugrundelegen der Gleichungen (I) die Einheit e_1 — wiederholt aus je zwei der Gleichungen entfernt wird — so daß man eine Gleichung und eine Unbekannte weniger erhält —, hiernach auf eine zweite Unbekannte, etwa ξ_2 (oder die Einheit e_2), dasselbe Verfahren angewendet wird, usw. Wir wollen uns hierbei an eine bestimmte Ordnung binden, und zwar soll Gleichung (1) der Reihe

*) Es steht $[ab \mid e_i e_j]$ für $[ab] \mid [e_i e_j]$, $[abc \mid e_i e_j e_k]$ für $[abc] \mid [e_i e_j e_k]$, usw., d. h. man muß die äußeren Produkte $[ab]$, $[e_i e_j]$, $[abc]$, $[e_i e_j e_k]$ usw. bilden, ehe man sie durch innere Multiplikation verbindet.

nach mit (2), (3), ... zusammengenommen werden. Die neuen Gleichungen, die also ξ_1 (oder e_1) nicht mehr enthalten, seien ihrer Entstehung gemäß mit (12), (13), ... beziffert. Sie bilden die zweite Kette von Gleichungen, wenn man die gegebenen als erste Kette bezeichnet. Beim Ausrechnen wird man bloß die Konstanten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$ hinschreiben, so daß die frühere Matrix entsteht, während man die ξ_i (oder e_i) wegläßt oder nur als Überschriften der Spalten jener Matrix anbringt (siehe die Beispiele in Nr. 4 bis 8). Leitet man auf dieselbe Weise, wie die zweite Gleichungskette oder die zugehörige Matrix aus der ersten entstanden war, durch Entfernen von ξ_2 (oder e_2) aus der zweiten eine dritte Kette oder Matrix her, die also zwei Zeilen und zwei Spalten weniger hat als die erste, dann zeigt sich, wie später (Nr. 3) bewiesen werden soll, daß alle Elemente α_1, das erste Element in der Hauptdiagonale der gegebenen Matrix, als gemeinsamen Faktor besitzen. Das gibt Proben, deren Wert als Schutz gegen Verrechnen keineswegs gering anzuschlagen ist. Wenn die Elemente der gegebenen Matrix nicht in Buchstaben, sondern in Zahlen bestehen, so muß man sie freilich als ganze Zahlen voraussetzen, um die Proben machen zu können. Andernfalls ist es zweckmäßig, durch Multiplikation der gegebenen Gleichungen oder der einzelnen Zeilen der zugehörigen Matrix mit geeigneten Potenzen von 10 lauter ganze Zahlen herzustellen[7]). Hat man die zunächst sich ergebenden Elemente der dritten Gleichungskette oder Matrix mit α_1 dividiert[8]), so mögen ihre als endgültig beibehaltenen Zeilen mit (123), (124), ... bezeichnet werden. Es ist klar, daß, wenn man in derselben Weise zu rechnen fortfährt, zwischen der zweiten und vierten Kette oder Matrix, der dritten und fünften ..., was mögliche Proben anlangt, wieder dieselben Beziehungen herrschen werden wie zwischen der ersten und dritten. (Beispiel in Nr. 5, 1.; die beim Eliminieren aus der zweiten Gleichungskette nötigen Faktoren sind dort als Brüche mit dem

[7]) Man wird, wenn die Elemente keine ganz einfachen Zahlen sind, eine Rechenmaschine oder eine passende Produktentafel zur Erleichterung der Rechenarbeit benützen. In dem betrachteten Fall, daß die Konstanten durchweg in Zahlen bestehen, wird allerdings allgemein empfohlen, einen Rechenschieber oder sonst ein logarithmisches Rechenhilfsmittel anzuwenden und von vornherein die erste Gleichung einer jeden Kette mit dem Koeffizienten der ersten Unbekannten in ihr zu dividieren, wodurch zwar die Rechenarbeit verringert wird, aber auch die Proben verlorengehen. Der gewöhnlich vorgeschlagene Ausweg, eine neue Spalte mitzuführen, in die man jedesmal die Summe der in einer und derselben Zeile stehenden Zahlen schreibt, ist, wie üble Erfahrungen gezeigt haben, kein so wirksamer Schutz gegen Rechenfehler, wie es die fraglichen Proben sind.

[8]) Selbstverständlich ist α_1 ungleich Null vorausgesetzt. Andernfalls müßte, wie man weiß, die erste Spalte mit einer solchen vertauscht werden, bei der das in der ersten Zeile stehende Element nicht Null ist, und eine entsprechende Bemerkung gilt für alles Folgende wie auch bei jeder Art von Elimination.

Nenner α_1 geschrieben worden, und das Entsprechende ist bei den folgenden Ketten geschehen.)

Von „beschleunigtem Eliminieren“ könnte man immer sprechen, wenn bei jedem Schritt mehr als eine der Unbekannten ξ (oder der Einheiten e) zugleich eliminiert werden; wir wollen aber diese Ausdrucksweise auf den Fall beschränken, daß man jedesmal zwei und nicht mehr Größen eliminiert, weil das gleichzeitige Eliminieren von drei oder mehr Größen unzweckmäßig wäre (siehe Anhang 1). Wir halten uns wieder an eine bestimmte Reihenfolge: Zuerst sollen ξ_1 und ξ_2 (oder e_1 und e_2) miteinander aus den Gleichungen (1), (2) und (3) auf die bekannte Weise eliminiert werden, was die Gleichung (123) ergeben möge; dann sollen ebenso die Gleichungen (124), (125), ... gebildet werden. Mit (123) zusammen stellen sie die zweite Kette oder die zugehörige Matrix vor. Die möglichen Proben setzen hier früher ein als beim gewöhnlichen Eliminieren. Man findet nämlich, daß, wenn man in derselben Weise fortfahren, also (falls überhaupt mehr als vier Zeilen vorhanden sind) aus den beiden ersten und einer der folgenden Gleichungen der zweiten Kette, z. B. aus (123), (124) und (125), zwei Größen miteinander eliminieren will, die nötigen Minoren zweiter Ordnung, mit welchen man die in Betracht kommenden Zeilen zu multiplizieren hat, einen gemeinsamen Faktor besitzen, und zwar $|\alpha\beta|_{12}$, den ersten „Diagonalminor“ zweiter Ordnung der vorhergehenden Kette oder Matrix. Um diesen gemeinsamen Faktor wird man die fraglichen Minoren sogleich kürzen, ehe man mit ihnen multipliziert. Die dann aus (123), (124) und (125) hervorgehende neue Gleichung werden wir mit (12345) beziffern, usw. Entsprechendes gilt für jede neue Kette.

3. Nachweis der Proben.

Wir knüpfen an die Gleichungen (I) der Nr. 1 an, schreiben aber entsprechend einer in Nr. 2 gemachten Bemerkung nur die zugehörige Matrix, der wir jedoch eine Spalte hinzufügen, in die bei jeder Zeile die zugehörige Extense kommen soll:

$$\text{1. Kette:}\quad \begin{array}{c} (1)\\ (2)\\ (3)\\ (4) \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots \end{array} \right\| \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d \end{array}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

A) Gewöhnliches Eliminieren. Die Elemente der zur zweiten Kette gehörigen Matrix, die eine Zeile und eine Spalte weniger hat, als die ursprüngliche, seien je nach der Zeile durch die Buchstaben $\beta', \gamma', \delta', \dots$,

und die zugehörigen Extensen durch b', c' d', ..., bezeichnet:

$$\text{2. Kette:}\quad \begin{array}{c} (12) \\ (13) \\ (14) \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} \beta_2' & \beta_3' & \dots \\ \gamma_2' & \gamma_3' & \dots \\ \delta_2' & \delta_3' & \dots \end{array} \right\| \begin{array}{c} b' \\ c' \\ d' \end{array}$$

. . . .

Um α_1 aus Zeile (1) und β_1 aus Zeile (2) der ersten Kette zu eliminieren, hat man (1) mit $-\beta_1 = -[b|e_1]$ zu multiplizieren, (2) dagegen mit $\alpha_1 = [a|e_1]$, und alsdann beide Zeilen zu addieren, so daß für einen beliebigen Index i wird:

$$\beta_i' = -[b|e_1][a|e_i] + [a|e_1][b|e_i] = [ab|e_1\,e_i].$$

Da auch $\beta_i' = [b'|e_i]$ ist, so erhält man $b' = [ab|e_1]$, und entsprechend

$$c' = [ac|e_1], \quad d' = [ad|e_1], \dots .$$

Eliminiert man auf dieselbe Weise β_2' und γ_2', die in der ersten Spalte stehenden Elemente der ersten und zweiten Zeile der zweiten Kette, also der mit (12) und (13) bezifferten Zeilen, so wird man eine Zeile erhalten, zu der die Extense $[b'c'|e_2]$ gehört, oder wenn man für b' und c' die Werte einsetzt und die wohlbekannte „Regel des doppelten Faktors" anwendet[9])

$$[ab|e_1 \cdot ac|e_1 \cdot |e_2] = [a|e_1][abc|e_1\,e_2].$$

Es läßt sich daher diese ganze Zeile durch $[a|e_1] = \alpha_1$ dividieren. Wenn man dasselbe Verfahren auf die Zeilen (12) und (14) anwendet, so ergibt sich wegen

$$[ab|e_1 \cdot ad|e_1 \cdot |e_2] = [a|e_1][abc|e_1\,e_2]$$

wieder der Faktor α_1, und so für alle noch zu erwartenden Zeilen, wie in Nr. 2 behauptet worden war. Nach Weglassen dieses Faktors nimmt folglich die zur dritten Kette gehörige Matrix die Gestalt an:

$$\text{3. Kette:}\quad \begin{array}{c} (123) \\ (124) \\ (125) \end{array} \left\| \begin{array}{cc} \gamma_3'' & \dots \\ \delta_3'' & \dots \\ \varepsilon_3'' & \dots \end{array} \right\| \begin{array}{c} c'' \\ d'' \\ e'' \end{array}$$

. . . . ,

wo die zu den Zeilen gehörigen Extensen sein werden:

$$c'' = [a\,b\,c|e_1\,e_2], \quad d'' = [a\,b\,d|e_1\,e_2], \dots .$$

Bei Wiederholung des Verfahrens wird sich als nächster gemeinsamer Faktor, um den gekürzt werden kann,

$$\beta_2' = [a\,b|e_1\,e_2] = |\alpha\beta|_{12},$$

---

[9]) Vgl. etwa meine Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, I, 1, Leipzig 1913, S. 124.

also der Diagonalminor zweiter Ordnung der ursprünglichen Matrix einstellen, wie gleichfalls unter Nr. 2 angegeben wurde. Der Fortgang ist hiernach klar.

B) Beschleunigtes Eliminieren. Sollen die in den ersten drei Zeilen stehenden Elemente der ersten beiden Spalten der gegebenen Matrix, also $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ und γ_1, γ_2 gleichzeitig entfernt werden, so hat man jene Zeilen der Reihe nach mit den Minoren

$$|\beta\gamma|_{12} = [bc|e_1e_2], \quad |\gamma\alpha|_{12} = [ca|e_1e_2], \quad |\alpha\beta|_{12} = [ab|e_1e_2]$$

zu multiplizieren und hierauf zu addieren. Die Extense, die zu der sich so ergebenden neuen Zeile gehört, kann daher geschrieben werden:

$$[bc|e_1e_2]a + [ca|e_1e_2]b + [ab|e_1e_2]c.$$

Nach einer bekannten Zerlegungsformel[10]) ist aber diese Summe gleich $[abc|e_1e_2]$, mithin gleich der Extense, die unter A) mit c'' bezeichnet wurde. Das Entsprechende wird bei den folgenden Zeilen eintreten, mit andern Worten, die zweite Kette, die sich bei beschleunigtem Eliminieren ergibt, stimmt überein mit der dritten Kette bei gewöhnlichem Eliminieren (vgl. die Gegenüberstellung der Beispiele in Nr. 5). Wiederholt man das Verfahren, so ist der Minor zweiter Ordnung, der zur ersten Zeile der vorhergehenden Matrix gehört:

$$\begin{aligned} |\delta''\varepsilon''|_{34} = [d''e''|e_3e_4] &= [abd|e_1e_2 \cdot abe|e_1e_2 \cdot |e_3e_4] \\ &= [ab|e_1e_2][abde|e_1e_2e_3e_4]. \end{aligned}$$

Auch die zur zweiten und dritten Zeile gehörigen Minoren müssen, wie leicht zu sehen, den Faktor $[ab|e_1e_2] = |\alpha\beta|_{12}$ haben; in der Tat bestehen also die unter Nr. 3 angegebenen Proben.

4. Rang einer Matrix[11]).

Es darf als bekannt angesehen werden, daß der Rang einer Matrix gleich der Anzahl der linear unabhängigen unter ihren Zeilen (oder der ihnen zugeordneten Extensen $a, b, c, \ldots$) ist[12]). Mit Hilfe einer jeden von

---

[10]) Vgl. ebendort S. 146 Gl. (13), in der nur $|[e_1e_2]$ an Stelle von D zu setzen ist.

[11]) Wie hier und bei den späteren Aufgaben kaum bemerkt zu werden braucht, wird man, wenn es Erfolg verspricht, die gegebene Matrix oder Determinante vor Beginn der eigentlichen Rechnung durch die bekannten Umformungen, die ihren Rang, oder bei einer Determinante ihren Wert, unverändert lassen — „rangtreue" bzw. „werttreue" Umformungen — zu vereinfachen suchen. In den obigen Beispielen ist jedoch davon Abstand genommen worden.

[12]) Es ist dieselbe Zahl, die Graßmann 1844 und wieder 1862 die Stufe des linearen Gebiets der Extensen $a, b, c, \ldots$ genannt hat (Ausdehnungslehre von 1844, Nr. 31 = Werke I, 1, S. 81; Ausdehnungslehre von 1862 Nr. 14 = Werke I, 2, S. 16). Man hätte also das Recht, Stufe statt Rang zu sagen, da Frobenius erst 1879 das Fachwort Rang — wenn auch anders (und zwar weniger einfach) erklärt — eingeführt hat.

den unter Nr. 2 besprochenen Arten des Eliminierens findet man leicht nicht nur diese Zahl, sondern wenn sie kleiner als die Anzahl der Zeilen ist, auch die linearen Beziehungen, die dann zwischen den Zeilen oder zwischen des Extensen $a, b, c, \dots$ bestehen müssen.

Beispiel. Matrix mit 5 Zeilen und 6 Spalten:

$$\left\Vert \begin{array}{rrrrrr} 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 1 & 5 & 9 & -15 \end{array} \right\Vert .$$

Ausrechnung (mit beschleunigtem Eliminieren).

Faktoren			Zeile							a	b	c	d	e	
23	17	−9	(1)	2	−1	1	0	−2	3	1					
−22	−16	12	(2)	1	−2	3	−1	4	−3		1				
		−3	(3)	−2	−5	8	−4	3	7			1			
	−3		(4)	6	5	4	3	2	1				1		
−3			(5)	8	7	1	5	9	−15					1	
		−1	(123)			3	0	57	−84	−9	12	−3			c''
		1	(124)			−43	7	−104	96	17	−16		−3		d''
		−1	(125)			−46	7	−161	180	23	−22			−3	e''
								0	0	3	−6	3	−3	3	e^{IV}

Erläuterung. Den schon vorhandenen Spalten ist noch je eine weitere für die Extensen a, b, c, d, e hinzugefügt worden. Die Minoren zweiter Ordnung, mit welchen man die Zeilen (123), (124), (125) multiplizieren muß, haben eigentlich die Werte -7, $+7$, -7, sind also zufällig absolut genommen gleich, weshalb mit 7 gekürzt worden ist. Wie man sieht, verschwindet keine der Extensen c'', d'', e''. Daher sind, wie die Ausdrücke für diese Extensen in den drei Zeilen der zweiten Kette, nämlich

$$\begin{aligned} c'' &= -9a + 12b - 3c \\ d'' &= 17a - 16b \qquad - 3d \\ e'' &= 23a - 22b \qquad\qquad - 3e \end{aligned}$$

zeigen, die Extensen c, d, e linear unabhängig von a und b. Dagegen hat die letzte Zeile $e^{IV} = 0$ ergeben, es besteht mithin zwischen den Extensen a, b, c, d, e eine lineare Beziehung, die (nach Weglassen des zufälligen gemeinsamen Faktors 3) lautet:

$$a - 2b + c - d + e = 0,$$

aber auch keine andere. Folglich ist der gesuchte Rang obiger Matrix gleich 4. Nur Minoren zweiter Ordnung hat man auszurechnen gehabt, wie immer beim Einschlagen der unter Nr. 2 gezeigten Wege.

Anderes Beispiel[18]).

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{Vmatrix}$$

Zwischen den ersten drei Zeilen besteht augenscheinlich keine lineare Beziehung. Die drei ersten Elemente der vierten Zeile lassen sich dadurch auf einmal entfernen, daß man die Zeilen der Reihe nach mit -1, -2, -3, 1 multipliziert und addiert:

$$\begin{array}{r||ccccc||l} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & a \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & b \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & c \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 14 & 32 & d \\ \cline{2-7} & & & & 0 & 0 & d''. \end{array}$$

Da die übrigen Elemente der neuen Zeile von selbst verschwinden, so sind die vier ersten Zeilen der gegebenen Matrix linear abhängig, und zwar besteht zwischen ihnen oder den zugehörigen Extensen die Beziehung

$$a + 2b + 3c - d = 0.$$

Nimmt man vollends die fünfte Zeile mit den drei ersten zusammen und verfährt auf dieselbe Weise:

$$\begin{array}{r||ccccc||l} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & a \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & b \\ -6 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & c \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 32 & 77 & e \\ \cline{2-7} & & & & 0 & 0 & e'', \end{array}$$

so kommt nochmals eine Zeile mit lauter Nullen zum Vorschein, was zu der linearen Beziehung

$$4a + 5b + 6c - e = 0$$

[18]) Entnommen der „Einführung in die höhere Algebra“ von Maxime Bôcher, deutsch von Hans Beck, 2. Aufl. 1925, S. 64.

führt. Der gesuchte Rang der Matrix ist mithin 3. Wieder erhält man außer dem Rang zugleich die zwischen den Zeilen bestehenden linearen Beziehungen, deren es in diesem Beispiel 2 sind.

5. Auswertung von Determinanten[14]).

Es kann auf die Zeilen der gegebenen Determinante gewöhnliches oder beschleunigtes Eliminieren angewendet werden — letzteres erfordert natürlich weit weniger Multiplikationen. Wenn man die Rechnung fortsetzt, bis nur noch eine Zeile mit einem Element übrigbleibt, so ist dieses gleich der gesuchten Determinante, wie aus den Darlegungen unter Nr. 3 unmittelbar folgt. Wenn die Anzahl der Zeilen gerade ist, so werden bei beschleunigtem Eliminieren zuletzt zwei Zeilen übrigbleiben, auf die dann vollends gewöhnliches Eliminieren anzuwenden sein wird.

Beispiel. Auszuwerten sei die Determinante fünfter Ordnung

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & -2 & 3 & 114 \end{vmatrix}.$$

1. Ausrechnung mit beschleunigtem Eliminieren.

Faktoren			Zeile					
−1	−11	−11	(1)	2	−3	5	1	3
−26	−13	1	(2)	1	2	−3	4	−5
		7	(3)	3	−5	7	2	−3
	7		(4)	5	−1	4	8	2
7			(5)	4	7	−2	3	114
		−85	(123)			−9	−7	−59
		−49	(124)			12	7	46
		−3	(125)			59	−84	925
			(12345)					$\boxed{-2}$

Ergebnis: $\varDelta = -2$.

[14]) Ich habe hier vorzugsweise den, allerdings nicht häufigen Fall im Auge, daß man bloß von einer einzelnen Determinante den Wert ermitteln muß. Bei dem nicht nur symbolischen Auflösen einer Kette linearer Gleichungen z. B. wendet man, wenn es überhaupt nicht etwa durch schrittweise Annäherung („Iteration") geschehen soll, (bekanntlich) besser keine Determinanten an. Wie man zweckmäßig verfährt, soll an anderem Ort gezeigt werden.

Erläuterung. Die zu den ersten beiden Spalten der zweiten Matrix gehörigen Minoren sind in richtiger Reihenfolge:

$$\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 59 & -84 \end{vmatrix} = -7 \cdot 85, \quad \begin{vmatrix} 59 & -84 \\ -9 & 7 \end{vmatrix} = -7 \cdot 49, \quad \begin{vmatrix} -9 & 7 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} = -7 \cdot 3.$$

Die Proben stimmen, weil der gemeinsame Faktor 7, gleich dem ersten Diagonalminor

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

der gegebenen Matrix, vorhanden ist. Läßt man ihn weg, so ergeben sich als die zu benützenden Faktoren -85, -49, -3.

2. Ausrechnung mit gewöhnlichem Eliminieren (zum Vergleich mit 1.).

Faktoren				Zeile					
-4	-5	-3	-1	(1)	2	-3	5	1	3
			2	(2)	1	2	-3	4	-5
		2		(3)	3	-5	7	2	-3
	2			(4)	5	-1	4	8	2
2				(5)	4	7	-2	3	114
	$\frac{-26}{2}$	$\frac{-13}{2}$	$\frac{1}{2}$	(12)		7	-11	7	-13
			$\frac{7}{2}$	(13)		-1	-1	1	-15
		$\frac{7}{2}$		(14)		13	-17	11	-11
	$\frac{7}{2}$			(15)		26	-24	2	216
		$\frac{-59}{7}$	$\frac{-12}{7}$	(123)			-9	7	-59
			$\frac{-9}{7}$	(124)			12	-7	46
		$\frac{-9}{7}$		(125)			59	-84	925
			$\frac{-49}{-9}$	(1234)				-3	42
			$\frac{-3}{-9}$	(1235)				49	-692
				(12345)					$\boxed{-2}$

6. Auswertung Hermitescher Determinanten.

Die Rechnungen sind dieselben wie beim Auswerten von Determinanten mit reellen Elementen; es empfiehlt sich aber, die komplexen Zahlen ähn-

lich wie Dezimalbrüche zu behandeln und hierbei den reellen und den imaginären Teil etwa durch einen Strichpunkt (;) zu trennen, also für $(x+yi)$ zu schreiben $x; y$.

Beispiel.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1+i & 3+2i & 2+3i \\ 1-i & 5 & 2+i & 3+5i \\ 3-2i & 2-i & 4 & 4+3i \\ 2-3i & 3-5i & 4-3i & 3 \end{vmatrix}.$$

Ausrechnung mit beschleunigtem Eliminieren.

Faktoren		Zeile				
$-12; 7$	$-14; 7$	(1)	2	$1; 1$	$3; 2$	$2; 3$
$-1; 9$	$1; 3$	(2)	$1; -1$	5	$2; 1$	$3; 5$
	8	(3)	$3; -2$	$2; -1$	4	$4; 3$
8		(4)	$2; -3$	$3; -5$	$4; -3$	3
	$\frac{(29; 10)}{8}$	(123)			-25	$-29; 10$
	$\frac{-25}{8}$	(124)			$-29; -10$	-69
		(1234)				98

Also $\Delta = 98$. Proben: Division durch 8 ohne Rest möglich.

Anmerkung. Die Auswertung von Determinanten, deren Elemente keine gewöhnlichen komplexen Zahlen, sondern andere „binäre" Zahlen sind, nämlich Zahlen der Form $(\xi + \eta\varepsilon)$ mit $\varepsilon^2 = +1$ („Hyperbelzahlen") oder $\varepsilon^2 = 0$ (sog. duale Zahlen) kann auf entsprechende Weise geschehen (siehe auch Nr. 8).

7. Aufstellung der Hamilton-Cayleyschen Gleichung zu einer linearen Transformation.

Zunächst sei an folgende bekannte Tatsachen erinnert. Die Gleichungen einer linearen Transformation der Form

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n, \\ \xi_2' &= \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \xi_n' &= \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n \end{aligned}$$

lassen sich durch Einführung der Extensen

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \\ x' &= \xi_1' e_1 + \xi_2' e_2 + \dots + \xi_n' e_n \end{aligned}$$

symbolisch in die eine (extense) Gleichung

$$x' = \mathfrak{A} x$$

zusammenfassen, in der $\mathfrak{A}$ einen Operator bedeutet[15]). Die Wiederholungen (Iterationen) der Transformation werden dann durch $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3, \ldots$ bezeichnet; wir nennen sie mit H. Graßmann d. J. die Folgepotenzen von $\mathfrak{A}$.[16]) Unter ihnen sind höchstens n linear unabhängig, es besteht also, wenn man als Zeichen der identischen Transformation $\mathfrak{A}^0 = 1$ benützt, eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{A}^m + \gamma_{m-1}\mathfrak{A}^{m-1} + \gamma_{m-2}\mathfrak{A}^{m-2} + \ldots + \gamma_1 \mathfrak{A} + \gamma_0 = 0$$

mit $m \leqq n$, die sog. Hamilton-Cayleysche Gleichung der Transformation. Die Multiplikation vorstehender Gleichung mit x ergibt, wenn man

$$\mathfrak{A}^2 x = x'', \quad \mathfrak{A}^3 x = x''', \quad \ldots, \quad \mathfrak{A}^m x = x^{(m)}$$

setzt:

$$x^{(m)} + \gamma_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + \gamma_1 x' + \gamma_0 x = 0.$$

Die Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$ lassen sich deshalb auf die folgende Weise finden: Man wählt für x eine möglichst einfache Extense, z. B. mit den Koordinaten $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, also $x = e_1$, aber so, daß $\mathfrak{A} x$ nicht identisch verschwindet, berechnet durch wiederholtes Einsetzen in die gegebenen Transformationsgleichungen die Koordinaten von $x', x'', \ldots$, nötigenfalls bis zu denjenigen von $x^{(n)}$, und untersucht nach Nr. 4 die lineare Abhängigkeit dieser Extensen. Wenn die $(m+1)$-te von ihnen sich als linear abhängig von den vorhergehenden erweist, so ist m der Grad der Hamilton-Cayleyschen Gleichung der Transformation, und die Rechnung ergibt zugleich die Werte von $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$.

Beispiel. Zur Erläuterung des Verfahrens möge die ganz einfache Transformation genügen:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= 3\xi_1, \\ \xi_2' &= \xi_1 + 3\xi_2, \\ \xi_3' &= 3\xi_3, \\ \xi_4' &= \xi_3 + 3\xi_4. \end{aligned}$$

Nimmt man für x die Extense mit den Koordinaten $(1, 0, 0, 0)$, so erhält x' die Koordinaten $(3, 1, 0, 0)$, x'' die Koordinaten $(9, 6, 0, 0)$. Auf jeden Fall sind x und x' linear unabhängig. Prüfen wir die drei Extensen x, x', x'' auf ihre lineare Abhängigkeit!

---

[15]) Manche nennen ihn im Anschluß an Cayley eine Matrix, andere wegen der von Graßmann dabei meistens benützten Darstellung einen Mehrnenner-Bruch oder extensen Bruch.

[16]) Anmerkungen zu H. Graßmanns Werken I, 2, S. 461.

$$\begin{array}{r||cccc||l}
9 & 1 & 0 & 0 & 0 & x \\
-6 & 3 & 1 & 0 & 0 & x' \\
1 & 9 & 6 & 0 & 0 & x'' \\
\hline
 & & & 0 & 0 &
\end{array}$$

Wie man sieht, führt beschleunigtes Eliminieren auf die Beziehung

$$x'' - 6x' + 9 = 0,$$

also ist die gesuchte Hamilton-Cayleysche Gleichung

$$\mathfrak{A}^2 - 6\mathfrak{A} + 9 = 0.$$

(Wegen der zugehörigen Säkulargleichung s. die folgende Nummer.)

8. Aufstellung der Säkulargleichung einer linearen Transformation. Neumannsche Reihe.

Es handelt sich in erster Linie darum, eine Determinante der Form

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1 - \lambda & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\
\beta_1 & \beta_2 - \lambda & \beta_3 & \ldots \\
\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - \lambda & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}$$

nach Potenzen von λ zu entwickeln. Für $\varkappa = 1 : \lambda$ dagegen erhält man bei unbegrenzt wachsender Anzahl der Spalten und Zeilen die aus der Lehre von den linearen Integralgleichungen bekannte Gleichung der „Eigenwerte“, die sog. Neumannsche Reihe. Der größeren Tragweite halber werde an die zweite Auffassung angeknüpft, nämlich die Entwicklung von

$$\Delta(\varkappa) = \begin{vmatrix}
1 - \alpha_1\varkappa & -\alpha_2\varkappa & -\alpha_3\varkappa & \ldots \\
-\beta_1\varkappa & 1 - \beta_2\varkappa & -\beta_3\varkappa & \ldots \\
-\gamma_1\varkappa & -\gamma_2\varkappa & 1 - \gamma_3\varkappa & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}$$

nach Potenzen von $\varkappa$ behandelt. Bekanntlich lautet sie

$$\begin{aligned}
\Delta(\varkappa) = 1 &- \varkappa(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 + \ldots) \\
&+ \varkappa^2(|\alpha\beta|_{12} + |\alpha\gamma|_{13} + |\beta\gamma|_{23} + \ldots) \\
&- \varkappa^3(|\alpha\beta\gamma|_{123} + \ldots) + \ldots,
\end{aligned}$$

wo nach den früher (Nr. 1) angewendeten Bezeichnungen die Ausdrücke in den Klammern gleich den Diagonalminoren verschiedener Ordnung der Matrix

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots \\
\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}$$

sind. Auf Grund zahlreicher Versuche halte ich folgende Anordnung für

besonders empfehlenswert. Je nach den verwendeten Zeilen unterscheide ich verschiedene „Treppen“:

1.	Treppe:	$\alpha\beta\gamma\delta\cdots$
2.	„	$\alpha\gamma\delta\varepsilon\cdots$
3.	„	$\beta\gamma\delta\varepsilon\cdots$
4.	„	$\alpha\beta\delta\varepsilon\cdots$
5.	„	$\alpha\delta\varepsilon\cdots$
6.	„	$\beta\delta\varepsilon\cdots$
7.	„	$\gamma\delta\varepsilon\cdots$
. . .	. . .	. . .

(Die Determinanten der 4. Treppe ergeben sich mit denen der ersten.) Ferner spreche ich von verschiedenen „Stufen“ der Entwicklung, und zwar soll m-te Stufe diejenige heißen, bei der die Entwicklung bis zum Glied mit $\varkappa^m$ einschließlich fortgeschritten ist. Bei jeder Stufe hat man offenbar die neu hinzugekommenen Zahlen zu den entsprechenden, d. h. sich auf dieselbe Potenz von $\varkappa$ beziehenden der vorhergehenden Stufe zu addieren.

Beispiele. Zunächst werde das einfache Beispiel der Nr. 7 erledigt:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Wie man sofort sieht, wird die Säkulargleichung

$$(3-\lambda)^4 = 0,$$

sie hat also die vierfache Wurzel $\lambda = 3$. Als Hamilton-Cayleysche Gleichung hat sich in Nr. 7 nur eine quadratische Gleichung ergeben. Auf den Zusammenhang mit den Weierstraßschen Elementarteilern soll hier nicht eingegangen werden.

Beispiel 2[17]. Gegebene Matrix:

$$\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

[17]) Entnommen W. Hort, Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, 2. Aufl. (1925), S. 642. Wegen gewisser Symmetrieeigenschaften der Matrix läßt sich die Endgleichung 5. Grades in eine quadratische und eine Gleichung dritten Grades zerlegen, wovon jedoch oben abgesehen wird, weil es auf die Erläuterung des allgemeinen Verfahrens ankommt.

Ausrechnung. (Die nach Nr. 5 vorzunehmende Auswertung der Determinanten ist hier unterdrückt worden.)

1. und 4. Treppe, $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ und $(\alpha\beta\delta\varepsilon)$.

$$|\alpha\beta|_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 24, \quad |\alpha\beta\gamma|_{123} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 108,$$

$$|\alpha\beta\gamma\delta|_{1234} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 432,$$

$$|\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon|_{12345} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1296,$$

$$|\alpha\beta\delta|_{124} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 144, \quad |\alpha\beta\delta\varepsilon|_{1245} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 432.$$

2. Treppe, $(\alpha\gamma\delta\varepsilon)$.

$$|\alpha\gamma|_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 36, \quad |\alpha\gamma\delta|_{134} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 144,$$

$$|\alpha\gamma\delta\varepsilon|_{1345} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 432.$$

3. Treppe, $(\beta\gamma\delta\varepsilon)$.

$$|\beta\gamma|_{23} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 36, \quad |\beta\gamma\delta|_{234} = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 144,$$

$$|\beta\gamma\delta\varepsilon|_{2345} = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 432.$$

5. Treppe, $(\alpha\delta\varepsilon)$.

$$|\alpha\delta|_{14} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36, \quad |\alpha\delta\varepsilon|_{145} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 108.$$

6. Treppe, $(\beta\delta\varepsilon)$.

$$|\beta\delta|_{24} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 48, \quad |\beta\delta\varepsilon|_{245} = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 144.$$

7. Treppe, $(\gamma\delta\varepsilon)$.

$$|\gamma\delta|_{34} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 36, \quad |\gamma\delta\varepsilon|_{345} = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 108.$$

8. Treppe, $(\alpha\varepsilon)$.

$$|\alpha\varepsilon|_{15} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 24.$$

Also:

I. Stufe: $0 = 1 - 5\varkappa$.

II. „ $0 = 1 - 13\varkappa + 24\varkappa^2$.

III. „ $0 = 1 - 22\varkappa + 96\varkappa^2 - 108\varkappa^3$.

IV. „ $0 = 1 - 30\varkappa + 216\varkappa^2 - 540\varkappa^3 + 432\varkappa^4$.

V. „ $0 = 1 - 35\varkappa + 336\varkappa^2 - 1296\varkappa^3 + 2160\varkappa^4 - 1296\varkappa^5$.

Anmerkung. Die allgemeinere Aufgabe, eine Determinante, deren Elemente irgendwelche rationale ganze Funktionen eines Parameters λ sind, nach Potenzen von λ zu entwickeln, kann so gelöst werden: Man schreibt jedes Element ähnlich wie einen Dezimalbruch, also z. B. $(\gamma_0; \gamma_1; \ldots; \gamma_n)$ für die Funktion $\varphi(\lambda) = \gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \ldots + \gamma_n\lambda^n$, und entwickelt alsdann die Determinante nach Nr. 5, wobei man die vorkommenden Produkte und Quotienten mit Hilfe des Schiebverfahrens ausrechnet, das in der früheren Mitteilung („Zum Rechnen mit Potenzreihen") gezeigt worden ist. Auch wenn die Elemente höhere komplexe Zahlen oder Matrizenausdrücke sind, kann man in ähnlicher Weise vorgehen.

Anhang 1.

Doppelt-beschleunigtes Eliminieren. Dieser Name kann einem Verfahren beigelegt werden, das in dem gleichzeitigen Entfernen der in drei aufeinanderfolgenden Zeilen und Spalten stehenden Elemente durch An-

wendung von Minoren dritter Ordnung besteht. Es erfordert natürlich größere Aufmerksamkeit, als das einfach-beschleunigte Eliminieren und soll keineswegs allgemein empfohlen werden, um so weniger als dabei in der Regel, wie das folgende Beispiel zeigt, nur wenig an Multiplikationen gespart wird. Auszuwerten sei die Determinante vierter Ordnung

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

Ausrechnung mit doppelt beschleunigtem Eliminieren:

Faktoren								
— 33/7	— 11	— 11	22		2	—3	5	1
15/7	1	— 13		22	1	2	—3	4
12/7	7		— 13	11	3	—5	7	2
— 9/7		7	— 1	— 11	5	—1	4	8
								—3

Ergebnis: $\Delta = -3$.

Erläuterung. Zuerst hat man die Minoren zweiter Ordnung, die aus den Elementen der ersten beiden Spalten sich nach Streichen der ersten, zweiten, dritten und vierten Zeile ergeben (z. B. 22, 11, —11), als Faktoren benützt, um die in den ersten drei Spalten steckenden Minoren dritter Ordnung (—33, 15, 12, —9) zu berechnen. Multipliziert man mit ihnen die Elemente der vierten Spalte und addiert, so kommt nach Division mit 7 — dem ersten Diagonalminor zweiter Ordnung — —3 als Wert von Δ. Die Anzahl der nötigen Produkte ist 22; bei einfach beschleunigtem Eliminieren wäre sie 24, also nicht wesentlich größer, bei der noch immer üblichen Entwicklung nach den Elementen einer Reihe dagegen 40.

Anhang 2.

Manche Entwicklungen in den Lehrbüchern, die sich mit Integralgleichungen befassen, können bedeutend abgekürzt werden, wenn man sich der Graßmannschen Symbolik, und zwar äußerer Produkte bedient und bei dazu gehörigen Zahlenrechnungen die hier gezeigten Verfahren anwendet. So wird in G. Vivanti-Fr. Schwank, Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen 1929, S. 86, wie anderwärts die Kette linearer Gleichungen betrachtet:

$$(1) \qquad \varphi_i + \delta \cdot \sum_{h=1}^{n} K_{ih} \varphi_h = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die K_{ik} und f_i gegeben, dagegen die φ gesucht sind. Nach dem von Graßmann 1844 angegebenen Verfahren [18]) können die φ leicht als äußere Produkte dargestellt werden. Denn bezeichnen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ wie früher n linear unabhängige Einheiten und addiert man sämtliche Gleichungen (1), nachdem die i-te mit e_i multipliziert worden ist, so kommt mit den Abkürzungen

(2) $$\sum_{i=1}^{n} K_{ik} e_i = k_k$$

die Gleichung

(3) $$(e_1 + \delta \cdot k_1)\varphi_1 + (e_2 + \delta \cdot k_2)\varphi_2 + \ldots = f_1 e_1 + f_2 e_2 + \cdots$$

und es kann jetzt, eben nach Graßmann, φ_i durch äußere Multiplikation der vorstehenden Gleichung mit dem äußeren Produkt der $(n-1)$ Extensen $(e_1 + \delta \cdot k_1), (e_2 + \delta \cdot k_2), \ldots$, die auf der linken Seite nach Streichen des Gliedes mit φ_i übrigbleiben, gewonnen werden. Nehmen wir das von Vivanti a. a. O. selbst behandelte Beispiel $n = 3$. Es werde $k_1 = a$, $k_2 = b$, $k_3 = c$, $f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 = f$ gesetzt, so daß (3) übergeht in

$$(e_1 + \delta \cdot a)\varphi_1 + (e_2 + \delta \cdot b)\varphi_2 + (e_3 + \delta \cdot c)\varphi_3 = f$$

und sich mit

$$\Delta = [(e_1 + \delta \cdot a)(e_2 + \delta \cdot b)(e_3 + \delta \cdot c)]$$

ergibt:

$$\Delta \cdot \varphi_1 = [f(e_2 + \delta \cdot b)(e_3 + \delta \cdot c)],$$
$$\Delta \cdot \varphi_2 = [(e_1 + \delta \cdot a) f (e_3 + \delta \cdot c)],$$
$$\Delta \cdot \varphi_3 = [(e_1 + \delta \cdot a)(e_2 + \delta \cdot b) f].$$

Man braucht also nur die Koordinaten der äußeren Produkte $[ab]$, $[ac]$ und $[bc]$ und kommt mit 21 arithmetischen Produkten von je zwei Faktoren aus, während Vivanti deren 99, also beinahe 5 mal so viele, nötig hat!

---

[18]) Ausdehnungslehre von 1844, § 45 = Werke I, 1, S. 100; Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 134 = Werke I, 2, S. 104.

(Eingegangen am 26. 10. 1929.)

Über unitäre Geometrie.

Von

J. A. Schouten in Delft und D. van Dantzig in Rotterdam.

Einleitung.

Bekanntlich gibt es zu jeder homogenen algebraischen Form in n Variablen einen Tensor, eben den Inbegriff der Bestimmungszahlen der Form samt ihrer Transformationsweise. In ähnlicher Weise kann man nun auch, ausgehend von Hermiteschen Formen, zu einer anderen Art von Größen gelangen, die Hermitesche Tensoren genannt werden können. Der erste Anlaß zur Bildung dieses Begriffes sowie des im nachstehenden erklärten Begriffes der Größen zweiter Art ergab sich einem von uns bei seinen 1926/27 an der Leidener Universität gehaltenen Vorlesungen über die Geometrie der kontinuierlichen Gruppen[1]), bei deren Klassifizierung ja gerade eine Hermitesche Form eine wesentliche Rolle spielt. Anschließend an diese Begriffsbildungen konnten wir sodann[2]) zeigen, daß die von Einstein in seinem neuesten Ansatz zur Relativitätstheorie[2a]) verwendete metrische Geometrie sich deckt mit der Geometrie eines Hermiteschen Tensors höchsten Ranges, der im Reellen reell ist und gewissen Differentialgleichungen genügt. Weiterhin zeigte sich aber[3]), daß es zu jedem Hermiteschen Tensor höchsten Ranges eine Geometrie gibt, die der Riemannschen in mancher Beziehung ähnlich, im übrigen unähnlich genug ist, um für sich ein eigenes

---

[1]) Ein Auszug erscheint in dieser Zeitschrift: J. A. Schouten, Zur Geometrie der kontinuierlichen Gruppen, **102** (1929), S. 244–272.

[2]) J. A. Schouten und D. van Dantzig, Über die Differentialgeometrie einer Hermiteschen Differentialform und ihre Beziehungen zu den Feldgleichungen der Physik. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **32** (1929), S. 61–64.

[2a]) Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus, Berl. Sitz.-Ber. (1928) S. 217–221; Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität, ebenda S. 224–227.

[3]) Vorläufige Mitteilung: J. A. Schouten, Über unitäre Geometrie, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **32** (1929), S. 457–465.

Interesse zu beanspruchen. Zu dieser Geometrie, die die „unitäre“ genannt wurde, gibt nachstehende Arbeit eine erste, den Gegenstand keineswegs erschöpfende, Einführung. Nach einer Definition der vorkommenden Größen wird die Ortsabhängigkeit betrachtet, und es wird definiert, was unter analytischen und halbanalytischen Größen zu verstehen ist. Nach Erörterung der Realitätsverhältnisse und der bei der zugrunde gelegten Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten wird gezeigt, daß sich aus der allgemeinsten linearen Übertragung durch vier invariante Forderungen eine besonders wichtige, weil sehr einfache, Übertragungsart gewinnen läßt. Durch Adjunktion eines Hermiteschen Fundamentaltensors entsteht die unitäre Geometrie. In dieser Geometrie wird dann die Krümmungstheorie einer in einer U_n (n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer unitären Geometrie) eingebetteten U_m betrachtet. Von dem allgemeineren Falle einer X_m (allgemeine m-dimensionale Mannigfaltigkeit), die in der jeder U_n zugeordneten X_{2n} eingebettet ist, wird nur der Fall behandelt, wo die X_m das Bild der reellen Punkte der U_n ist. Diese Behandlung führt dann unmittelbar zu dem schon oben erwähnten, mit der Einsteinschen Theorie zusammenhängenden Spezialfall, wie zum Schluß kurz angedeutet wird.

§ 1.

Transformation der Größen.

Die n Koordinaten $\overset{\nu}{x}$, $\nu = \alpha, \dots, \omega = 1, \dots, n$[4]) einer X_n sollen unabhängig von einander alle komplexen Werte durchlaufen. Die X_n wird der Gruppe $\mathfrak{G}$ aller solcher Koordinatentransformationen unterworfen, bei denen die neuen

[4]) Ein Vektor (bzw. eine Größe) wird als ein Begriff aufgefaßt, *der nicht von einem Koordinatensystem abhängig ist*, und der deswegen stets mit *demselben* Kernbuchstaben bezeichnet wird. Seine Bestimmungszahlen bez. verschiedener Koordinatensystemen werden durch den Kernbuchstaben mit als Index angehängten Zeichen bezeichnet. Gleichungen zwischen Größen sind, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil angegeben ist (vgl. Fußnote [10])), invariant bei Änderung des Koordinatensystems. Wir lassen dabei ausdrücklich die Möglichkeit offen, eine Größe mit einem oder einigen der Indizes auf ein *anderes* Koordinatensystem oder gar auf ein beliebiges nicht zu einem Koordinatensystem gehöriges System von Maßvektoren zu beziehen.

Für jedes Koordinatensystem braucht man dazu eine Reihe von n Zeichen, für die wir die Ziffern $1, \dots, n$ benutzen werden (n gilt hier als Ziffer). Weil aber z. B. die erste Bestimmungszahl eines Vektors in bezug auf $\overset{\nu}{x}$ von der ersten Bestimmungszahl in bezug auf $\overset{k}{x}$ unterscheidbar sein muß, ist es nötig, die Indizes $1, \dots, n$ für jedes Koordinatensystem mit einem zugehörigen Erkennungsmerkmal zu versehen, also z. B. (wie es hier geschehen ist) für das eine System kursiv, für das andere vertikal zu drucken. Die Bestimmungszahlen eines Vektors v sind dann $v^{\mathit{1}}, \dots, v^{\mathit{n}}$, bzw. $v^{\mathrm{1}}, \dots, v^{\mathrm{n}}$. Im R. K. (J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin: Julius Springer, 1923, hier zitiert als R. K.) ist statt $\mathit{1}, \dots, n$ die Zeichenreihe $a_1, \dots, a_n$ verwendet.

(Fortsetzung der Fußnote [4]) auf nächster Seite.)

Koordinaten $\overset{k}{x}$, $h, \ldots, m = \mathsf{1}, \ldots, \mathsf{n}$ [4]) ***analytische,*** in einem zu betrachtenden Gebiet ***reguläre,*** Funktionen der $\overset{\nu}{x}$ sind, und daselbst eine von 0 verschiedene Funktionaldeterminante besitzen. Es sind dann auch die Konjugierten $\overset{K}{x}$, $H, \ldots, M = \bar{\mathsf{1}}, \ldots, \bar{\mathsf{n}}$ [4]) der $\overset{k}{x}$ analytische, im betrachteten Gebiet reguläre Funktionen der Konjugierten $\overset{\mathrm{N}}{x}$, $\mathrm{A}, \ldots, \Omega = \bar{1}, \ldots, \bar{n}$ [4]) [5]) der $\overset{\nu}{x}$, deren Funktionaldeterminante daselbst gleichfalls $\neq 0$ ist. Der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist also die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ der Transformationen der Konjugierten in eineindeutiger Weise zugeordnet.

Ordnet man jetzt einem beliebigen Vektor v^{ν} der X_n bez. jedes Koordinatensystems $\overset{\nu}{x}$ bzw. $\overset{k}{x}$ die n Zahlen v^{N} bzw. v^{K} zu, die zu den Bestimmungszahlen v^{ν} bzw. v^{k} konjugiert sind, so bildet dieses System von Zahlen ***keinen*** Vektor im gewöhnlichen Sinne, weil es sich nicht der Gruppe $\mathfrak{G}$, sondern der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ entsprechend transformiert. Sobald man also, neben den Koordinaten einer X_n, deren Konjugierten miteinbeziehen will, muß man neben den „gewöhnlichen" Vektoren oder Vektoren (allgemein Größen) ***erster Art*** auch solche ***„zweiter Art"*** einführen, deren Bestimmungszahlen sich gemäß $\overline{\mathfrak{G}}$ transformieren.

In jedem Punkte des obenerwähnten Gebietes betrachten wir folgende Größen:

I. *Skalare Größen,* das sind Größen mit einer einzigen Bestimmungszahl, die sich bei Transformation der $\overset{\nu}{x}$ nicht ändert. Jedem Skalar ist in eineindeutiger Weise der Skalar mit konjugiert komplexer Bestimmungszahl zugeordnet. Skalare werden mit lateinischen oder kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

II. *Gewöhnliche kovariante und kontravariante Vektoren* (oder Vektoren erster Art), die ***kleine*** Buchstaben als Indizes bekommen und deren Transformationen sich in bekannter Weise aus der Transformation der $\overset{\nu}{x}$ ableiten:

(1) $$v^k = A^k_{\nu}\, v^{\nu}; \qquad w_i = A^{\lambda}_i\, w_{\lambda}.$$ [6])

Jeder Zeichenreihe ordnen wir außerdem eine Buchstabenreihe zu, hier der Reihe $1, \ldots, n$ die kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \ldots, \omega$ und der Reihe $\mathsf{1}, \ldots, \mathsf{n}$ die kleinen lateinischen Buchstaben $h, \ldots, m$; ein jeder Buchstabenindex ist als eine Variable anzusehen, die die *sämtlichen* Ziffern der ihr zugeordneten Reihe durchläuft.

[5]) Um Verwechslung vorzubeugen, werden die *großen griechischen* Buchstaben *vertikal* gedruckt, die *großen lateinischen* dagegen *kursiv.*

[6]) Der Kernbuchstabe A bezeichnet den Einheitsaffinor, dessen Bestimmungszahlen, wenn seine beiden Indizes auf *dasselbe* Koordinatensystem bezogen sind, gleich 1 oder 0 sind, je nachdem die Indizes gleich oder verschieden sind. Werden dagegen die beiden Indizes auf *verschiedene* Koordinatensysteme bezogen (vgl. Fuß-

(Fortsetzung der Fußnote [6]) auf nächster Seite.)

III. *Gewöhnliche kovariante, kontravariante und gemischte Größen* (oder Größen *erster* Art) höheren Grades, die *kleine* Buchstaben als Indizes bekommen und deren Bestimmungszahlen sich wie die Produkte der Bestimmungszahlen gewöhnlicher Vektoren transformieren.

IV. *Vektoren* zweiter Art, die große Buchstaben als Indizes bekommen und deren Transformationen sich in derselben Weise aus der Transformation der $\overset{N}{x}$ ableiten:

$$(2) \qquad v^K = A_N^K v^N; \qquad w_I = A_I^\Lambda w_\Lambda.$$

V. *Größen zweiter Art*, die sich in derselben Weise aus den Vektoren zweiter Art ableiten wie die Größen erster Art aus gewöhnlichen Vektoren.

Offenbar definiert der Übergang zu konjugiert komplexen Bestimmungszahlen eine eineindeutige, bei den erlaubten Koordinatentransformationen invariante Abbildung der Größen der einen Art auf die Größen der anderen Art. Zwei einander in dieser Weise zugeordnete Größen sollen *konjugierte Größen* genannt und mit demselben Kernbuchstaben bezeichnet werden. Dementsprechend haben wir in (2) die Konjugierten der Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors schon mit dem Kernbuchstaben A bezeichnet. Insbesondere sind einem jeden Linienelement, d. h. einem System zweier benachbarter Punkte zwei konjugierte Vektoren zugeordnet; wir schreiben dementsprechend dx^ν statt $d\overset{\nu}{x}$ und dx^N statt $d\overset{N}{x}$.

VI. *Hermitesche Größen*, deren Bestimmungszahlen sich wie die Produkte der Bestimmungszahlen von Vektoren erster und zweiter Art transformieren und die dementsprechend kleine und große Buchstaben als Indizes bekommen, z. B.

$$(3) \qquad g_{iJ} = A_{iJ}^{\lambda M} g_{\lambda M}.\ ^{7})$$

Jeder Hermiteschen Größe ist eine ebenfalls Hermitesche Größe mit konjugiert komplexen Bestimmungszahlen zugeordnet. Solche Größen heißen *konjugiert* und werden mit demselben Kernbuchstaben bezeichnet. Es be-

note [4])), dann sind die Bestimmungszahlen den Koeffizienten der Transformationsmatrix gleich. Nach dem in der Fußnote [4]) ausgesprochenen Prinzip bezeichnen wir diese Bestimmungszahlen gleichfalls mit dem Kernbuchstaben A, z. B.:

$$A_\lambda^\nu = \partial_\lambda x^\nu, \quad A_i^k = \partial_i x^k,$$
$$A_\lambda^k = \partial_\lambda x^k, \quad A_i^\nu = \partial_i x^\nu.$$

Mit ∂_λ, ∂_i usw. wird stets $\partial/\partial\overset{\lambda}{x}$, $\partial/\partial\overset{i}{x}$ usw. gemeint.

[7]) Um Schwerfälligkeit der Formeln zu vermeiden, werden die Buchstaben A, B usw. der Einheitsaffinoren nicht wiederholt: $A_{iJ}^{\lambda M} = A_i^\lambda A_J^M$, usw.

steht aber keine eineindeutige Zuordnung zwischen Hermiteschen und gewöhnlichen Größen und die Analysis der Hermiteschen Größen läßt sich demzufolge nicht auf die Analysis gewöhnlicher Größen zurückführen. Hat man also einmal neben $\mathfrak{G}$ auch $\overline{\mathfrak{G}}$ eingeführt, so ist es unerläßlich, neben den gewöhnlichen Größen auch Hermitesche Größen zu betrachten.

Ist eine gewöhnliche Größe symmetrisch oder alternierend in einigen gleichständigen Indizes, so ist dies bekanntlich eine invariante Eigenschaft. Dasselbe gilt selbstverständlich für Größen zweiter Art. Es gilt aber *nicht* für Hermitesche Größen insofern ungleichartige Indizes in Betracht kommen, schon aus dem einzigen Grunde, weil z. B. durch $P_{\lambda \mathrm{M} \mathrm{N}}$ zwar die konjugierte Größe $P_{\Lambda \mu \nu}$ festgelegt ist, aber nicht $P_{\mathrm{M} \lambda \mathrm{N}}$. Dagegen läßt sich leicht zeigen, daß z. B. die Gleichungen

$$P_{\lambda \mathrm{M} \mathrm{N}} = \pm \overline{P}_{\mu \Lambda \mathrm{N}}, \tag{4}$$

wo der Strich über P Übergang zum konjugiert komplexen Wert angibt, invariante Bedeutung haben, wenn man festlegt, daß in dieser Formel Λ, M usw. in der Reihe $\bar{1}, \ldots, \bar{n}$ und λ, μ usw. in $1, \ldots, n$ *korrespondierende* Zeichen durchlaufen, z. B.

$$P_{1\bar{2}\mathrm{N}} = \pm \overline{P}_{2\bar{1}\mathrm{N}} \qquad (\mathrm{N} = \bar{1}, \ldots, \bar{n}). \tag{5}$$

Wir definieren demzufolge:

Eine Hermitesche Größe heißt in zwei gleichständigen ungleichartigen Indizes λ und M symmetrisch bzw. alternierend, wenn jede Bestimmungszahl in den komplex konjugierten bzw. dessen entgegengesetzten Wert übergeht, wenn man λ in der Reihe $1, \ldots, n$ die Stelle zuweist, die mit der Stelle von M in der Reihe $\bar{1}, \ldots, \bar{n}$ korrespondiert, und umgekehrt.

Nur bei den kovarianten und kontravarianten Größen *zweiten* Grades läßt sich die Definition einfacher fassen. Da nämlich definitionsgemäß für alle Werte der Indizes $P_{\lambda \mathrm{M}} = \overline{P}_{\Lambda \mu}$ ist, ist hier im symmetrischen bzw. alternierenden Falle

$$P_{\lambda \mathrm{M}} = \pm \overline{P}_{\mu \Lambda} = \pm P_{\mathrm{M} \lambda}. \tag{6}$$

Für kovariante und kontravariante symmetrische und alternierende Hermitesche Größen *zweiten* Grades gelten also die formalen Regeln, die auch für gewöhnliche Größen gültig sind, nämlich $P_{[\lambda \mathrm{M}]} = 0$ für symmetrische und $P_{(\lambda \mathrm{M})} = 0$ für alternierende Größen.

Eine *symmetrische* Hermitesche Größe soll Hermitescher *Tensor* heißen. Jedem kovarianten Hermiteschen Tensor $g_{\lambda \mathrm{M}}$ ist eine *Hermitesche Differentialform*

$$g_{\lambda \mathrm{M}}\, dx^{\lambda}\, dx^{\mathrm{M}} \tag{7}$$

zugeordnet. Ist der Rang von $g_{\lambda \mathrm{M}}$ gleich n, so kann man bekanntlich auf unendlichviele Weisen n Vektoren $\overset{i}{u}_\lambda$ so bestimmen, daß

$$(8) \qquad g_{\lambda \mathrm{M}} = \sum_{i=1}^{n} \pm \overset{i}{u}_\lambda \overset{i}{u}_\mathrm{M} \text{ [8])}$$

ist. Sind dann $\underset{i}{u}^\nu$ und $\underset{i}{u}^\mathrm{N}$ die reziproken Vektoren zu $\overset{i}{u}_\lambda$ bzw. $\overset{i}{u}_\Lambda$:

$$(9) \qquad \overset{i}{u}_\alpha \underset{j}{u}^\alpha = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \qquad \overset{i}{u}_\mathrm{A} \underset{j}{u}^\mathrm{A} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

so ist der kontravariante Hermitesche Tensor

$$(10) \qquad g^{\mathrm{M}\nu} = \sum_i \pm \underset{i}{u}^\mathrm{M} \underset{i}{u}^\nu$$

mit derselben Verteilung der $+$- und $-$-Zeichen wir in (8) der *Reziproke* von $g_{\lambda \mathrm{M}}$:

$$(11) \qquad g_{\lambda \mathrm{M}} g^{\mathrm{M}\nu} = A_\lambda^\nu; \qquad g_{\mu \Lambda} g^{\mathrm{N}\mu} = A_\Lambda^\mathrm{N}.$$

§ 2.

Ortsabhängigkeit der Größen.

Von allen vorkommenden Ortsfunktionen wollen wir voraussetzen, daß sie *halbanalytisch* sind, d. h. daß sie analytisch von den $2n$ Variablen $\overset{\nu}{x}$ und $\overset{\mathrm{N}}{x}$ zusammen, oder, was dasselbe ist, von den reellen und imaginären Teilen der $\overset{\nu}{x}$ abhängen. Diese Eigenschaft ist bei Koordinatentransformation invariant.

Ein Skalar soll *analytisch* heißen, wenn er entweder in den $\overset{\nu}{x}$ oder in den $\overset{\mathrm{N}}{x}$ analytisch ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß er entweder den Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$(12) \qquad \partial_\mathrm{M} \varphi = 0, \qquad \partial_\mu \bar{\varphi} = 0, \text{ [8a])}$$

oder deren Konjugierten

$$(13) \qquad \partial_\mu \varphi = 0, \qquad \partial_\mathrm{M} \bar{\varphi} = 0$$

genügt.

Größen erster bzw. zweiter Art sollen *analytisch* genannt werden, wenn ihre Bestimmungszahlen analytische, im betrachteten Gebiet reguläre Funk-

---

[8]) Vgl. z. B. Pascal, Repertorium, zweite Auflage 1910, I. 1, S. 128.

[8a]) Setzt man $\overset{\nu}{x} = \overset{\nu_r}{x} + i \overset{\nu_i}{x}$, $\overset{\mathrm{N}}{x} = \overset{\nu_r}{x} - i \overset{\nu_i}{x}$ (vgl. § 3), so sind ∂_λ und ∂_Λ definiert durch $2\partial_\lambda = \partial / \partial \overset{\lambda_r}{x} - i\, \partial / \partial \overset{\lambda_i}{x}$, $2\partial_\Lambda = \partial / \partial \overset{\lambda_r}{x} + i\, \partial / \partial \overset{\lambda_i}{x}$. Entsprechende Definitionen gelten für ∂_i und ∂_j.

tionen der $\overset{\nu}{x}$ bzw. der $\overset{N}{x}$ sind. Diese Eigenschaft ist bei den erlaubten Koordinatentransformationen invariant. Ist eine Größe analytisch, so ist ihre Konjugierte es ebenfalls. Es hätte keinen Sinn, Größen erster bzw. zweiter Art einzuführen, deren Bestimmungszahlen analytische Funktionen der $\overset{N}{x}$ bzw. der $\overset{\nu}{x}$ wären, weil diese Eigenschaft bei den erlaubten Koordinatentransformationen nicht invariant wäre.

Aus demselben Grunde hätte es keinen Sinn, *Hermitesche* Größen einzuführen, deren Bestimmungszahlen analytische Funktionen der $\overset{\nu}{x}$ oder der $\overset{N}{x}$ wären.

Sind $\overset{i}{v}_\lambda$ n beliebige linear unabhängige *analytische* Vektoren und $\underset{i}{v}^\nu$ ihre Reziproken, so sind letztere ebenfalls analytisch und jede Größe läßt sich als Summe von Produkten der $\overset{i}{v}_\lambda$, $\overset{i}{v}_\Lambda$, $\underset{i}{v}^\nu$ und $\underset{i}{v}^N$ schreiben, mit Koeffizienten, die halbanalytisch, aber im allgemeinen nicht analytisch sind. Jede Größe ist also eine Summe von Vielfachen von Produkten analytischer Größen mit halbanalytischen skalaren Koeffizienten.

Ein Skalar p ist dann und nur dann Produkt eines in $\overset{\nu}{x}$ analytischen Skalars mit einem in $\overset{N}{x}$ analytischen Skalar, wenn

$$p\,\partial_\Omega \partial_\mu p = (\partial_\Omega p)\,\partial_\mu p \tag{14}$$

ist, wie sich bei Substitution bzw. Integration unmittelbar ergibt. Dagegen kann *jede* Größe als (im allgemeinen unendliche) *Summe* von Produkten analytischer Größen geschrieben werden.

Wir beweisen den Satz:

Ein kovarianter Hermitescher Tensor vom Range n gestattet dann und nur dann eine solche Zerlegung von der Form (8), *daß die Vektoren $\overset{i}{u}_\lambda$ analytisch sind, wenn*

$$g^{\Lambda\nu}\,\partial_M \partial_\mu g_{\lambda\Lambda} + (\partial_M g^{\Lambda\nu})\,\partial_\mu g_{\lambda\Lambda} = 0 \tag{15}$$

ist.

Beweis. Die Notwendigkeit zeigt sich sofort bei Einsetzen von (8) in (15) unter Berücksichtigung der Analytizitätsbedingungen für die $\overset{i}{u}_\lambda$:

$$\partial_M \overset{i}{u}_\lambda = 0, \qquad \partial_\mu \overset{i}{u}_\Lambda = 0. \tag{16}$$

Zum Beweise, daß die Bedingung auch hinreichend ist, sind die Integrabilitätsbedingungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \partial_\mu \overset{i}{u}_\lambda &= \overset{i}{u}_\varrho\, g^{\Lambda\varrho}\, \partial_\mu g_{\lambda\Lambda}, & \partial_M \overset{i}{u}_\lambda &= 0, \\ \partial_M \overset{i}{u}_\Lambda &= \overset{i}{u}_P\, g^{P\varkappa}\, \partial_M g_{\Lambda\varkappa}, & \partial_\mu \overset{i}{u}_\Lambda &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

zu untersuchen. Von diesen Bedingungen

$$(18)\qquad \partial_{[\omega}\partial_{\mu]}\overset{i}{u}_\lambda = 0, \quad \partial_{[\omega}\partial_{\mu]}\overset{i}{u}_\Lambda = 0, \quad \partial_{[\Omega}\partial_{\mathrm{M}]}\overset{i}{u}_\lambda = 0, \quad \partial_{[\Omega}\partial_{\mathrm{M}]}\overset{i}{u}_\Lambda = 0,$$

$$(19)\qquad \partial_\Omega(\overset{i}{u}_\varrho\, g^{\Lambda\varrho}\,\partial_\mu g_{\lambda\Lambda}) = 0, \quad \partial_\omega(\overset{i}{u}_{\mathrm{P}}\, g^{\mathrm{P}\alpha}\,\partial_{\mathrm{M}} g_{\Lambda\alpha}) = 0$$

sind die (18) wegen (17) erfüllt, während den (19) auf Grund von (15) und (17) genügt wird.

Es sei nebenbei bemerkt, daß die linke Seite von (15) stets eine Hermitesche Größe vierten Grades ist und somit eine Differentialkomitante zweiter Ordnung von $g_{\lambda\mathrm{M}}$ darstellt[9]).

§ 3.
Realitätsverhältnisse und die X_{2n}.

Setzen wir

$$(20)\qquad \begin{aligned} \overset{\nu}{x} &\overset{*}{=} \overset{\nu_r}{x} + i\,\overset{\nu_i}{x} \\ \overset{\mathrm{N}}{x} &\overset{*}{=} \overset{\nu_r}{x} - i\,\overset{\nu_i}{x} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\nu_r = 1_r, \ldots, n_r, \;^{10)} \\ &\nu_i = 1_i, \ldots, n_i, \end{aligned} \right.$$

so lassen sich die Punkte der X_n anstatt durch die n komplexen Koordinaten $\overset{\nu}{x}$ (oder $\overset{\mathrm{N}}{x}$) auch eindeutig durch die $2n$ *reellen* Parameter $\overset{\nu_r}{x}$, $\overset{\nu_i}{x}$ beschreiben, die wir als Koordinaten in einer *reellen* X_{2n} auffassen können. Ein besonderer Fall des Übergangs von der komplexen X_n zur reellen X_{2n} ist der Übergang von einer algebraischen Kurve zur zugehörigen Riemannschen Fläche.

In dieser X_{2n} definieren aber die Gleichungen (20) eine lineare Transformation, so daß wir auch die $\overset{\nu}{x}$ und $\overset{\mathrm{N}}{x}$ selbst wieder als Koordinaten in der X_{2n} auffassen können. Dazu ist es aber wünschenswert, den $\overset{\nu_r}{x}$ und $\overset{\nu_i}{x}$ auch alle *komplexen* Werte annehmen zu lassen, wodurch eine „vollstän-

---

[9]) Es wird sich später aus unseren Gleichungen (44) und (49) zeigen, daß diese Komitante nichts anderes ist als die Krümmungsgröße der zu $g_{\lambda\mathrm{M}}$ gehörigen Übertragung.

[10]) Wir verwenden das Zeichen $\overset{*}{=}$ in Gleichungen, die Größen enthalten, überall dort, wo ausdrücklich betont werden soll, daß nur numerische Gleichheit in bezug auf das gerade gewählte Bezugssystem steht, während links und rechts Ausdrücke auftreten, die sich in verschiedener Weise transformieren. Eine Gleichung mit $\overset{*}{=}$ darf also nicht kovariant differenziert werden. Das einfachste Beispiel bilden die Gleichungen

$$A_\lambda^\nu \overset{*}{=} \underset{\lambda}{e}{}^\nu \overset{*}{=} \overset{\nu}{e}_\lambda \overset{*}{=} \delta_\lambda^\nu; \quad A_\Lambda^{\mathrm{N}} \overset{*}{=} \underset{\Lambda}{e}{}^{\mathrm{N}} \overset{*}{=} \overset{\mathrm{N}}{e}_\Lambda \overset{*}{=} \delta_\Lambda^{\mathrm{N}},$$

wo die $\underset{\lambda}{e}{}^\nu$ und $\overset{\nu}{e}_\lambda$ die zu den $\overset{\nu}{x}$ gehörigen kontra- bzw. kovarianten Maßvektoren sind und das Kroneckersche Symbol δ_λ^ν bzw. $\delta_\Lambda^{\mathrm{N}}$ 1 oder 0 bedeutet, je nachdem für die beiden Indizes gleiche oder ungleiche Zeichen eingesetzt werden. Im Gegensatz zu A_λ^ν ist δ_λ^ν keine Größe, sondern ein System von n^2 konstanten Skalaren.

dige“ X_{2n} entsteht, die ein im topologischen Sinne $4n$-dimensionales Gebilde ist. In dieser X_{2n} sind die $\overset{\nu}{x}$ und $\overset{\mathrm{N}}{x}$ $2n$ *unabhängige* Koordinaten; die ursprüngliche X_n wird auf diejenigen Punkte dieser X_{2n} abgebildet, die durch die n Gleichungen

$$\overset{\nu}{x} = \overset{\mathrm{N}}{\bar{x}} \tag{21}$$

charakterisiert sind und die wir zusammen die „Bild-X_n“ nennen wollen. Den anderen Punkten der X_{2n} entsprechen dagegen *keine* Punkte der X_n.[11])

In der X_{2n} sind die folgenden Gebilde wichtig:

I. Die schon oben erwähnte Bild-X_n, charakterisiert durch die Gleichungen (21).

II. Zwei Scharen von je ∞^n X_n, die wir die *isotropen* X_n erster bzw. zweiter Art nennen wollen und die durch die Gleichungen

$$\overset{\mathrm{N}}{x} = \text{konst.} \tag{22a}$$

bzw.

$$\overset{\nu}{x} = \text{konst.} \tag{22b}$$

charakterisiert sind. (NB. die $\overset{\nu}{x}$ und $\overset{\mathrm{N}}{x}$ sind jetzt *unabhängig* voneinander.)

Die isotropen X_n der einen Art werden durch die isotropen X_n der anderen Art eineindeutig aufeinander abgebildet. Analytisch wird diese Abbildung dadurch zum Ausdruck gebracht, und zwar unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, daß die $\overset{\nu}{x}$ bzw. die $\overset{\mathrm{N}}{x}$ in den beiden korrespondierenden isotropen X_n dieselben Werte annehmen. Die Linienelemente in einem Punkte einer isotropen X_n erster bzw. zweiter Art, die in der durch den Punkt gehenden isotropen X_n zweiter bzw. erster Art enthalten sind, werden dabei in eineindeutiger Weise abgebildet auf die Linienelemente, die sich in derselben Weise jedem anderen Punkte der erstgenannten isotropen X_n zuordnen lassen. Diese Abbildung wollen wir die zu den isotropen X_n gehörige *Pseudoäquipollenz* nennen. Analytisch wird die Pseudoäquipollenz dadurch zum Ausdruck gebracht, daß die dx^ν bzw. die dx^{N} in den beiden korrespondierenden isotropen X_n dieselben Werte annehmen.

III. Das (im zu betrachtenden Koordinatensystem $\overset{\nu}{x}, \overset{\mathrm{N}}{x}$) „Reelle“ der X_n, das den Gleichungen

$$\overset{\nu}{x} \overset{*}{=} \overset{\mathrm{N}}{x}, \tag{23}$$

---

[11]) Der Übergang von der X_n zur vollständigen X_{2n} verdankt ihre Wichtigkeit der Tatsache, daß die Beziehung (21) nicht in den Gleichungen auftritt, sondern nur bei der Diskussion der Realitätsverhältnisse vorkommt.

gleichwertig mit

$$\overset{\nu_l}{x} \overset{*}{=} 0, \tag{24}$$

sowie den Gleichungen (21) genügt, ist ein im topologischen Sinne n-dimensionales Gebilde in der topologisch $2n$-dimensionalen X_n (für $n=1$ z. B. die reelle Achse in der komplexen Ebene). Sieht man ab von (21) (vgl. Fußnote [11])), so definieren die Gleichungen (23) oder (24) eine (topologisch $2n$-dimensionale) X_n in der (topologisch $4n$-dimensionalen) X_{2n}. Es sei hervorgehoben, daß wohl die Gleichungen (21), nicht aber die Gleichungen (23) und (24) der Gruppe $\mathfrak{G}$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}$ gegenüber invariant sind, so daß das „Reelle" der X_n keine Bedeutung unabhängig vom Koordinatensystem hat, sondern ein mit dem Koordinatensystem wechselndes Gebilde ist.

Einem beliebigen Vektorfelde v^ν der X_n und seinem konjugierten Felde v^{N} entsprechen in eineindeutiger Weise folgende Felder der X_{2n}:

A. Das Feld $v^{\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{z} = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}$ mit den $2n$ Bestimmungszahlen

$$v^{\mathfrak{c}} = \begin{cases} v^\nu, & \mathfrak{c} = \nu, \\ v^{\mathrm{N}}, & \mathfrak{c} = \mathrm{N}. \end{cases} \tag{25}$$

Bekommt v^ν einen Faktor, dann bekommt v^{N} den komplex konjugierten Faktor, und proportionalen Feldern in der X_n entsprechen also dann und nur dann proportionale Felder in der X_{2n}, wenn der Proportionalitätsfaktor *reell* ist;

B. Die Projektionen des Vektors $v^{\mathfrak{c}}$ auf die isotrope n-Richtung erster bzw. zweiter Art in der isotropen n-Richtung zweiter bzw. erster Art:

$$\begin{aligned} \overset{1}{v}{}^{\mathfrak{c}} &= \begin{cases} v^\nu, & \mathfrak{c} = \nu, \\ 0, & \mathfrak{c} = \mathrm{N}, \end{cases} \\ \overset{2}{v}{}^{\mathfrak{c}} &= \begin{cases} 0, & \mathfrak{c} = \nu, \\ v^{\mathrm{N}}, & \mathfrak{c} = \mathrm{N}. \end{cases} \end{aligned} \tag{26}$$

Proportionalen Feldern der X_n entsprechen hierbei stets proportionale Felder der X_{2n};

und außerdem in eindeutiger Weise

C. Das Feld des von $\overset{1}{v}{}^{\mathfrak{c}}$ und $\overset{2}{v}{}^{\mathfrak{c}}$ aufgespannten Bivektors

$$f^{\mathfrak{bc}} = \overset{1}{v}{}^{[\mathfrak{b}} \overset{2}{v}{}^{\mathfrak{c}]} = \begin{cases} 0, & \mathfrak{b} = \lambda, \ \mathfrak{c} = \mu, \\ \frac{1}{2} v^\lambda v^{\mathrm{M}}, & \mathfrak{b} = \lambda, \ \mathfrak{c} = \mathrm{M}, \\ 0, & \mathfrak{b} = \Lambda, \ \mathfrak{c} = \mathrm{M}, \\ -\frac{1}{2} v^\Lambda v^\mu, & \mathfrak{b} = \Lambda, \ \mathfrak{c} = \mu. \end{cases} \text{[11])} \tag{27}$$

Proportionale Felder entsprechen sich hier dann und nur dann, wenn der Proportionalitätsfaktor reell ist; bekommt v^r dagegen einen Faktor mit Modul 1, so ändert sich f^{bc} nicht.

Die Felder $\overset{1}{v}{}^c$ und $\overset{2}{v}{}^c$ ermöglichen eine einfache geometrische Deutung der Analytizitätsbedingung für die Felder v^r und v^N. Letztere sind dann und nur dann analytisch, wenn das Feld $\overset{1}{v}{}^c$ in jeder isotropen X_n zweiter Art (und somit auch $\overset{2}{v}{}^c$ in jeder isotropen X_n erster Art) in sich pseudoäquipollent ist. Entsprechendes gilt für Größen erster oder zweiter Art höherer Ordnung. Ein Skalarfeld ist dann und nur dann analytisch in $\overset{r}{x}$ bzw. $\overset{N}{x}$, wenn es in jeder isotropen X_n zweiter bzw. erster Art konstant ist und somit die isotropen X_n zweiter bzw. erster Art auf die Punkte der komplexen Zahlenebene abbildet.

Ist $\varphi(\overset{r}{x}, \overset{N}{x})$ ein Skalarfeld der X_n und $\psi(\overset{r}{x}, \overset{N}{x}) = \overline{\varphi}(\overset{N}{x}, \overset{r}{x}) = \overline{\varphi}$, so werden bei Erweiterung von φ und ψ über die vollständige X_{2n} diese Funktionen in den Punkten außerhalb der Bild-X_n im allgemeinen nicht konjugiert bleiben; sie bilden daher die X_{2n} auf die (topologisch 4-dimensionale) mit komplexen Punkten erweiterte komplexe Ebene ab. Dafür, daß φ analytisch in den $\overset{r}{x}$ oder in den $\overset{N}{x}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß die beiden Scharen isotroper X_n der X_{2n} durch das Funktionenpaar (φ, ψ) auf die beiden korrespondierenden bzw. nicht korrespondierenden Scharen isotroper Geraden der komplexen Ebene abgebildet werden.

Eine halbanalytische Transformation der X_{2n} ist also dann und nur dann eine *analytische* Transformation der X_n, wie wir sie im § 1 zugrunde gelegt haben, *wenn sie die beiden Scharen von isotropen X_n invariant läßt.*

§ 4.

Lineare Übertragungen in der X_n.

Stellen wir die übliche Forderung auf, daß die Differenz des zu einer linearen Übertragung gehörigen kovarianten Differentials eines Vektors und des gewöhnlichen Differentials linear ist in den dx^r und in den Bestimmungszahlen des Vektors, so ist die allgemeinste Form der linearen Übertragung bekanntlich

$$\delta v^r = dv^r + \Gamma^r_{\lambda\mu} v^\lambda dx^\mu, \qquad (28)$$
$$\delta w_\lambda = dw_\lambda - \Gamma^r_{\lambda\mu} w^r dx^\mu.$$

Die Gleichungen (28) behalten ihren Sinn, wenn v^r nicht analytisch ist. Statt $dv^r = dx^\mu \partial_\mu v^r$ kommt dann aber

$$dv^r = dx^\mu \partial_\mu v^r + dx^\Lambda \partial_\Lambda v^r. \qquad (29)$$

Eine solche Übertragung bestimmt eine Übertragung der Größen zweiter Art und somit auch der Hermiteschen Größen, sobald man fordert, daß das Differential zweier konjugierter Größen konjugiert sein soll. Aus (28) folgt dann

$$(30)\qquad \begin{aligned} \delta v^{\mathrm{N}} &= dv^{\mathrm{N}} + \Gamma^{\mathrm{N}}_{\mathrm{AM}} v^{\mathrm{A}}\, dx^{\mathrm{M}}, \\ \delta w_{\mathrm{A}} &= dw_{\mathrm{A}} - \Gamma^{\mathrm{N}}_{\mathrm{AM}} w_{\mathrm{N}}\, dx^{\mathrm{M}}, \end{aligned}$$

wo $\Gamma^{\mathrm{N}}_{\mathrm{AM}}$ zu $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ konjugiert ist.

Wir wollen aber zunächst allgemeiner fordern, daß die oben erwähnte Differenz linear ist in den $2n$ Bestimmungszahlen $dx^{\mathfrak{c}}$ und ebenso in den $2n$ Bestimmungszahlen des Vektors und seines Konjugierten. Die allgemeinste Form einer solchen Übertragung ist dann

$$(31)\qquad \begin{aligned} \delta v^{\nu} &= dv^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} v^{\lambda}\, dx^{\mu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mathrm{M}} v^{\lambda}\, dx^{\mathrm{M}} + \Gamma^{\nu}_{\mathrm{A}\mu} v^{\mathrm{A}}\, dx^{\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mathrm{AM}} v^{\mathrm{A}}\, dx^{\mathrm{M}}, \\ \delta v^{\mathrm{N}} &= dv^{\mathrm{N}} + \Gamma^{\mathrm{N}}_{\mathrm{AM}} v^{\mathrm{A}}\, dx^{\mathrm{M}} + \Gamma^{\mathrm{N}}_{\mathrm{A}\mu} v^{\mathrm{A}}\, dx^{\mu} + \Gamma^{\mathrm{N}}_{\lambda\mathrm{M}} v^{\lambda}\, dx^{\mathrm{M}} + \Gamma^{\mathrm{N}}_{\lambda\mu} v^{\lambda}\, dx^{\mu}, \end{aligned}$$

wo die Γ $8n^3$ beliebige Parameter sind, von denen wir nur voraussetzen, daß sie halbanalytisch sind.

In der X_{2n} ist dies also eine *gewöhnliche* lineare Übertragung. Wir stellen nun die folgenden von der Wahl der Koordinaten unabhängigen Forderungen auf:

1. Jede isotrope X_n erster oder zweiter Art soll geodätisch sein, d. h. in jedem Punkte soll ihre n-Richtung bei jeder von diesem Punkte ausgehenden Verschiebung in einer in der X_n enthaltenen Richtung in sich übergehen.

2. Eine isotrope X_n erster bzw. zweiter Art soll bei Verschiebung ihrer Punkte über äquipollente Strecken $(0, dx^{\mathrm{N}})$ bzw. $(dx^{\nu}, 0)$ in eine isotrope X_n derselben Art übergehen. Die isotropen X_n erster bzw. zweiter Art sind also pseudoparallel, und die n-Richtung einer isotropen X_n erster bzw. zweiter Art geht auch bei einer *beliebigen* Verschiebung in eine n-Richtung derselben Art über.

3. Ein in einer isotropen X_n gelegener Vektor soll bei pseudoparalleler Verschiebung in einer in einer isotropen X_n der anderen Art enthaltenen Richtung nach einer benachbarten isotropen X_n der erstgenannten Art in einen äquipollenten Vektor übergehen.

Die bei dieser Gelegenheit entstehende Abbildung zweier isotroper X_n derselben Art fällt also mit der im § 3 unter II definierten Äquipollenz zusammen. Außerdem folgt aus dieser dritten Forderung, unter Berücksichtigung der vorigen, die Existenz infinitesimaler Parallelogramme, von denen zwei Seiten in einer beliebigen isotropen Richtung erster Art und die beiden anderen in einer beliebigen isotropen Richtung zweiter Art liegen.

Dagegen gibt es im allgemeinen kein infinitesimales Parallelogramm, das ganz in einer isotropen X_n erster oder zweiter Art läge. Es gibt solche dann und nur dann in jeder Richtung und Lage, wenn $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ und $\Gamma^{\mathrm{N}}_{\Lambda\mathrm{M}}$ symmetrisch in $\lambda\mu$ bzw. $\Lambda\mathrm{M}$ sind.

4. Die kovarianten Differentiale zweier konjugierter Größen sollen selbst konjugiert sein.

Aus der ersten Forderung folgt:

$$\Gamma^{\nu}_{\Lambda\mathrm{M}} = \Gamma^{\mathrm{N}}_{\lambda\mu} = 0. \tag{32}$$

Aus der zweiten Forderung folgt:

$$\Gamma^{\nu}_{\Lambda\mu} = \Gamma^{\mathrm{N}}_{\lambda\mathrm{M}} = 0. \tag{33}$$

Aus der dritten Forderung folgt:

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mathrm{M}} = \Gamma^{\mathrm{N}}_{\Lambda\mu} = 0. \tag{34}$$

Aus der vierten Forderung folgt, daß $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ und $\Gamma^{\mathrm{N}}_{\Lambda\mathrm{M}}$ konjugiert komplex sind:

$$\Gamma^{\mathrm{N}}_{\Lambda\mathrm{M}} = \overline{\Gamma}^{\nu}_{\lambda\mu}. \tag{35}$$

Die Übertragung bekommt also die Form

$$\begin{aligned} \delta v^{\nu} &= (\partial_{\mu} v^{\nu})\, dx^{\mu} + (\partial_{\mathrm{M}} v^{\nu})\, dx^{\mathrm{M}} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} v^{\lambda}\, dx^{\mu}, \\ \delta v^{\mathrm{N}} &= (\partial_{\mathrm{M}} v^{\mathrm{N}})\, dx^{\mathrm{M}} + (\partial_{\mu} v^{\mathrm{N}})\, dx^{\mu} + \Gamma^{\mathrm{N}}_{\Lambda\mathrm{M}} v^{\Lambda} dx^{\mathrm{M}}, \end{aligned} \tag{36}$$

die für den Fall, daß v^{ν} analytisch ist, übergeht in

$$\delta v^{\nu} = (\partial_{\mu} v^{\nu})\, dx^{\mu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} v^{\lambda} dx^{\mu}; \quad \text{konj.}\ ^{12)} \tag{37}$$

Für *analytische* Größen gelten also infolge unserer Annahmen die *gewöhnlichen* Gleichungen und im Falle, daß $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ analytisch in $\overset{\nu}{x}$ ist, ist sogar das kovariante Differential einer analytischen Größe wiederum analytisch. In diesem speziellen Falle wollen wir die Übertragung *analytisch* nennen.

Die n. und h. Bedingung dafür lautet also:

$$\partial_{\Omega} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = 0; \quad \text{konj.} \tag{37a}$$

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} v^{\nu} &= \partial_{\mu} v^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} v^{\lambda}, \\ \nabla_{\mathrm{M}} v^{\nu} &= \partial_{\mathrm{M}} v^{\nu}, \\ \nabla_{\mu} v^{\mathrm{N}} &= \partial_{\mu} v^{\mathrm{N}}, \\ \nabla_{\mathrm{M}} v^{\mathrm{N}} &= \partial_{\mathrm{M}} v^{\mathrm{N}} + \Gamma^{\mathrm{N}}_{\Lambda\mathrm{M}} v^{\Lambda} \end{aligned} \tag{38}$$

[12]) Von jetzt an werden wir von zwei Gleichungen dieser Art meistens nur die eine ausschreiben und durch Zufügung von „konj." angeben, daß auch die zweite ausgeschrieben zu denken ist.

definieren vier paarweise konjugierte Größen, die kovarianten Differentialquotienten von v^ν und v^{N}, die sich als die Komponenten des kovarianten Differentialquotienten von v^c

(39) $$\nabla_b v^c = \partial_b v^c + \Gamma^c_{ab} v^a$$

in der X_{2n} auffassen lassen.

§ 5.

Die durch einen Hermiteschen Fundamentaltensor festgelegten Übertragungen.

In der X_n sei jetzt ein positiv definiter kovarianter Hermitescher Tensor (Hermiteisch-symmetrische Größe) zweiten Grades n-ten Ranges

(40) $$g_{\lambda\mathrm{M}} = \bar{g}_{\Lambda\mu} = g_{\mathrm{M}\lambda}$$

eingeführt. Die X_n, die in solcher Weise eine Hermitesche Maßbestimmung

(41) $$ds^2 = g_{\lambda\mathrm{M}}\, dx^\lambda\, dx^{\mathrm{M}}$$

bekommen hat, soll U_n heißen. In einer U_n verwenden wir $g_{\lambda\mathrm{M}}$ und $g^{\mathrm{M}\nu}$ zum Herauf- und Herunterziehen der Indizes in derselben Weise wie dies bei einem gewöhnlichen Fundamentaltensor üblich ist. Es ist nur zu beachten, *daß dabei stets ein kleiner in einen großen Index übergeht und umgekehrt.* Wird $g_{\lambda\mathrm{M}}$ nach (8) zerlegt, so sind die $\overset{i}{u}_\lambda$ gegenseitig unitär orthogonale Einheitsvektoren und es ist

(42) $$\underset{i}{u}^{\Lambda} = g^{\Lambda\mu}\, \overset{i}{u}_\mu = \overset{i}{u}^{\Lambda}.$$

Alle Systeme von n Vektoren $\overset{i}{u}_\lambda$, die der Gleichung (8) genügen, ergeben sich bekanntlich aus *einem* solchen System vermöge einer unitär orthogonalen Transformation, deren Parameter Ortsfunktionen sein können. Wir wollen solche Systeme *unitärorthogonale n-Beine* nennen und das Feld ein *unitärorthogonales n-Beinfeld.*

Wir behaupten, daß durch die zusätzliche Forderung, daß das kovariante Differential von $g_{\lambda\mathrm{M}}$ verschwinden soll, eine Übertragung vollständig festgelegt ist. In der Tat ergibt die Gleichung

(43) $$0 = \delta g_{\lambda\mathrm{M}} = (\partial_\omega g_{\lambda\mathrm{M}})\, \underset{\text{konj.}}{dx^\omega + (\partial_\Omega g_{\lambda\mathrm{M}})dx^\Omega} - \Gamma^\nu_{\lambda\omega} g_{\nu\mathrm{M}}\, dx^\omega - \Gamma^{\mathrm{N}}_{\mathrm{M}\Omega} g_{\lambda\mathrm{N}}\, dx^\Omega$$

unmittelbar:

(44) $$\begin{aligned} \Gamma^\nu_{\lambda\omega} &= g^{\mathrm{M}\nu}\, \partial_\omega g_{\lambda\mathrm{M}}, \\ \Gamma^{\mathrm{N}}_{\Lambda\Omega} &= g^{\mathrm{N}\mu}\, \partial_\Omega g_{\mu\Lambda}, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen sind wegen der in (40) vorausgesetzten Hermiteschen Symmetrie mit (35) verträglich.

Die Übertragung ist im allgemeinen nicht symmetrisch (vgl. S. 331 oben). Setzt man

$$(45)\qquad S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \Gamma^{\nu}_{[\lambda\mu]}; \quad \text{konj.},$$

so ist

$$(46)\qquad S_{\lambda\mu\Sigma} = g_{\Sigma\nu} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \partial_{[\lambda} g_{\mu]\Sigma}; \quad \text{konj.}$$

Sind die $\overset{i}{u}_{\lambda}$ analytisch, so verschwinden $S_{\lambda\mu\Sigma}$ und $S_{\Lambda M\sigma}$ dann und nur dann, wenn $g_{\lambda M}$ sich in der Gestalt

$$(47)\qquad g_{\lambda M} = \partial_{\lambda}\partial_{M}\varphi$$

schreiben läßt.

Man berechnet leicht, daß die Krümmungsgröße der Übertragung

$$(48)\qquad R_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}\mathfrak{a}}^{\cdot\cdot\cdot\mathfrak{c}} = -2\,\partial_{[\mathfrak{d}}\Gamma^{\mathfrak{c}}_{|\mathfrak{a}|\mathfrak{b}]} - 2\,\Gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{e}[\mathfrak{d}}\Gamma^{\mathfrak{e}}_{|\mathfrak{a}|\mathfrak{b}]}$$

nur die folgenden nicht verschwindenden Bestimmungszahlen hat:

$$(49)\qquad \begin{aligned} R_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= -R_{\mu\Omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -\partial_{\Omega}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}, \\ R_{\omega M\Lambda}^{\cdot\cdot\cdot N} &= -R_{M\omega\Lambda}^{\cdot\cdot\cdot N} = -\partial_{\omega}\Gamma^{N}_{\Lambda M}. \end{aligned}$$

Das Verschwinden dieser Ausdrücke ist also n. und h. für die Integrabilität der Übertragung, nach (37a) aber auch für die Analytizität der Übertragung und infolge (15) und (44) ebenfalls für die Existenz eines Systems von n analytischen gegenseitig unitärorthogonalen Feldern von Einheitsvektoren. Es gilt also der Satz:

In einer U_n sind Integrabilität der Übertragung, Analytizität derselben und Existenz eines analytischen unitärorthogonalen n-Beinfeldes drei gleichwertige Forderungen, von denen die letzte unabhängig vom Übertragungsbegriff ist.

Aus (38) folgt, im Falle wo diese Forderungen erfüllt sind,

$$(50)\qquad 0 = \nabla_{\mu} g_{\lambda M} = \sum_{i} \pm (\nabla_{\mu}\overset{i}{u}_{\lambda})\overset{i}{u}_{M},$$

so daß

$$(51)\qquad \delta\overset{i}{u}_{\lambda} = dx^{\mu}\nabla_{\mu}\overset{i}{u}_{\lambda} + dx^{M}\nabla_{M}\overset{i}{u}_{\lambda} = 0$$

ist. Das n-Beinfeld ist also *konstant*. Man kann dies auch folgendermaßen einsehen. Ist v^{ν} ein analytischer Vektor, so ist

$$(52)\qquad \nabla_{M} v_{\Lambda} = \nabla_{M} v^{\nu} \underset{\text{konj.}}{g_{\Lambda\nu}} = g_{\Lambda\nu}\nabla_{M} v^{\nu} = 0.$$

Ist also ein kovarianter bzw. kontravarianter Vektor einer Art analytisch so ist der zugehörige kontravariante bzw. kovariante Vektor der anderen Art auf jeder isotropen X_n seiner *eigenen* Art konstant, und umgekehrt. Ist also ein unitärorthogonales kontravariantes n-Bein $\underset{i}{u}^{\nu}$ *analytisch*, d. h.

konstant auf jeder isotropen X_n *zweiter* Art, so ist es auch konstant auf jeder X_n *erster* Art (und folglich überhaupt konstant), weil die $\underset{i}{u}^{\nu}$ sich als alternierende Produkte von je $n-1$ Vektoren $\underset{i}{u}_{\lambda}$ auffassen lassen, und diese nach dem Obigen auf jeder isotropen X_n ihrer eigenen Art konstant sind. Wird also ein n-Bein $\underset{i}{u}^{\nu}$ in irgendeinem Punkte unitärorthogonal transformiert, so transformieren sich, wenn die Forderung der Analytizität aufrechterhalten wird, alle n-Beine in allen Punkten in derselben Weise „synchron" mit.

Außer der aus (49) unmittelbar folgenden ersten Identität[13]), gilt auch die zweite[14]), die hier die Form

$$(53)\qquad \begin{aligned} R_{\dot{\Omega}\mu\lambda}{}^{\nu} - R_{\dot{\Omega}\lambda\mu}{}^{\nu} &= \underset{\text{konj.}}{2\,\partial_{\Omega}} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = 2\,\nabla_{\Omega} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}, \\ 0 &= \underset{\text{konj.}}{2\,\nabla_{[\omega} S_{\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\nu}} + 4\, S_{[\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} S_{\lambda]\alpha}^{\cdot\cdot\nu} \end{aligned}$$

annimmt. Die zweite dieser Gleichungen stellt die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (46) dar. Werden die Indizes ν und N mit Hilfe von $g_{\lambda \mathrm{M}}$ heruntergezogen, so gilt auch die dritte Identität[14])

$$(54)\qquad R_{\Omega\mu\lambda\mathrm{N}} = \underset{\text{konj.}}{-\,R_{\Omega\mu\mathrm{N}\lambda}}\,.$$

Aus (53) und (54) folgt schließlich die vierte Identität[15]), die hier die Form

$$(55)\qquad R_{\Omega\mu\lambda\mathrm{N}} - R_{\lambda\mathrm{N}\Omega\mu} = \underset{\text{konj.}}{2\nabla_{\lambda} S_{\Omega\mathrm{N}\mu}} - 2\nabla_{\Omega} S_{\lambda\mu\mathrm{N}}$$

annimmt. Faltung von (49) nach $\overset{\nu}{\lambda}$ ergibt:

$$(56)\qquad R_{\dot{\Omega}\mu\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \underset{\text{konj.}}{-\,\partial_{\Omega}} \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} = -\,\partial_{\Omega}\,\partial_{\mu} \log \mathfrak{g}; \qquad \mathfrak{g} = |g^{\lambda \mathrm{M}}|$$

und nach $\overset{\nu}{\mu}$:

$$(57)\qquad R_{\alpha\dot{\Omega}\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \partial_{\Omega}\, \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha} = \underset{\text{konj.}}{\partial_{\Omega}}\,\partial_{\lambda} \log \mathfrak{g} + 2\,\partial_{\Omega}\, Z_{\lambda}; \qquad Z_{\lambda} = S_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\alpha}.$$

Auch die Bianchische Identität[16]) gilt und nimmt die Form

$$(58)\qquad \begin{aligned} \nabla_{[\mu} R_{\xi]\dot{\Omega}\lambda}{}^{\nu} &= S_{\mu\xi}^{\cdot\cdot\alpha} R_{\alpha\dot{\Omega}\lambda}{}^{\nu}, \text{ konj.}, \\ \nabla_{[\mu} R_{\xi]\dot{\Omega}\Lambda}{}^{\mathrm{N}} &= S_{\mu\xi}^{\cdot\cdot\alpha} R_{\alpha\Omega\Lambda}{}^{\mathrm{N}}, \text{ konj.} \end{aligned}$$

an.

---

[13]) R. K., S. 87.
[14]) R. K., S. 88.
[15]) R. K., S. 89.
[16]) R. K., S. 90.

Der Fundamentaltensor $g_{\lambda \mathrm{M}}$ bestimmt noch zwei andere Übertragungen. Erstens die symmetrische Übertragung mit den Parametern

$$\overset{S}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{(\lambda\mu)}^{\nu}; \text{ konj.} \tag{59}$$

Diese Übertragung genügt offenbar den vier im § 4 aufgestellten Forderungen; das zugehörige kovariante Differential von $g_{\lambda \mathrm{M}}$ ist aber ungleich Null. Zweitens die Riemannsche Übertragung des symmetrischen Tensors $g_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ in der X_{2n} mit dem Linienelement

$$ds^2 = dx^{\mathfrak{a}}\, dx^{\mathfrak{b}}\, g_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 2\, dx^{\lambda}\, dx^{\mathrm{M}}\, g_{\lambda \mathrm{M}} \tag{60}$$

und den Parametern

$$\left.\begin{aligned} &\overset{R}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{(\lambda\mu)}^{\nu}; \quad \overset{R}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\mathrm{N}} = 0; \\ &\overset{R}{\Gamma}{}_{\lambda \mathrm{M}}^{\nu} = \overset{R}{\Gamma}{}_{\mathrm{M}\lambda}^{\nu} = S^{\nu}_{\cdot \mathrm{M}\lambda} = g^{\mathrm{A}\nu}\, g_{\lambda\Gamma}\, S_{\mathrm{A}\mathrm{M}}^{\cdot\cdot\Gamma}; \end{aligned}\right\} \text{ konj.} \tag{61}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß die zugehörige Übertragung von den im § 4 aufgestellten Forderungen nur 1 und 4 genügt. Die isotropen X_n sind also auch in bezug auf die Riemannsche Übertragung geodätisch, sie sind aber nicht mehr geodätisch parallel. Sie sind überdies in der V_{2n} isotrop im engeren Sinne: sie liegen auf den ∞^{2n} isotropen $(2n-1)$-dimensionalen Hyperkegeln der Nullrichtungen von $g_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$. Für die Bestimmungszahlen der Krümmungsgröße der Riemannschen Übertragung findet man

$$\begin{aligned}
&K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -K_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -2\nabla_{[\omega} S_{\mu]\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + 2 S_{\varrho[\omega}^{\cdot\cdot\nu} S_{\mu]\lambda}^{\cdot\cdot\varrho} - 2 S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varrho} S_{\lambda\varrho}^{\cdot\cdot\nu}; \quad \text{konj.} \\
&K_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -K_{\mu\Omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \nabla_{\Omega} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + \nabla_{\mu} S^{\nu}_{\cdot\Omega\lambda} \\
&\qquad + S^{\varrho}_{\cdot\Omega\lambda} S_{\mu\varrho}^{\cdot\cdot\nu} + S^{\nu}_{\cdot\Sigma\mu} S^{\Sigma}_{\cdot\lambda\Omega} - S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varrho} S^{\nu}_{\cdot\Omega\varrho}; \quad \text{konj.} \\
&K_{\omega\mu\Lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -K_{\mu\omega\Lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -2\nabla_{[\omega} S^{\nu}_{\cdot|\Lambda|\mu]} - 2 S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varrho} S^{\nu}_{\cdot\Lambda\varrho} - 2 S^{\nu}_{\cdot\Sigma[\omega} S^{\Sigma}_{\cdot\mu]\Lambda} \\
&\qquad\qquad + 2 S^{\sigma}_{\cdot\Lambda[\omega} S_{\mu]\sigma}^{\cdot\cdot\nu}; \quad \text{konj.} \\
&K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mathrm{N}} = -K_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mathrm{N}} = 0; \quad \text{konj.} \\
&K_{\Omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mathrm{N}} = -K_{\mu\Omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mathrm{N}} = \nabla_{\mu} S^{\mathrm{N}}_{\cdot\lambda\Omega} - S^{\mathrm{N}}_{\cdot\varrho\Omega} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varrho} + S^{\mathrm{N}}_{\cdot\mu\Sigma} S^{\Sigma}_{\cdot\lambda\Omega}; \quad \text{konj.} \\
&K_{\Omega\mathrm{M}\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -K_{\mathrm{M}\Omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -2\nabla_{[\Omega} S^{\nu}_{\cdot\mathrm{M}]\lambda} - 2 S^{\nu}_{\cdot[\Omega|\sigma|} S^{\sigma}_{\cdot\mathrm{M}]\lambda} - 2 S_{\Omega\mathrm{M}}^{\cdot\cdot\Sigma} S^{\nu}_{\cdot\Sigma\lambda}; \quad \text{konj.}
\end{aligned} \tag{62}$$

§ 6.

Die U_m in der U_n.

In der U_n sei eine X_m gegeben mittels der Parametergleichungen

$$\overset{\nu}{x} = \overset{\nu}{x}(\overset{1}{y}, \ldots, \overset{m}{y}) \tag{63}$$

mit m komplexen Parametern $\overset{e}{y}$, wo $a, \ldots, g$ die Zeichen $1, \ldots, \mathsf{m}$ durchlaufen. Die konjugierten Werte seien durch $\overset{A}{y}$, $A, \ldots, G = \overline{1}, \ldots, \overline{\mathsf{m}}$ an-

gedeutet. Die $\overset{\nu}{x}$ seien im betrachteten Gebiet reguläre analytische Funktionen der $\overset{a}{y}$ und die Funktionalmatrix habe dort überall den Rang m. Dann ist jede isotrope X_m der X_{2m} in einer isotropen X_n derselben Art der X_{2n} enthalten. Wir bilden zunächst die gegenseitig konjugierten Größen

$$(64)\qquad B_a^\nu = \partial_a x^\nu; \quad B_A^{\mathrm{N}} = \partial_A x^{\mathrm{N}};$$

aus diesen Größen und $g_{\lambda\mathrm{M}}$ den Fundamentaltensor g'_{aB} der X_m

$$(65)\qquad g'_{aB} = B_{a\,B}^{\lambda\,\mathrm{M}} g_{\lambda\mathrm{M}},$$

und mittels g'^{aB} die Ausdrücke

$$(66)\qquad B_\lambda^c = g'^{Bc} B_B^{\mathrm{N}} g_{\lambda\mathrm{N}}; \quad B_\Lambda^C = g'^{bC} B_b^\nu g_{\Lambda\nu}$$

und die Ausdrücke

$$(67)\qquad B_a^c = B_{a\beta}^{\beta c} = \begin{cases} 1, & a = c \\ 0, & a \neq c \end{cases}; \quad B_\lambda^\nu = B_{b\lambda}^{\nu b}; \text{ konj.}$$

Die B_a^ν, B_λ^c, B_a^c und B_λ^ν fassen wir alle als verschiedene Arten von Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors B der X_m auf. Dies ist alles genau wie bei einer X_m in V_n, mit dem einzigen Unterschiede, daß statt eines gewöhnlichen ein Hermitescher Fundamentaltensor auftritt.

Es ist zu beachten, daß zwar die B_a^ν, im allgemeinen aber nicht mehr die B_λ^c analytische Funktionen der $\overset{c}{y}$ sind, d. h. im allgemeinen ist $\partial_A B_\lambda^c \neq 0$. Dagegen folgt aus (67), daß

$$(68)\qquad B_b^\mu \partial_D B_\mu^c = -B_\mu^c \partial_D B_b^\mu = 0; \text{ konj.}$$

ist. Aus dieser Gleichung und aus (38) leiten wir noch die für das Folgende wichtigen Identitäten ab:

$$(69)\qquad B_{\mathrm{M}\lambda}^{\mathrm{B}\alpha} \nabla_{\mathrm{B}} B_\alpha^\nu = B_{\mathrm{M}\lambda}^{D\alpha} \partial_D (B_{b\alpha}^{\nu b}) = B_{\mathrm{M}\lambda b}^{D\alpha\nu} \partial_D B_\alpha^b = 0; \text{ konj.}$$

und

$$(70)\qquad B_{\mu\gamma}^{\beta\nu} \nabla_\beta B_\lambda^\gamma = B_{\mu\gamma}^{\beta\nu} g^{\Lambda\gamma} g_{\Gamma\lambda} \nabla_\beta B_\Lambda^\Gamma = g'^{\Delta\nu} g_{\Gamma\lambda} B_{\mu\Delta}^{\beta\Lambda} \nabla_\beta B_\Lambda^\Gamma = 0; \text{ konj.}$$

Mittels B_λ^ν läßt sich zu jedem in einem Punkte der X_m definierten Vektor v^ν bzw. w_λ der U_n die unitärorthogonale Projektion $B_\lambda^\nu v^\lambda$ bzw. $B_\lambda^\nu w_\nu$ auf X_m bilden. Entsprechendes gilt für die konjugierten Größen. Die in der X_m induzierte Übertragung wird erhalten aus der Forderung, daß das kovariante Differential eines in der X_m liegenden Vektors v^ν die Projektion auf die X_m des kovarianten Differentials in der U_n sein soll

$$(71)\qquad \delta' v^\nu = B_\lambda^\nu \delta v^\lambda = B_\lambda^\nu d v^\lambda + B_\alpha^\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha v^\lambda d x^\mu; \text{ konj.}$$

oder in bezug auf die Variablen y:

$$(72)\qquad \begin{aligned} \delta' v^c &= B_\lambda^c \delta v^\lambda = B_\lambda^c d v^\lambda + B_\alpha^c \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha v^\lambda d x^\mu \\ &= d v^c - v^a d y^b B_a^\lambda \partial_b B_\lambda^c + B_{\nu a b}^{c\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu v^a d y^b; \text{ konj.,} \end{aligned}$$

woraus für die Parameter Γ'^{c}_{ab} der induzierten Übertragung folgt:

$$\Gamma'^{c}_{ab} = B^{c\lambda\mu}_{\nu ab}\,\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + B^{c}_{\lambda}\,\partial_b\,B^{\lambda}_{a}\,; \quad \text{konj.} \tag{73}$$

Wir stellen zunächst fest, daß die induzierte Übertragung zum Fundamentaltensor g'_{aB} gehört. In der Tat ist

$$\delta' g'_{aB} = B^{\lambda \mathrm{M}}_{aB}\,\delta g_{\lambda \mathrm{M}} = 0, \tag{74}$$

und die X_m darf also mit U_m bezeichnet werden.

Ferner folgt aus (73), daß die für die Asymmetrie der induzierten Übertragung charakteristische Größe

$$S'_{ab}{}^{\cdot\cdot c} = \Gamma'^{c}_{[ab]} = B^{c\lambda\mu}_{\nu ab}\,S_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\nu}\,; \quad \text{konj.} \tag{75}$$

die U_m-Komponente von $S_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\nu}$ ist. Ist also die Übertragung in der U_n symmetrisch, so ist sie es auch in der U_m.

Aus der Definition der induzierten Übertragung (71) ergibt sich für ein Feld v^ν, das in der U_m liegt:

$$\left.\begin{aligned} B^{\beta}_{\mu}\,\nabla_\beta v^\nu &= B^{\beta}_{\mu}\,\nabla'_\beta v^\nu + v^\lambda H_{\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu}\,; \\ B^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}}\nabla_{\mathrm{B}}\, v^\nu &= B^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}}\nabla'_{\mathrm{B}}\, v^\nu + v^\lambda H_{\mathrm{M}\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu}\,; \end{aligned}\right\} \text{konj.,} \tag{76}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} H_{\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu} &= B^{\beta\alpha}_{\lambda\mu}\,\nabla_\beta\,B^{\nu}_{\alpha}\,; \\ H_{\mathrm{M}\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu} &= B^{\mathrm{B}\alpha}_{\mathrm{M}\lambda}\,\nabla_{\mathrm{B}}\,B^{\nu}_{\alpha}\,; \end{aligned}\right\} \text{konj.} \tag{77}$$

ist. Die Größe $H_{\mathrm{M}\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu}$ verschwindet aber wegen (69):

$$H_{\mathrm{M}\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu} = 0; \qquad B^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}}\,\nabla_{\mathrm{B}}\, v^\nu = B^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}}\,\nabla'_{\mathrm{B}}\, v^\nu; \quad \text{konj.} \tag{78}$$

Aus (70) ergibt sich eine merkwürdige, in der Riemannschen Geometrie nicht gültige Identität:

$$H_{\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu} = B^{\beta\alpha}_{\mu\lambda}\,\nabla_\beta\,B^{\nu}_{\alpha} = B^{\beta}_{\mu}\,\nabla_\beta\,B^{\nu}_{\lambda}\,; \quad \text{konj.} \tag{79}$$

die besagt, daß $B^{\beta}_{\mu}\,\nabla_\beta B^{\nu}_{\lambda}$ einerseits mit dem Index ν unitärorthogonal zur U_m ist, anderseits aber mit dem Index λ in der U_m liegt.

In derselben Weise ergibt sich für ein kovariantes in der U_m liegendes Vektorfeld w_λ:

$$\left.\begin{aligned} B^{\beta}_{\mu}\,\nabla_\beta\, w_\lambda &= B^{\beta}_{\mu}\,\nabla'_\beta\, w_\lambda + w_\nu\, L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu}\,; \\ B^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}}\,\nabla_{\mathrm{B}}\, w_\lambda &= B^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}}\nabla'_{\mathrm{B}}\, w_\lambda + w_\nu\, L_{\mathrm{M}\cdot\lambda}^{\cdot\nu}\,; \end{aligned}\right\} \text{konj.,} \tag{80}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu} &= B^{\beta\nu}_{\mu\alpha}\,\nabla_\beta\,B^{\alpha}_{\lambda}\,; \\ L_{\mathrm{M}\cdot\lambda}^{\cdot\nu} &= B^{\mathrm{B}\nu}_{\mathrm{M}\alpha}\,\nabla_{\mathrm{B}}\,B^{\alpha}_{\lambda}\,; \end{aligned}\right\} \text{konj.} \tag{81}$$

ist. Die Größe $L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu}$ verschwindet wieder wegen (70):

$$L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu} = 0; \qquad B^{\beta}_{\mu}\,\nabla_\beta\, w_\lambda = B^{\beta}_{\mu}\,\nabla'_\beta\, w_\lambda\,; \quad \text{konj.} \tag{82}$$

Man überzeugt sich leicht, daß

(83) $$L_{\dot{M}\cdot\lambda}^{\;\;\cdot\nu} = H_{\dot{M}\cdot\lambda}^{\;\;\cdot\nu} = H_{\dot{M}\dot{\Lambda}}^{\;\;\;\mathrm{N}}\, g_{\mathrm{N}\lambda}\, g^{\Lambda\nu}; \text{ konj.}$$

ist, so daß sich hier, wie in der Riemannschen Geometrie, der zweite Krümmungsaffinor auf den ersten zurückführen läßt. Deuten wir dies alles in der X_{2n}, die durch die Übertragung (44) zu einer L_{2n} geworden ist[17]), so sind B_λ^ν und B_Λ^{N} Komponenten des Einheitsaffinors $B_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}$ der X_{2m}, B_Λ^ν und B_λ^{N} sind Null, die Gleichungen (71) sind die Komponenten der Gleichung

(84) $$\delta' v^{\mathfrak{c}} = B_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}\,\delta v^{\mathfrak{a}} = B_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}\, d v^{\mathfrak{a}} + B_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}\, \Gamma_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}\, v^{\mathfrak{a}}\, d x^{\mathfrak{b}},$$

und die X_{2m} wird durch die induzierte Übertragung zu einer L_{2m}. $H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ und $H_{\dot{M}\dot{\Lambda}}^{\;\;\;\mathrm{N}}$ sind die Komponenten des ersten Krümmungsaffinors

(85) $$H_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}^{\cdot\cdot\mathfrak{c}} = B_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}^{\mathfrak{e}\mathfrak{b}}\, \nabla_{\mathfrak{e}}\, B_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$$

der L_{2m} in L_{2n}. Die anderen $6n^3$ Bestimmungszahlen dieser Größe verschwinden. Im Zusammenhang mit (79) ist noch zu beachten, daß zwar $H_{\dot{M}\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = L_{\dot{M}\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = 0$ und $H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = L_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} \neq 0$, aber $H_{\dot{M}\lambda}^{\cdot\cdot\nu} \neq L_{\dot{M}\cdot\lambda}^{\;\;\cdot\nu}$, und infolgedessen auch

(86) $$H_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}^{\cdot\cdot\mathfrak{c}} \neq B_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{e}}\, \nabla_{\mathfrak{e}}\, B_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}$$

ist. Für die Bestimmungszahlen $H_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$ gilt

(87) $$H_{ba}^{\cdot\cdot\nu} = \partial_b B_a^\nu - \Gamma_{ab}^{\prime c} B_c^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu B_{ab}^{\lambda\mu}; \text{ konj.},$$

und die Gaußsche Gleichung nimmt die folgende Gestalt an:

(88) $$B_{\Omega\mu\lambda\mathrm{N}}^{\Delta\beta\alpha\Gamma}\, R_{\Delta\beta\alpha\Gamma} = R'_{\Omega\mu\lambda\mathrm{N}} + H_{\mu\lambda\Lambda}\, H_{\Omega\mathrm{N}\beta}\, g^{\Lambda\beta}; \text{ konj.}$$

Es sei hervorgehoben, daß $H_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$ im allgemeinen nicht symmetrisch in a und b ist, da

(89) $$H_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu} = B_{ba}^{\beta\alpha}\, S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}\, C_\gamma^\nu; \qquad C_\lambda^\nu = A_\lambda^\nu - B_\lambda^\nu; \text{ konj.}$$

ist.

§ 7.

Die U_1 in der U_m.

Bei Anwendung der erhaltenen Formeln auf den Fall $m = 1$ ergibt sich, wenn wir einfachheitshalber y und $\bar{y}$ statt $\overset{1}{y}$ bzw. $\overset{\bar{1}}{y}$ schreiben und das unitäre ds^2 nach (41) einführen:

---

[17]) Unter L_n verstehen wir eine X_n mit einer allgemeinen linearen Übertragung.

$$
(90)\qquad
\begin{aligned}
\alpha)\quad & B_1^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{dy}; \text{ konj.},\\
\beta)\quad & g'_{1\bar{1}} = g_{\lambda \mathrm{M}} \frac{dx^{\lambda}}{dy} \frac{dx^{\mathrm{M}}}{d\bar{y}} = \frac{ds^2}{dy\,d\bar{y}} = \left|\frac{dy}{ds}\right|^{-2}; \quad g'^{1\bar{1}} = \left|\frac{dy}{ds}\right|^2,\\
\gamma)\quad & B_{\lambda}^{1} = g_{\lambda \mathrm{N}} \frac{dx^{\mathrm{N}}}{d\bar{y}} \left|\frac{dy}{ds}\right|^2 = g_{\lambda \mathrm{N}} \frac{dx^{\mathrm{N}}}{ds} \frac{dy}{ds}; \text{ konj.},\\
\delta)\quad & \Gamma'^{1}_{11} = -2 \frac{\partial}{\partial y} \log \left|\frac{dy}{ds}\right|; \text{ konj.},\\
\varepsilon)\quad & H_{1\,1}^{\ \ \nu} = \frac{d^2 x^{\nu}}{dy^2} + 2 \frac{dx^{\nu}}{dy} \frac{\partial}{\partial y} \log \left|\frac{dy}{ds}\right| + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \frac{dx^{\lambda}}{dy} \frac{dx^{\mu}}{dy}; \text{ konj.}
\end{aligned}
$$

Hierbei ist zu beachten, daß zwar ds einen Sinn hat, aber s für sich nicht, da wegen der Nichtanalytizität von $\frac{dy}{ds}$ das Integral $\int ds$ vom Integrationsweg abhängt (die X_1 ist ja topologisch zweidimensional!). Zweitens ist hervorzuheben, daß zwar $\frac{dy}{ds}$ in jedem Punkt für jede Wahl von dy vollkommen festliegt, daß aber $\frac{dy}{ds}$ keine von der Wahl von dy unabhängige Ortsfunktion auf der U_1 ist, wie das bei einer reellen Kurve in V_n der Fall ist. (Dasselbe gilt von den $\frac{dx^{\nu}}{ds}$ und den $\frac{dx^{\mathrm{N}}}{ds}$, während dagegen die $\frac{dx^{\nu}}{dy}$ und die $\frac{dx^{\mathrm{N}}}{d\bar{y}}$ wieder reine Ortsfunktionen sind.) Da sich aber $\frac{dy}{ds}$ bei Änderung von dy nur um einen unimodularen Faktor ändern kann, ist $\left|\frac{dy}{ds}\right|$ eine halbanalytische Ortsfunktion auf der U_1, und dasselbe gilt also auch von den $\frac{dx^{\nu}}{dy}\left|\frac{dy}{ds}\right|$ und den $\frac{dx^{\mathrm{N}}}{d\bar{y}}\left|\frac{dy}{ds}\right|$.

In der Riemannschen Geometrie ist $i^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{ds}$ der tangierende Einheitsvektor einer Kurve. Da die Bestimmungszahlen dieses Vektors hier aber im Gegensatz zur Riemannschen Geometrie keine Ortsfunktionen sind, führen wir den Einheitsvektor

$$
(91)\qquad i^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{dy}\left|\frac{dy}{ds}\right|; \qquad i^{\mathrm{N}} = \frac{dx^{\mathrm{N}}}{d\bar{y}}\left|\frac{dy}{ds}\right|
$$

ein, dessen Bestimmungszahlen halbanalytische Ortsfunktionen auf der U_1 sind. Allerdings ist dieser Vektor *nicht unabhängig von der Wahl des Parameters* y, er bekommt aber beim Übergang von y zu $'y$ nur den unimodularen Faktor $\frac{dy}{d'y}\left|\frac{d'y}{dy}\right|$, den wir mit $e^{i\varphi}$ bezeichnen wollen[18]). Bei

[18]) Streng genommen ist das auch in der Riemannschen Geometrie der Fall: bei Änderung des Parameters kann i^{ν} das Vorzeichen wechseln.

Einführung des Vektors i^ν folgt aus (90):

(92)
$$B_1^\nu = \left|\frac{dy}{ds}\right|^{-1} i^\nu; \quad B_\lambda^1 = \left|\frac{dy}{ds}\right| i_\lambda; \quad B_\lambda^\nu = i_\lambda i^\nu; \text{ konj.},$$
$$H_{1\,1}^{\;\cdot\,\nu} = \left|\frac{dy}{ds}\right|^{-2} \{i^\mu \nabla_\mu i^\nu + i^{\mathrm{M}} \nabla_{\mathrm{M}} i^\nu\} + \left|\frac{dy}{ds}\right|^{-1} i^\nu \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right) \log \left|\frac{dy}{ds}\right|; \text{ konj.}$$

Man findet also für den Vektor

(93)
$$u^\nu = i^\lambda i^\mu H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu} = \left|\frac{dy}{ds}\right|^2 H_{1\,1}^{\;\cdot\,\nu}; \text{ konj.},$$

der dem in der Riemannschen Geometrie auftretenden Krümmungsvektor nachgebildet ist,

(94)
$$u^\nu = (i^\mu \nabla_\mu i^\nu + i^{\mathrm{M}} \nabla_{\mathrm{M}} i^\nu) + i^\nu \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right) \left|\frac{dy}{ds}\right|.$$

Wegen der leicht zu verifizierenden Identität

(95)
$$i^{\mathrm{M}} \nabla_{\mathrm{M}} i^\nu = i^\nu \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left|\frac{dy}{ds}\right|; \text{ konj.}$$

kann man u^ν auch in der Gestalt

(96)
$$u^\nu = i^\mu \nabla_\mu i^\nu + i^\nu \frac{\partial}{\partial y} \left|\frac{dy}{ds}\right|; \text{ konj.}$$

schreiben, die sich auch direkt aus (77) und (92) ergibt. Aus (94) und (96) geht hervor, daß u^ν die zur U_1 unitärorthogonale Komponente des Vektors $i^b \nabla_b i^\nu$ oder auch des Vektors $i^\mu \nabla_\mu i^\nu$ ist. Im Gegensatz zur Riemannschen Geometrie hat $i^\mu \nabla_\mu i^\nu$ aber auch eine Komponente *in* der U_1. Es sei hervorgehoben, daß u^ν nicht genau mit dem Krümmungsvektor der Riemannschen Geometrie korrespondiert, weil er bei Änderung des Parameters y nicht invariant ist, sondern den Faktor $e^{2i\varphi}$ bekommt[19]).

i^ν und u^ν sind also von der Wahl des Parameters abhängig. Dagegen sind die beiden einfachen Bivektoren I^{bc} bzw. U^{bc} der X_{2n}, die sich aus i^ν bzw. u^ν in der im § 3 unter C angegebenen Weise bilden lassen, unabhängig von dieser Wahl. I^{bc} ist der Einheitsbivektor der U_1, U^{bc} könnte man den ***Bivektor der ersten Krümmung*** nennen. Die aus i^ν bzw. u^ν in der im § 3 unter B angegebenen Weise hervorgehenden Vektoren $\overset{1}{i}{}^c$, $\overset{2}{i}{}^c$ bzw. $\overset{1}{u}{}^c$, $\overset{2}{u}{}^c$ drehen sich bei Änderung des Parameters in der Ebene von I^{bc} bzw. U^{bc} über die Winkel φ, $-\varphi$ bzw. 2φ, -2φ.

Aus (90 e) folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\,\nu}$ mit dem Index ν unitärorthogonal zur U_1 ist, als n. und h. Bedingung für

---

[19]) Weil in der Riemannschen Geometrie $\varphi \equiv 0 \pmod{\pi}$ ist, ist dort $e^{2i\varphi} = 1$, so daß u^ν dort von der Wahl des Parameters unabhängig ist.

eine geodätische U_1, daß eine Gleichung besteht von der Form

$$\frac{d^2 x^\nu}{dy^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{dy} \frac{dx^\mu}{dy} = \alpha \frac{dx^\nu}{dy}; \text{ konj.} \tag{97}$$

Die Form dieser Gleichung ist unabhängig von der Wahl des Parameters und dieselbe wie in der Riemannschen Geometrie. Zwischen α und y besteht wegen (90 ε) die Beziehung

$$\alpha = -2 \frac{\partial}{\partial y} \log \left| \frac{dy}{ds} \right|. \tag{98}$$

Man kann nun die Frage stellen, ob es möglich ist, wie in der Riemannschen Geometrie, statt y einen *natürlichen* Parameter τ einzuführen, d. i. ein Parameter, für welchen das zugehörige α verschwindet, und der selbstverständlich eine analytische Funktion von y sein muß[19a]). Aus (97) und (98) folgt

$$\frac{d^2 \tau}{dy^2} + \frac{d\tau}{dy} \frac{\partial}{\partial y} \log \left| \frac{dy}{ds} \right|^2 = 0; \text{ konj.} \tag{99}$$

mit dem ersten Integral

$$\frac{d\tau}{dy} + \varphi(\bar{y}) \left| \frac{dy}{ds} \right|^{-2}; \text{ konj.} \tag{100}$$

Da τ analytisch in y sein soll, gibt es dann und nur dann eine Lösung, wenn $\varphi(\bar{y}) \left| \frac{dy}{ds} \right|^{-2}$ analytisch in y ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \log \left| \frac{dy}{ds} \right|^2$ analytisch in $\bar{y}$ ist, also wenn $\left| \frac{dy}{ds} \right|^2$ das Produkt einer analytischen Funktion von y mit einer analytischen Funktion von $\bar{y}$ ist, und es ist dann

$$\frac{d}{d\bar{y}} \log \varphi(\bar{y}) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \log \left| \frac{dy}{ds} \right|^2; \text{ konj.} \tag{101}$$

Ist die Existenz von $\varphi(\bar{y})$ gesichert, so existiert also auch der natürliche Parameter τ. Setzt man in diesem Falle

$$z = \int \bar{\varphi}(y)\, dy; \qquad \bar{z} = \int \varphi(\bar{y})\, d\bar{y}, \tag{102}$$

so ist

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} \left| \frac{dy}{ds} \right|^{-2}; \qquad \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{y}} = \frac{dz}{dy} \left| \frac{dy}{ds} \right|^{-2}, \tag{103}$$

woraus folgt

$$\frac{d\tau}{dy} \frac{dz}{dy} = \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{y}} \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} = c^2, \tag{104}$$

wo c^2 eine *reelle* Konstante ist, weil das linke Glied nicht von $\bar{y}$ und das

[19a]) Zusatz bei der letzten Korrektur 25. 3. 1930: Die hier folgende Rechnung kann erheblich gekürzt werden.

rechte nicht von y abhängen kann und die Glieder überdies konjugiert komplex sind. Aus (100) folgt

$$\frac{d\tau}{dy} = c^2 \frac{d\bar{y}}{d\bar{\tau}} \left| \frac{dy}{ds} \right|^{-2}; \text{ konj.} \tag{105}$$

oder

$$d\tau\, d\bar{\tau} = c^2\, ds^2. \tag{106}$$

Ersetzt man τ durch $c\tau$, so kann man erreichen, daß (das neue) c gleich 1 und somit

$$\left| \frac{d\tau}{ds} \right| = 1 \tag{107}$$

wird. Aus (107) folgt, daß, sofern natürliche Parameter überhaupt vorhanden sind, ein solcher stets *normiert*, d. h. der Gleichung (107) genügend, angenommen werden kann, und daß je zwei natürliche Parameter, wie in der Riemannschen Geometrie, durch eine Gleichung der Form

$$'\tau = a\tau + b; \text{ konj.} \tag{108}$$

verknüpft sind, wo a und b konstant sind und $|a| = 1$ wird, wenn es sich um zwei normierte Parameter handelt. Der zu einem normierten Parameter gehörige Einheitsvektor bekommt die einfache Form

$$'i^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau} \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \frac{dx^\nu}{d\tau}; \text{ konj.} \tag{109}$$

Dieser Vektor ist also *analytisch* und bis auf einen auf der U_1 *konstanten* unimodularen Faktor bestimmt, und dasselbe gilt für den zugehörigen Krümmungsvektor, der ebenfalls, wie aus (94) hervorgeht, eine sehr einfache Gestalt bekommt:

$$'u^\nu = i^\mu \nabla_\mu i^\nu + i^{\mathrm{M}} \nabla_{\mathrm{M}} i^\nu = \frac{\delta i^\nu}{d\tau}; \text{ konj.} \tag{110}$$

Weil dann aber $g'_{\lambda \mathrm{M}}$ aus einem analytischen 1-Bein hergestellt werden kann, ist die Übertragung in der U_1 nach dem im § 5 bewiesenen Satz *analytisch* und *integrabel*, die U_1 also (unitär-) *euklidisch*.

Ist umgekehrt die in der U_1 induzierte Übertragung analytisch und folglich auch integrabel, so gibt es nach dem oben erwähnten Satz einen solchen analytischen Einheitsvektor j_λ, daß

$$g'_{\lambda \mathrm{M}} = j_\lambda\, j_{\mathrm{M}} \tag{111}$$

und folglich auch

$$g'_{1\bar{1}} = j_1(y)\, j_{\bar{1}}(\bar{y}) \tag{112}$$

ist. Setzt man somit

$$\tau(y) = \int j_1(y)\, dy; \text{ konj.,} \tag{113}$$

so ist

$$g'_{1\bar{1}} = \left|\frac{dy}{ds}\right|^{-2} = \frac{d\tau}{dy}\frac{d\bar{\tau}}{d\bar{y}}, \tag{114}$$

und demzufolge

$$ds^2 = d\tau\, d\bar{\tau}, \tag{115}$$

so daß τ in der Tat ein normierter natürlicher Parameter ist. Es besteht also folgender Satz:

Auf einer U_1 in U_m gibt es dann und nur dann einen natürlichen Parameter, wenn die U_1 euklidisch ist.

Da in der Riemannschen Geometrie die auf einer Kurve induzierte Übertragung immer integrabel, die Geometrie auf der Kurve selbst somit stets euklidisch ist, ist die Analogie zwischen der V_1 in V_m und der *euklidischen* U_1 in U_m eine vollkommene.

Betrachten wir jetzt den Fall einer topologisch eindimensionalen Kurve in der U_n. Ist s die mittels (60) auf der Kurve definierte unitäre Bogenlänge, so ist $i^\nu = dx^\nu/ds$ der unitäre Einheitsvektor in der Tangente und

$$u^\nu = \frac{\delta i^\nu}{ds} = i^\mu \nabla_\mu i^\nu + i^{\mathrm{M}} \nabla_{\mathrm{M}} i^\nu = \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}; \text{ konj.} \tag{116}$$

der zu i^ν unitärorthogonale Krümmungsvektor der Kurve. Zu diesem Falle gelangt man auch von der allgemeinen U_1 aus, indem man nur die Punkte derselben betrachtet, wo y reell ist. In (94) verschwindet dann nämlich das Korrektionsglied und es wird $d\tau = ds$.

Ist auf einer U_m in U_n entweder eine Kurve oder eine euklidische U_1 gegeben, so gibt es zwei Krümmungsvektoren, der *absolute*, u^ν, in bezug auf U_n und der *relative*, u'^ν, in bezug auf U_m:

$$u'^\nu = i^\mu \nabla'_\mu i^\nu + i^{\mathrm{M}} \nabla'_{\mathrm{M}} i^\nu, \tag{117}$$

und aus (76) folgt die auch in der Riemannschen Geometrie gültige Gleichung

$$u^\nu = u'^\nu + i^\mu i^\lambda H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}, \tag{118}$$

woraus wir die Sätze ablesen:

Der absolute Krümmungsvektor einer Kurve bzw. einer euklidischen U_1 in U_m ist dann und nur dann unitärorthogonal zur U_m, wenn die Kurve bzw. die U_1 geodätisch in U_m ist.

Der absolute Krümmungsvektor einer Kurve bzw. einer euklidischen U_1 in U_m liegt dann und nur dann in der U_m, wenn $i^\lambda i^\mu H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ überall verschwindet.

Verschwindet u^{ν} für alle (topologisch eindimensionale) Kurven einer U_m, so ist die U_m geodätisch. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $H_{(\mu\lambda)}^{\cdot\cdot\,\nu}$ verschwindet. $H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\,\nu}$ selbst braucht aber nicht zu verschwinden, da $H_{[\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\,\nu}$, wie (89) lehrt, von $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu}$ abhängt.

§ 8.

Die X_n der reellen Punkte der U_n in X_{2n}.

Allgemeiner kann man in der X_{2n} eine durch $2n$ Parametergleichungen mit m *reellen* Parametern gegebene X_m untersuchen und die Krümmungstheorie dieser topologisch m-dimensionalen Mannigfaltigkeit entwickeln. Wir wollen hier nur den Fall der X_n betrachten, die den in den Koordinaten $\overset{\nu}{x}$ reellen Punkten der U_n entspricht, und in der X_{2n} festgelegt ist durch die $2n$ Gleichungen

$$\overset{\nu}{x} \stackrel{*}{=} \overset{\mathrm{N}}{x} \stackrel{*}{=} \overset{\nu_r}{x} \quad ^{20)} \tag{119}$$

mit den n reellen Parametern $\overset{\nu_r}{x}$. Natürlich legen wir von jetzt an *reelle* Transformationen der $\overset{\nu}{x}$ zugrunde, da sonst die X_n nicht invariant wäre.

Beim Übergang von den Koordinaten $\overset{\nu}{x}$, $\overset{\mathrm{N}}{x}$ zu $\overset{\nu_r}{x}$, $\overset{\nu_i}{x}$ transformieren sich die Bestimmungszahlen der Größen der X_{2n} mit Hilfe der folgenden Bestimmungszahlen von A:

$$A^{\nu}_{\lambda_r} \stackrel{*}{=} -i\,A^{\nu}_{\lambda_i} \stackrel{*}{=} 2\,A^{\nu_r}_{\lambda} \stackrel{*}{=} 2\,A^{\nu_i}_{\lambda} \stackrel{*}{=} A^{\mathrm{N}}_{\lambda_r} \stackrel{*}{=} +i\,A^{\mathrm{N}}_{\lambda_i} \stackrel{*}{=} 2\,A^{\nu_r}_{\Lambda} \stackrel{*}{=} -2\,A^{\nu_i}_{\Lambda} \stackrel{*}{=} \delta^{\nu}_{\lambda}. \tag{120}$$

Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} g_{\lambda_r\mu_r} &\stackrel{*}{=} g_{\lambda_i\mu_i} \stackrel{*}{=} g_{\Lambda\mu} + g_{\lambda\mathrm{M}}, \\ g_{\lambda_r\mu_i} &\stackrel{*}{=} g_{\mu_r\lambda_i} \stackrel{*}{=} i\,(g_{\Lambda\mu} - g_{\lambda\mathrm{M}}), \end{aligned} \tag{121}$$

und es gilt also der Satz:

Die Parameterlinien von $\overset{\nu_i}{x}$ sind dann und nur dann senkrecht zur X_n, die das Reelle der U_n abbildet, wenn der Fundamentaltensor $g_{\lambda\mathrm{M}}$ im Reellen der U_n reell ist.

Wir spannen jetzt die X_n der reellen Punkte der U_n ein mit Hilfe der Parameterlinien von $\overset{\nu_i}{x}$. Dann ergibt sich

$$B^{\nu}_{\lambda} \stackrel{*}{=} B^{\mathrm{N}}_{\lambda} \stackrel{*}{=} B^{\nu}_{\Lambda} \stackrel{*}{=} B^{\mathrm{N}}_{\Lambda} \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}\,\delta^{\nu}_{\lambda} \tag{122}$$

---

[20]) Die $\stackrel{*}{=}$ in (119) bis (125) geben an, wie es in Fußnote [10]) festgesetzt wurde, daß diese Formeln nicht invariant sind bei beliebigen analytischen Transformationen der $\overset{\nu}{x}$. Alle diese Gleichungen sind aber invariant bei *reellen* Transformationen der $\overset{\nu}{x}$.

und

$$
\begin{aligned}
& H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} \overset{*}{=} H_{\dot{\mathrm{M}}\lambda}^{\cdot\cdot\nu} \overset{*}{=} H_{\mu\dot{\Lambda}}^{\cdot\cdot\nu} \overset{*}{=} H_{\dot{\mathrm{M}}\dot{\Lambda}}^{\cdot\cdot\nu} \overset{*}{=} \\
& \overset{*}{=} -H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\mathrm{N}} \overset{*}{=} -H_{\dot{\mathrm{M}}\lambda}^{\cdot\cdot\mathrm{N}} \overset{*}{=} -H_{\mu\dot{\Lambda}}^{\cdot\cdot\mathrm{N}} \overset{*}{=} -H_{\dot{\mathrm{M}}\dot{\Lambda}}^{\cdot\cdot\mathrm{N}} \overset{*}{=} \frac{1}{8}(\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \Gamma_{\Lambda\mathrm{M}}^{\mathrm{N}}).
\end{aligned} \tag{123}
$$

Ist nun $g_{\lambda\mathrm{M}}$ im Reellen der U_n reell, so ist

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} &= g^{\Lambda\nu}\,\partial_\mu g_{\lambda\Lambda} \overset{*}{=} g^{\Lambda\nu} A_\mu^{\beta_r}\,\partial_{\beta_r} g_{\lambda\Lambda} + g^{\Lambda\nu} A_\mu^{\beta_i}\,\partial_{\beta_i} g_{\lambda\Lambda}, \\
\Gamma_{\Lambda\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} &= g^{\alpha\mathrm{N}}\,\partial_{\mathrm{M}} g_{\Lambda\alpha} \overset{*}{=} g^{\alpha\mathrm{N}} A_{\mathrm{M}}^{\beta_r}\,\partial_{\beta_r} g_{\Lambda\alpha} + g^{\alpha\mathrm{N}} A_{\mathrm{M}}^{\beta_i}\,\partial_{\beta_i} g_{\Lambda\alpha}.
\end{aligned} \tag{124}
$$

Da aber das erste Glied rechts im Reellen reell ist, folgt bei Subtraktion unter Berücksichtigung von (120) im Reellen:

$$
\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \Gamma_{\Lambda\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \overset{*}{=} \tfrac{1}{2} g^{\Lambda\nu}\,\partial_{\mu_i} g_{\lambda\Lambda} + \frac{1}{2} g^{\alpha\mathrm{N}}\,\partial_{\mu_i} g_{\Lambda\alpha}. \tag{125}
$$

Nun verschwindet nach Voraussetzung $\partial_{\beta_r}(g_{\lambda\mathrm{M}} - g_{\Lambda\mu})$. Sind also die $g_{\lambda\mathrm{M}}$ nicht nur im Reellen reell, sondern außerdem analytische Funktionen der $\overset{\nu}{x}$, so verschwindet infolge der Gleichungen von Cauchy-Riemann auch $\partial_{\beta_i}(g_{\lambda\mathrm{M}} + g_{\Lambda\mu})$ und damit die rechte Seite von (125). Es gilt also der Satz:

Ist der Hermitesche Fundamentaltensor $g_{\lambda\mathrm{M}}$ im Reellen reell und sind außerdem seine Bestimmungszahlen analytische Funktionen der $\overset{\nu}{x}$, so ist die X_n, die das Reelle der U_n in der X_{2n} abbildet, in dieser X_{2n} geodätisch in bezug auf die Übertragung mit den Parametern $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = g^{\nu\Lambda}\,\partial_\mu g_{\lambda\Lambda}$.

Die Analytizität der $g_{\lambda\mathrm{M}}$ bringt, wie wir sahen, mit sich, daß die zugehörige Übertragung integrabel ist. Da aber das Reelle der U_n sich in einer geodätischen X_n abbildet, wird in dieser X_n ebenfalls eine integrable Übertragung induziert. Der zu dieser integrablen Übertragung gehörige Hermitesche Fundamentaltensor ist reell und somit gleichbedeutend mit einem gewöhnlichen Fundamentaltensor, sofern nur *reelle* Koordinatentransformationen zugelassen werden. Wir sind also zu einer Mannigfaltigkeit mit einer reellen metrischen Übertragung gelangt, d. h. eine (nicht notwendig symmetrische) Übertragung mit reellen Parametern, die einen gewöhnlichen reellen Fundamentaltensor konstant läßt. Ist umgekehrt eine Riemannsche Geometrie mit Fernübertragung gegeben mit der Eigenschaft, daß die n Einheitsvektoren $\overset{i}{u}_\lambda$ eines durch die Fernübertragung zustande kommenden und somit bei dieser Übertragung konstanten n-Beinfeldes analytisch sind, so ist auch der nach (8) aus den $\overset{i}{u}_\lambda$ und den $\overset{i}{u}_\Lambda$ gebildete Hermitesche Tensor $g_{\lambda\mathrm{M}}$ konstant und unabhängig von der Wahl der Einheitsvektoren und infolge des im § 2 bewiesenen Satzes gilt die Gleichung (15).

Zusammenfassend können wir also den Satz aufstellen:

Ist in einer X_n ein Hermitescher Fundamentaltensor gegeben, der den Gleichungen (15) *genügt und dessen Bestimmungszahlen im Reellen reell sind, so ist hierdurch im Reellen eine Riemannsche Geometrie mit Fernübertragung eindeutig festgelegt, und die n Einheitsvektoren eines durch die Fernübertragung zustande kommenden n-Beinfeldes sind analytisch. Ist umgekehrt eine solche Riemannsche Geometrie mit Fernübertragung gegeben, daß die n Einheitsvektoren eines durch die Fernübertragung zustande kommenden und somit bei dieser Übertragung konstanten n-Beinfeldes analytisch sind, so ist hierdurch ein Hermitescher Fundamentaltensor, der den Gleichungen* (15) *genügt, eindeutig festgelegt.*

(Eingegangen am 12. 9. 1929.)

Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen.

Von

Hellmuth Kneser in Greifswald.

Bedeckungszahl einer stetigen Abbildung einer zusammenhängenden geschlossenen Fläche F auf eine andere G heiße die kleinste Zahl n derart, daß auf ein Teilgebiet von G genau n Teilgebiete von F, und zwar jedes eineindeutig, abgebildet sind, sonst aber kein Punkt von F. Sind F und G orientierbar, so hat man im Betrage des Abbildungsgrades eine untere Schranke für die Bedeckungszahl, die nur von der Abbildungsklasse[1]) abhängt, also eine untere Schranke für die kleinste bei irgendeiner Abbildung der Klasse vorkommende Bedeckungszahl. In meiner Arbeit „Glättung von Flächenabbildungen"[2]) konnte ich feststellen, daß bei orientierbaren Flächen[3]) diese Schranke die wahre ist: in jeder Klasse gibt es eine Abbildung, die auf ein Teilgebiet von G genau so viele Teilgebiete von F — und zwar jedes einzelne topologisch — abbildet, wie der Betrag des Abbildungsgrades angibt, sonst aber keinen Punkt.

Ganz ähnlich liegt die Sache, wenn man auf die Orientierbarkeit verzichtet. Verfeinerte Begriffsbildung führte Herrn H. Hopf — wie er mir brieflich mitteilte — dazu, auch hier jeder Abbildungsklasse eine Zahl, den *Absolutgrad*, zuzuordnen, die eine untere Schranke für die Bedeckungszahl darstellt. Herr Hopf konnte auch beweisen, daß bei Mannigfaltigkeiten einer von Zwei verschiedenen Dimension in jeder Klasse eine Abbildung vorhanden ist, deren Bedeckungszahl gleich dem Absolutgrad der Klasse ist. Die vorliegende Arbeit zeigt, daß der eben ausgesprochene Satz auch für die Dimension Zwei, auch bei Flächen gilt. Mit Methoden, die nichts

---

[1]) Zwei Abbildungen gehören zu derselben Klasse, wenn sie verbunden werden durch eine von einer Veränderlichen stetig abhängende Schar stetiger Abbildungen.

[2]) Math. Annalen **100** (1928), S. 609—617; im folgenden immer mit „Gl." zitiert.

[3]) Auch der Fall, daß G nicht orientierbar ist, hätte nur eine geringe Abänderung des Ergebnisses und Beweises mit sich gebracht.

sind als eine Weiterbildung der in Gl. angewandten, gelingt es, eine gegebene Abbildung stetig abzuändern und schließlich in eine Gestalt zu bringen, an der der Absolutgrad leicht abgelesen und seine Übereinstimmung mit der Bedeckungszahl festgestellt werden kann, eine Gestalt, die vielleicht auch sonst von Nutzen sein kann.

Nebenbei ergibt sich eine Ungleichung zwischen der kleinsten Bedeckungszahl und den Eulerschen Charakteristiken der beiden Flächen, die als eine Erweiterung einer bekannten Formel von Hurwitz aus der Theorie der algebraischen Gebilde angesehen werden kann.

§ 1.

Vorbereitung.

Die vorbereitende Behandlung einer gegebenen Flächenabbildung in Gl. §§ 1 bis 3 führte zu dem folgenden Ergebnis[4]):

Gegeben ist eine stetige Abbildung einer zusammenhängenden geschlossenen Fläche F auf eine andere G. Auf den Flächen F und G wird eine euklidische oder nichteuklidische Maßbestimmung eingeführt und die Flächen in (im Sinne dieser Maßbestimmung geradlinige) Dreiecke zerlegt. Ist das Dreiecksnetz fein genug, so gibt es in der Klasse der gegebenen Abbildung eine andere, die jede Ecke des Dreiecksnetzes von F auf eine Ecke von G abbildet, jede Seite entweder (*Vollseite*) auf eine Seite oder (*Eckenseite*) auf eine Ecke von G, jedes Dreieck entweder (*Volldreieck*) auf ein Dreieck oder (*Seitendreieck*) auf eine Seite oder (*Eckendreieck*) auf eine Ecke von G. Die Abbildungen der Dreiecke sind ausgeartete oder nicht ausgeartete Kollineationen; die Mitte jeder Vollseite ist auf die Mitte der Bildseite abgebildet. Eine solche Abbildung heißt normal; sie ist durch die Bilder der Ecken von F vollkommen bestimmt.

Wie in Gl., so wird auch hier die Abbildung schrittweise abgeändert. Ist A_1 die Abbildung vor, A_2 die nach der Änderung, so werden immer A_1 und A_2 so wenig voneinander verschieden sein, daß die Bildpunkte eines Punktes p von F bei A_1 und A_2 durch eine eindeutig und stetig von p abhängende gerade Strecke in G verbunden sind. Läßt man jeden Bildpunkt mit fester Geschwindigkeit seine Strecke durchlaufen, so wird damit A_1 durch eine stetige Schar stetiger Abbildungen mit A_2 verbunden: beide Abbildungen gehören zur selben Klasse.

In Gl. § 3 wurden ferner die *Ketten* eingeführt. Eine auf eine bestimmte Seite s von G abgebildete Kette ist eine einzige Vollseite oder

---

[4]) In Gl. waren zwar die Flächen F und G als orientierbar vorausgesetzt; beim Beweis der hier aufgeführten Sätze wurde aber davon kein Gebrauch gemacht. Im Falle der projektiven Ebene sollen die Durchmesser der Dreiecke kleiner als $\pi:6$ sein.

eine in sich zurücklaufende oder mit Anfang und Ende versehene Folge von Seitendreiecken, von denen jedes mit dem folgenden eine Vollseite gemeinsam hat. Es zeigte sich (Gl. § 3), daß in jeder Klasse eine Abbildung ohne „Ketten zweiter Art“ („Falten“) vorhanden ist, bei der also jede Kette entweder von erster Art ist, d. h. mit den beiden äußersten Vollseiten an zwei Volldreiecke grenzt, die verschiedene Bilder haben (und zwar sind dies natürlich die beiden an die Bildseite s anstoßenden Dreiecke von G), oder von der dritten Art ist, d. h. in sich zurückläuft.

Bündel hieß in Gl. ein größter zusammenhängender Teil der Urbildmenge einer Ecke von G. Dort wurde (S. 615, letzter Absatz) die Abbildung in der Umgebung eines Bündels in bestimmter Weise abgeändert. Dies geschehe nun der Reihe nach bei allen Bündeln. (Neue Bündel entstehen dabei nicht.) Dadurch wird zweierlei bewirkt. Erstens ist nunmehr jedes Bündel eine im allgemeinen berandete Fläche; denn wie Fig. 5 aus Gl. lehrt, hängt an jeder nicht inneren Ecke eines Bündels genau eine Folge von (zwei, drei oder vier) Bündeldreiecken, die der Reihe nach mit Seiten aneinandergrenzen. Zweitens bilden die Eckenseiten einer Kette zwei, je auf einen Endpunkt der Bildseite abgebildete, Züge (mit Anfang und Ende bei der ersten Art, geschlossen bei der dritten), mit denen sie an je ein Bündel angrenzt.

§ 2.

Beseitigung der Ketten dritter Art.

Es sei b ein Bündel, p sein Bildpunkt. Das Bündel b grenzt mit einer seiner Randkurven entweder an eine Kette dritter Art oder an eine in sich zurückkehrende Folge von Ketten erster Art. Jede von ihnen grenzt mit ihren beiden äußersten Vollseiten an je ein Volldreieck und dieses wieder mit seiner anderen von b ausgehenden Seite an die im Sinne des Umlaufs um die Randkurve von b nächste Kette erster Art. So entsteht an der Randkurve ein *Kranz* aus einander abwechselnden Volldreiecken und Ketten erster Art. Zwei aufeinander folgende Volldreiecke sind abgebildet auf zwei bei p gelegene, im Sinne der Umkreisung von p aufeinander folgende Dreiecke. Wird der Punkt p von dieser Dreiecksfolge k-mal umkreist, so heißt der Kranz ein *k-facher*.

Sind keine Volldreiecke vorhanden, so hat die Abbildung die denkbar kleinste Überdeckungszahl Null.

Sind Volldreiecke und Ketten dritter Art vorhanden, so soll jetzt die Zahl der letzteren um Eins vermindert werden. In diesem Falle gibt es, da F zusammenhängend ist, mindestens ein Bündel — es heiße b —, an das ein Kranz l und eine Kette dritter Art k angrenzt. Die Kette k führe von b nach dem Bündel b' mit dem Bildpunkt p'. Im Kranz l

gibt es mindestens eine Kette erster Art k_1, deren Bild die Seite $p\,p'$ ist. Durch Übergang zu einer feineren Dreiecksteilung von F — Fig. 1 zeigt sie im ungünstigsten Falle — und Abänderung der Abbildung — die neuen Ecken v und u' werden auf p bzw. p' abgebildet — bewirkt man zunächst, daß in k_1 an den beiden Langseiten $t\,t'$ und $w\,w'$ zwei aus je zwei Dreiecken bestehende Streifen $t\,t'\,u'\,u$ und $w\,w'\,v'\,v$ ohne gemeinsamen Punkt liegen. Dann trenne man durch einen, bis auf die Endpunkte ganz im Inneren von b verlaufenden, Seitenzug s von t nach w einen die Mündung der Kette k, aber die keiner anderen Kette dritter Art enthaltenden und längs $t\,u\,v\,w$ an k_1 grenzenden Teil von b ab[5]). Ferner sorge man, wenn nötig, durch weitere Dreiecksteilung innerhalb des Bündels b dafür, daß die an s anstoßenden Dreiecke von c einen Streifen bilden, der gegen den Rest von c durch einen einfachen Seitenzug abgegrenzt wird. Schließlich ändere man die Abbildung dahin ab, daß alle Ecken von c außer den zu s gehörigen auf p' abgebildet werden, statt wie bisher auf p.

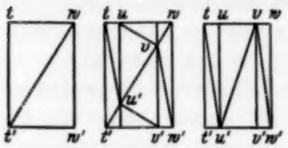


Fig. 1.

Die so gewonnene neue Abbildung gehört zur selben Klasse w wie die alte und unterscheidet sich von ihr im folgenden. Vom Bündel b ist der Teil c abgetrennt; der Rest ist immer noch eine berandete Fläche. Zum Bündel b' ist k, ein Teil von k_1 und ein Teil von c hinzugekommen, wodurch es möglicherweise mit einem anderen auf p' abgebildeten Bündel verschmilzt; jedenfalls ist das neue Bündel wieder eine berandete Fläche. An die Stelle von k_1 tritt eine neue Kette erster Art, bestehend aus den Resten von c und k. Die Kette dritter Art k ist als solche verschwunden. Es ist also wirklich eine Abbildung erreicht mit denselben allgemeinen Eigenschaften, aber mit einer Kette dritter Art weniger. Wiederholt man das Verfahren, so ergibt sich schließlich eine Abbildung derselben Klasse ohne jede Kette dritter Art.

§ 3.

Wesentliche und unwesentliche Bündel.

Ein Bündel heiße *unwesentlich*, wenn es eine Elementarfläche ist und sein (da diese nur eine Randkurve hat, einziger) Kranz einfach ist. Jedes andere Bündel heiße *wesentlich*.

---

[5]) Daß dies möglich ist, zeigt sich folgendermaßen: Man verbindet etwa v mit einer Ecke q an der Mündung von k durch einen einfachen Seitenzug z im Inneren von b und führe s dicht bei dem folgenden Seitenzug: von t nach v; z; Umlauf um k; z; von v nach w.

Es soll gezeigt werden, daß in jeder Klasse, deren kleinste Bedeckungszahl nicht Null ist, eine Abbildung mit allen bisher erreichten Eigenschaften, aber mit höchstens einem wesentlichen Bündel vorhanden ist.

Sind mehrere wesentliche Bündel vorhanden, so suche man einen Seitenzug auf F, der zwei von ihnen, b_1 und b_2, verbindet und möglichst wenig Vollseiten enthält[6]). Dieser berührt kein anderes wesentliches Bündel und überhaupt kein Bündel zweimal; sonst ließe er sich durch einen anderen mit weniger Vollseiten ersetzen (vgl. Gl. S. 614). Nun sei b' das auf diesem Zuge auf b folgende Bündel; p_1 und p' seien die Bildpunkte von b_1 und b'; sie sind die Endpunkte einer Seite von G. Eine Vollseite verbindet b_1 und b'; sie gehört einer Kette erster Art k_1 an, die auf die Seite $p_1 p'$ abgebildet ist. Von p_1 mögen l Seiten ausgehen; sie seien umlaufend von 1 bis l numeriert. Die erste sei $p_1 p'$; die Nummer wird im folgenden als oberer Zeiger angehängt. In einem m-fachen Kranz von b_1 folgen dann $l m$ Ketten erster Art k_μ^λ ($\lambda \bmod l$; $\mu \bmod m$) aufeinander in der Reihenfolge $k_1^1, \ldots, k_1^l; k_2^1, \ldots, k_2^l; \ldots; k_m^1, \ldots, k_m^l$. Die Kette k_μ^λ ist auf die λ-te von p_1 ausgehende Seite abgebildet. Jede Kette k_μ^1 wird ebenso vorbereitet wie die Kette k_1 in § 2. Dann stößt sie mit einem Streckenzug $t_\mu u_\mu v_\mu w_\mu$ an b_1. Die vier Punkte sollen im Sinne des Umlaufs um den Kranz in der angegebenen Reihenfolge liegen; zwischen u_μ und v_μ können noch weitere Ecken liegen. An der anderen, auf p' abgebildeten Schmalseite von k_μ^1 liegen entsprechend die Ecken t'_μ, u'_μ, v'_μ und w'_μ, und an beiden Langseiten $t_\mu t'_\mu$ und $w_\mu w'_\mu$ von k_μ^1 liegen die beiden, aus je zwei Dreiecken bestehenden Streifen $t_\mu t'_\mu u'_\mu u_\mu$ und $w_\mu w'_\mu v'_\mu v_\mu$. Jetzt trenne man durch m einfache Seitenzüge s_μ von w_μ nach $t_{\mu+1}$ ($\mu = 1, \ldots, m$) m Elementarflächen E_μ von b_1 ab, sorge, wenn nötig, durch verfeinerte Teilung dafür, daß die an

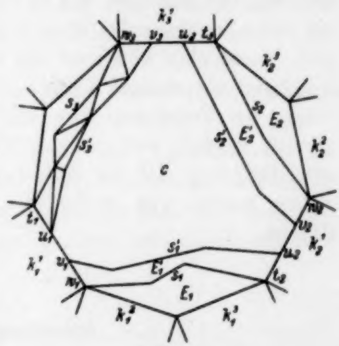


Fig. 2.

die Züge s_μ anstoßenden Dreiecke m einander nicht berührende Streifen E'_μ (vgl. Fig. 2) bilden, d. h. Elementarflächen, begrenzt von s_μ, den Seiten $v_\mu w_\mu$ und $t_{\mu+1} u_{\mu+1}$, und einem Seitenzug s'_μ, derart, daß jedes Dreieck von E'_μ eine Seite auf s_μ und die gegenüberliegende Ecke auf s'_μ hat oder umgekehrt.

[6]) Das läßt sich mit endlich vielen Schritten ausführen, obwohl hier aus einer unendlichen Gesamtheit nach einer Kleinstforderung auszuwählen ist; man kann nämlich an Hand der vorliegenden Gestalt aller Bündel leicht von vornherein die gesamte Seitenzahl des Zuges nach oben beschränken.

Hat man diese Vorbereitungen bei jedem Kranze des Bündels b_1 getroffen, so bleibt von b_1 nach Abtrennung aller Elementarflächen E und E' ein Rest c übrig, der übrigens wieder eine berandete Fläche und mit b_1 homöomorph ist. Jetzt kann man die Abbildung dahin abändern, daß nunmehr alle Ecken von c auf p' abgebildet werden statt wie bisher auf p_1. Die so entstehende neue Abbildung ist wieder normal und hat dieselben allgemeinen Eigenschaften wie die alte, unterscheidet sich aber von dieser in den folgenden Punkten. An die Stelle der Ketten k_μ^1 treten m neue Ketten erster Art, k_μ^*. Die Kette k_μ^* besteht aus je einem, an $v_\mu w_\mu$ bzw. $t_{\mu+1} u_{\mu+1}$ anstoßenden Teil von k_μ^1 und $k_{\mu+1}^1$ und aus E'_μ. Auf p_1 abgebildet ist nicht mehr die ganze Fläche b_1, sondern nur noch die m Elementarflächen E_μ. Von E_μ gehen die Ketten $k_\mu^*, k_\mu^2, \ldots, k_\mu^l$ aus; das von E_μ gebildete neue Bündel hat also einen einfachen Kranz, ist also unwesentlich. Der Rest c und die mittleren Teile von $k_1^1, \ldots, k_m^1$ sind auf p' abgebildet und daher mit all den Bündeln, mit denen b_1 durch $k_1^1, \ldots, k_m^1$ verbunden ist, mindestens also mit b', zu einem einzigen Bündel b_1' verschmolzen. Sonst hat sich nichts geändert. Wäre nun das Bündel b_1' unwesentlich (tatsächlich ist es immer wesentlich), so wäre die Zahl der wesentlichen Bündel um mindestens Eins verringert. Dasselbe gilt, wenn b' ein wesentliches Bündel war, d. h. wenn es mit b_2 zusammenfiel und daher der anfangs aufgesuchte Seitenzug von b_1 nach b_2 nur eine Vollseite enthielt. Sonst aber wird jetzt das wesentliche Bündel b_1' mit b_2 durch einen Seitenzug mit weniger Vollseiten als anfangs verbunden. Durch Wiederholung des Verfahrens kann also die Zahl der wesentlichen Bündel vermindert werden, solange sie größer als Eins ist. *In jeder Klasse gibt es eine Abbildung mit der Bedeckungszahl Null oder eine Abbildung ohne Ketten zweiter und dritter Art und mit höchstens einem wesentlichen Bündel.*

§ 4.

Orientierung am Bündel.

Ist das nunmehr einzig vorhandene wesentliche Bündel b orientierbar, so werde eine Orientierung in ihm festgesetzt und auf die an b anstoßenden Dreiecke Δ_F von F übertragen. Ebenso werde auch in den an den Bildpunkt p anstoßenden Dreiecken Δ_G von G eine Orientierung festgesetzt. Ein Volldreieck Δ_F, dessen Orientierung durch die Abbildung in die des Bilddreiecks übergeht, heiße positiv; geht sie in die entgegengesetzte über, so heiße es negativ. Kehrt man eine der beiden Orientierungen um, so wird jedes positive Dreieck negativ, jedes negative positiv. Sind alle an b anstoßenden Volldreiecke positiv oder alle negativ, so heißt

das Bündel b *einsinnig*, sonst doppelsinnig. Ein- und Doppelsinnigkeit eines Bündels sind unabhängig von der Auswahl der Orientierungen. Zwei Volldreiecke Δ_F, die nur durch eine an b anstoßende Kette erster Art getrennt werden, sind beide positiv oder beide negativ (vgl. Gl. Fig. 2); dasselbe gilt demnach für irgend zwei Volldreiecke desselben Kranzes. Insbesondere ist ein orientierbares Bündel mit nur einem Kranz immer einsinnig.

Hat eine Abbildung ohne Ketten zweiter Art ein orientierbares doppelsinniges Bündel, so wähle man aus einem Kranze positiver und einem Kranze negativer Volldreiecke je eines, dessen Bild beide Male dasselbe Dreieck von G ist. Auf diese beiden Dreiecke ist die Reduktion von Gl. S. 615 bis 616 anwendbar; sie führt zu einer Abbildung mit kleinerer Bedeckungszahl, und der ganze Reduktionsprozeß von Gl. §§ 2 bis 3 und §§ 1 bis 3 der gegenwärtigen Arbeit beginnt von neuem.

Ist ein nicht orientierbares Bündel b mit einem mehrfachen Kranz oder mit mehreren Kränzen vorhanden, so gilt dasselbe. Dann gibt es nämlich zwei an b anstoßende, auf dasselbe Dreieck von G abgebildete Volldreiecke. Verbindet man sie durch zwei Dreiecksketten über b, die zusammen einen die Orientierung umkehrenden Weg auf b ergeben, so ist eine von ihnen von der Art, wie es in Gl. S. 616 benötigt wird, und wieder erhält man eine Abbildung derselben Klasse mit kleinerer Bedeckungszahl.

Da die Verkleinerung der Bedeckungszahl nur endlich viele Male stattfinden kann, findet das Verfahren sein Ende, und es folgt:

In jeder Abbildungsklasse gibt es entweder eine Abbildung mit der Bedeckungszahl Null oder eine Abbildung ohne Kette zweiter und dritter Art und mit höchstens einem wesentlichen Bündel, das entweder orientierbar und einsinnig ist oder nicht orientierbar ist und nur einen, und zwar einen einfachen Kranz hat.

§ 5.

Weitere Glättung.

Es ist für das Folgende nützlich und lohnt sich wohl auch sonst, die bisher gewonnene Abbildung noch weiter abzuändern, so daß sie in weitem Umfange im Kleinen eineindeutig wird. Bezeichnet man nämlich einen Punkt von F als *regulär*, wenn eine Umgebung eineindeutig abgebildet wird, und sonst als *singulär*, so sind bei der jetzt erreichten Gestalt der Abbildung nur die inneren Punkte der Volldreiecke regulär. In allen Punkten, die nicht zu dem einzigen etwa noch vorhandenen wesentlichen Bündel gehören, läßt sich aber leicht Regularität herstellen. Zu diesem Zwecke

beschreibt man um jede Ecke p von G ein kleines konvexes Vieleck, das in jedem an p anstoßenden Dreieck genau eine Ecke hat. Dann liegt in jedem Dreieck von G bei jeder Ecke eine neue Ecke; das von ihnen gebildete Dreieck heiße das verkleinerte Dreieck. An jeder Seite von G liegt an jedem Ende beiderseits je ein Punkt; diese vier Punkte bilden ein konvexes Viereck mit zwei langen und zwei kurzen Seiten.

Nun bilde man jedes Volldreieck von F eineindeutig statt auf ein ganzes Dreieck von G auf das zugehörige verkleinerte Dreieck sinngemäß ab, jede Kette erster Art das zu seiner Bildseite gehörige Viereck und jedes unwesentliche Bündel auf das um seine Bildecke beschriebene Vieleck, achte aber darauf, daß die Abbildung des Randes, soweit sie durch die vorhergegangenen Schritte schon festgesetzt ist, beibehalten wird. Von dem wesentlichen Bündel schließlich trenne man längs der Randkurve jedes k-fachen Kranzes einen Ringstreifen ab und bilde ihn eineindeutig ab auf eine im Bildpunkt p des Bündels k-fach verzweigte Windungsfläche über dem konvexen Vielflach um p, wieder mit Beibehaltung der Randabbildung und so, daß die innere Randkurve auf p abgebildet wird. Am Rest des Bündels wird nichts geändert. Damit hat man eine Abbildung von einer der vier folgenden Arten:

1. Bedeckungszahl Null; und zwar sind die inneren Punkte der Dreiecke von G überhaupt unbedeckt.

2. Die Fläche F ist eineindeutig auf eine unverzweigte Überlagerungsfläche von G abgebildet.

3. Die Fläche F ist durch eine Anzahl einfacher Kurven zerlegt in einen orientierbaren Teil b und eine Anzahl Restflächen. Der Teil b ist abgebildet auf einen Punkt p von G; ersetzt man ihn durch so viel Punkte, wie er Randkurven hat, so erfährt die entstehende (nicht notwendig zusammenhängende) Fläche eine Abbildung auf G, deren Umkehrung höchstens in den neu eingeführten Punkten nach Art einer Riemannschen Fläche verzweigt ist. Überträgt man eine Orientierung von b auf eine Umgebung von b, so werden alle Teile der Umgebung mit derselben Orientierung in eine Umgebung von p abgebildet.

4. Die Fläche F wird durch eine einfache Kurve zerlegt in einen nicht orientierbaren Teil b und einen Rest. Der Teil b wird auf einen Punkt p von G abgebildet, der Rest auf eine unverzweigte Überlagerungsfläche von G eineindeutig mit der einzigen Ausnahme, daß die ganze Trennungslinie auf einen Überlagerungspunkt von p abgebildet wird[7]).

[7]) Der Gedanke liegt nahe, von hier aus zu einer Übersicht über alle möglichen Abbildungsklassen einer gegebenen Fläche a auf eine andere zu gelangen; doch bietet dabei der Fall 3 gewisse Schwierigkeiten. Ich gehe darauf nicht ein.

§ 6.

Die kleinste Bedeckungszahl.

Der Fall 1 des letzten Ergebnisses ist für das Folgende trivial und bleibe außer Betracht. In den übrigen Fällen bildet die soeben hergestellte Abbildung auf jeden Punkt von G mit höchstens einer Ausnahme dieselbe Anzahl n von Punkten von F ab. Auf Grund gewisser Begriffsbildungen und Sätze von H. Hopf zeigt sich, daß diese Zahl, die Bedeckungszahl der besonderen Abbildung, zugleich die kleinste Bedeckungszahl ist, die überhaupt bei allen Abbildungen derselben Klasse vorkommt.

Einem Briefe von Herrn Hopf entnehme ich mit seiner freundlichen Erlaubnis die folgenden Stellen. Sie fassen Ergebnisse seiner Arbeit „Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten II“ (Math. Annalen **102**, S. 562—623) kurz zusammen.

F und G seien geschlossene Mannigfaltigkeiten derselben Dimension; F ist durch eine Abbildung f auf G abgebildet.

Definition I. Zwei auf einen Punkt y von G abgebildete Punkte x_1, x_2 heißen zu einer *Schicht* gehörig, wenn es einen Weg w von x nach x gibt, dessen Bild $f(w)$ (geschlossener Weg in G) auf einen Punkt zusammenziehbar ist.

Zu jedem Punkt von G gibt es nur endlich viele Schichten.

Definition II. f heißt *nicht orientierbar*, wenn es in F einen geschlossenen Weg gibt, bei dessen Durchlaufung sich die Orientierung umkehrt und dessen Bild zusammenziehbar ist; andernfalls heißt f *orientierbar*.

Ist f orientierbar, sind x_1, x_2 wieder zwei Punkte einer Schicht, und ist w ein Weg von x_1 nach x_2 mit zusammenziehbarem Bild $f(w)$, so ist bei Zugrundelegung einer Orientierung der Umgebung von x die durch Fortsetzung längs w in der Umgebung von x_2 eingeführte Orientierung unabhängig von dem speziellen w. Diese Tatsache gestattet die folgende

Definition III. Bei einer orientierbaren Abbildung f verstehen wir unter einer Orientierung der Umgebung einer Schicht Y_i solche Orientierungen von Umgebungen der Punkte von Y_i, die auseinander durch Fortsetzung längs Wegen mit zusammenziehbaren Bildern hervorgehen.

Die Umgebung einer Schicht Y_i besteht aus einer Anzahl offener Mannigfaltigkeiten; für jede von ihnen gibt es, falls sie orientiert ist, einen Grad im Punkte y (etwa im Sinne meiner Annalenarbeit im Band 100), und falls sie nicht orientierbar ist, eine Parität. Ist f orientierbar, so lassen sich die Orientierungen der Umgebungen der verschiedenen Komponenten einer Schicht nach Definition III miteinander verbinden, und die Summe der Grade der Umgebungen der Komponenten von Y_i ist bis auf das Vorzeichen bestimmt; wir nennen die Summe kurz den Grad „der“ Umgebung von Y_i; ist f nicht orientierbar, so nennen wir die Parität der analog gebildeten Paritätensumme kurz die Parität der Umgebung von Y_i. Dann setzen wir noch fest:

Definition IV. Unter dem *Beitrag* der Schicht Y_i verstehen wir, falls f orientierbar ist, den absoluten Betrag des Grades der Umgebung von Y_i, und falls f

nicht orientierbar ist, die Zahl 0 oder 1, je nachdem die Parität der Umgebung von Y_i gerade oder ungerade ist.

Definition V. Die Summe der Beiträge der zu dem Punkt y von G gehörigen Schichten heißt der *Absolutgrad von f in y*; wir bezeichnen ihn mit a_y.

Es gelten folgende Sätze:

1. a_y ist von y unabhängig und darf daher mit a bezeichnet werden.

2. a ist eine Konstante der durch f bestimmten Abbildungsklasse.

3. Sind F und G nicht zweidimensional, so ist a die Mindestzahl von eineindeutigen Bedeckungen eines Gebietes, die durch eine Abbildung der durch f bestimmten Abbildungsklasse erreicht wird.

Daß die hier erwähnte Mindestzahl nicht kleiner als a sein kann, hat Herr Hopf als selbstverständlich nicht erwähnt[8]). Der von ihm aufgestellte Satz 3 präzisiert also eine aus der Definition von a unmittelbar folgende Ungleichheit zur Gleichheit. Der von ihm ausdrücklich ausgenommene, seiner Methode sich nicht fügende Fall der Dimensionszahl Zwei ist auf Grund des Ergebnisses von § 5 leicht zu bewältigen.

Im Falle 1 ist die Bedeckungszahl Null, also auch $a = 0$.

Im Falle 2 führt jeder Weg in F, dessen Bild in G zusammenziehbar ist, zum Ausgangspunkt zurück; jede Schicht besteht also aus einem Punkt. Wegen der Eineindeutigkeit im Kleinen liefert jede Schicht bei der Berechnung den Beitrag Eins; es ist $a = n$. Dasselbe gilt im Falle 4.

Der Fall 3 muß etwas ausführlicher erörtert werden. Ist p der Bildpunkt des Bündels b und sind q_1 und q_2 zwei Punkte von F mit demselben, von p verschiedenen Bilde q, so heiße ein Weg w von q_1 nach q_2 ein Umkehrweg, wenn eine Orientierung o_1 einer Umgebung von q_1 und die aus ihr durch Fortsetzung längs w entstehende Orientierung o_2 einer Umgebung von q_2 vermöge der, in der Umgebung von q_1 bzw. q_2 eineindeutigen Abbildung in entgegengesetzte Orientierungen der Umgebung von q übergehen. Diese Definition kann auch auf Punktpaare mit dem gemeinsamen Bilde p erstreckt werden, sofern keiner der Punkte im Innern von b liegt, da bei einem Randpunkt von b eine genügend enge Umgebung zum Teil auf p, zum Teil eineindeutig auf eine Teilumgebung von p abgebildet wird. Es wird sich gleich zeigen, daß ein Weg w mit zusammenziehbarem Bilde niemals ein Umkehrweg ist. Das bedeutet aber, daß q_1 und q_2, wenn sie zur selben Schicht gehören, beide als Komponenten dieser Schicht zu ihrem „Beitrag" Summanden desselben Vorzeichens liefern, und zwar 1, da in ihrer Umgebung die Abbildung eineindeutig ist. Also ist

---

[8]) Ist nämlich ein Gebiet γ in G genau m-fach bedeckt, sind auf γ genau m Teilgebiete von F eineindeutig abgebildet und sonst keine Punkte, so liefert bei der Berechnung von a jedes dieser Gebiete einen Summanden ± 1; ihre Anzahl m ist mindestens a.

der Beitrag jeder Schicht gleich der Komponentenzahl und der Absolutgrad a gleich der Bedeckungszahl n.

Zum Beweise der soeben aufgestellten Behauptung werde der Weg w stetig so verschoben, daß er am Anfang und am Ende je einen Teil $q_1 p_1$ bzw. $p_k q_2$ hat, die beide auf denselben Weg pq abgebildet sind, und daß der Restweg $v = p_1 p_2 \cdots p_k$ in Teile $p_\nu p_{\nu+1}$ zerfällt, deren Endpunkte auf p abgebildet sind und die entweder ganz auf p abgebildet sind oder bis auf höchstens ihre Endpunkte außerhalb von b verlaufen. Ein Teilweg der ersten Art ist wegen der Einsinnigkeit von b niemals ein Umkehrweg; einer der zweiten Art ist es dann und nur dann, wenn sein Bild in G die Orientierung umkehrt. Der Weg w ist dann und nur dann ein Umkehrweg, wenn v es ist; sein Bild ist dann und nur dann zusammenziehbar, wenn das von v es ist. Ist dies der Fall, kehrt also das Bild von v die Orientierung in G nicht um, so ist unter den Teilwegen $p_\nu p_{\nu+1}$ eine gerade Anzahl, deren Bilder die Orientierung in G umkehren, d. h. eine gerade Anzahl von Umkehrwegen. Also ist v und damit auch w kein Umkehrweg, wie es behauptet wurde.

Die Abbildung ist orientierbar in den Fällen 2 und 3, im Falle 1 braucht sie es nicht zu sein, im Falle 4 ist sie es niemals.

§ 7.

Eine Ungleichung zwischen den Charakteristiken.

Ist die kleinste Bedeckungszahl n einer Abbildungsklasse positiv, so besteht zwischen ihr und den Eulerschen Charakteristiken K_F und K_G von F und G eine Ungleichung, die an der in § 4 erreichten Abbildung leicht festzustellen ist*).

Die Fläche G habe α_0 Ecken, α_1 Seiten und α_2 Dreiecke. Ihre Charakteristik ist also

$$K_G = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2.$$

Das wesentliche Bündel b habe r Kränze mit den Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_r$; dann gilt von seiner Charakteristik

$$K_b \leqq 2 - r \leqq 1.$$

Auf jedes an den Bildpunkt p von b anstoßende Dreieck sind $s = m_1 + \ldots + m_r$ Volldreiecke aus den Kränzen von b abgebildet. Die übrigen $n - s$ Urbilder

*) Will man nur auf diese Ungleichung hinaus, so braucht man d.. Reduktion nicht so weit durchzuführen. Man braucht sich nur davon zu überzeugen, daß die kleinste Bedeckungszahl der Klasse von einer normalen Abbildung verwirklicht wird und bei dieser die Ketten zweiter Art zu beseitigen (Gl. § 3); dann führt eine etwas umständlichere Abzählung zum Ziel.

gehören den Kränzen unwesentlicher, auf p abgebildeter Bündel an. Also sind außer b noch $n-s$ unwesentliche Bündel auf p abgebildet und die Gesamtzahl der unwesentlichen Bündel ist

$$n - s + n(\alpha_0 - 1) = n\alpha_0 - s.$$

Der Beitrag der Ecken, Eckenseiten und Eckendreiecke zur Charakteristik von F ist also

$$K_b + n\alpha_0 - s.$$

Die Vollseiten und Seitendreiecke von F sind in den $n\alpha_1$ Ketten erster Art angeordnet. Jede enthält eine Seite mehr als die Anzahl ihrer Dreiecke beträgt. Also liefern sie zu K_F den Beitrag $(-n\alpha_1)$. Die $n\alpha_2$ Volldreiecke schließlich liefern den Beitrag $n\alpha_2$. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} K_F &= K_b + n\alpha_0 - s - n\alpha_1 + n\alpha_2 \\ &\leqq 2 - r - s + nK_G, \end{aligned}$$

$$(*) \qquad K_F \leqq nK_G.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $r = s = 1$ ist, d. h. wenn b nur einen, und zwar einen einfachen Kranz hat und wenn überdies $K_b = 1$ ist, d. h. wenn b eine Elementarfläche ist. Das bedeutet aber, daß auch das Bündel b unwesentlich ist und daher nach § 5 eine Abbildung mit im Kleinen eineindeutiger, d. h. unverzweigter Umkehrung zur Klasse gehört. Ist insbesondere $K_F = K_G < 0$, so ist $n = 0$ oder $n = 1$; zur Klasse gehört also eine eineindeutige Abbildung oder eine solche, die ein Gebiet in G unbedeckt läßt.

Auf Riemannsche Flächen angewandt, ergibt die Ungleichung (*), da $K_F = 2 - 2p_F$, $K_G = 2 - 2p_G$ zu setzen ist,

$$p_F - 1 \leqq n(p_G - 1),$$

die Aussage der Hurwitzschen Formel

$$2p_F - 2 = n(2p_G - 2) - 2w,$$

wenn die Verzweigungszahl w unbekannt ist.

Bemerkenswert an der Ungleichung (*) ist, daß sie im Falle $K_G < 0$ von vornherein eine Schranke angibt, unter die die Bedeckungszahl jeder Abbildung durch Deformation herabgedrückt werden kann.

(Eingegangen am 9. 10. 1929.)

Über maximale nilpotente Unterringe und Nilringe.

Von

Gottfried Köthe in Bonn.

In seiner Arbeit „Über die Einheitengruppe eines endlichen Ringes“[1]) leitet Herr Shoda u. a. folgende zwei Sätze ab:

Der Durchschnitt aller maximalen nilpotenten Unterringe eines Ringes ist das maximale nilpotente Ideal des Ringes, wenn man die Existenz des Einheitselementes und das Bestehen des Doppelkettensatzes für Rechtsideale voraussetzt.

Alle maximalen nilpotenten Unterringe eines endlichen Ringes mit Einheitselement sind miteinander konjugiert.

Die Resultate meiner Arbeit „Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist“[2]), legen es nahe, allgemeiner Unterringe eines Ringes zu betrachten, die nur aus nilpotenten Elementen bestehen. Es taucht die Frage nach dem vollen Überblick über die sämtlichen solchen Unterringe auf. Dieses Problem werden wir nicht vollständig lösen, aber doch für die nilpotenten Unterringe eines Ringes mit Einheitselement, der den Doppelkettensatz erfüllt. Inbesondere gilt dort allgemein der oben nur für endliche Ringe angeführte zweite Satz.

1.

In K. werden statt nilpotenter Ideale allgemeiner Nilideale betrachtet, d. h. Ideale, die nur aus nilpotenten Elementen bestehen, ohne selbst nilpotent sein zu müssen. Analog betrachten wir jetzt Nilringe, d. h. Ringe, die nur aus nilpotenten Elementen bestehen.

---

[1]) Math. Annalen 102, S. 273, zitiert als S. — Entsprechend der dortigen Terminologie soll auch im folgenden unter Ideal ohne weiteren Zusatz ein zweiseitiges verstanden werden.

[2]) Zitiert als K. Erscheint demnächst in der Math. Zeitschrift.

Man überlegt sich ohne Mühe, indem man in den Beweisen von Herrn Shoda statt der Nilpotenz der Ideale die ihrer Elemente verwendet, daß die folgenden Hilfssätze erhalten bleiben:

Es sei $\mathfrak{o}$ ein Ring, $\mathfrak{n}$ ein zweiseitiges Nilideal in $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{m}'$ ein maximaler Nilring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$. Bezeichnen wir die Gesamtheit der in den Restklassen von $\mathfrak{m}'$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{n}^{\frown}\mathfrak{m}'$, so gilt

Hilfssatz 1. $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^{\frown}\mathfrak{m}'$ *bildet einen maximalen Nilring von* $\mathfrak{o}$. *Umgekehrt umfaßt ein maximaler Nilring von* $\mathfrak{o}$ *jedes Nilideal* $\mathfrak{n}$, *ist also von der Form* $\mathfrak{n}^{\frown}\mathfrak{m}'$, *wo* $\mathfrak{m}'$ *einen maximalen Nilring in* $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ *bedeutet.*

Hilfssatz 2. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *die direkte Summe* $\mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 + \dots + \mathfrak{o}_t$ von Idealen $\mathfrak{o}_i$. *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein maximaler Nilring von* $\mathfrak{o}$, *so ist* $\mathfrak{m}$ *direkte Summe von solchen* $\mathfrak{m}_i$ *von* $\mathfrak{o}_i$. *Ist umgekehrt* $\mathfrak{m}_i$ *ein maximaler Nilring von* $\mathfrak{o}_i$, *so ist die direkte Summe* $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_t$ *ein solcher von* $\mathfrak{o}$.

Beim Beweise dieses Hilfssatzes ist die Voraussetzung der Existenz eines Einheitselementes nicht notwendig, es genügt statt der Ringe $\mathfrak{m}E_i$, die Herr Shoda verwendet, die aus den Komponenten der Elemente von $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{o}_i$ gebildeten Ringe $\mathfrak{m}_i$ zu benützen.

Hilfssatz 3. *Ist C ein nilpotentes Element, F eine mit C vertauschbare Einheit aus einem Ring, so ist $F + C$ eine Einheit.*

Hilfssatz 4. *Der Durchschnitt aller maximalen Nilringe eines halbeinfachen Ringes ist Null.*

Der Beweis verläuft genau so wie der von Hilfssatz 5 in S., wenn man noch überlegt, daß die beiden maximalen nilpotenten Unterringe $\sum\limits_{i<j} C_{ij}\mathfrak{K}$ und $\sum\limits_{i>j} C_{ij}\mathfrak{K}$, — $\mathfrak{K}$ ein (nichtkommutativer) Körper und C_{ij} Matrizeneinheiten — eines vollständigen Matrizenringes $\mathfrak{o}$ auch maximale Nilringe in $\mathfrak{o}$ sind.

Satz 1. *Der Durchschnitt aller maximalen Nilringe eines Ringes* $\mathfrak{o}$, *dessen Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, ist das Radikal des Ringes*[3]).

Nach Voraussetzung besitzt $\mathfrak{o}$ ein Radikal $\mathfrak{c}$ (vgl. K. § 3) und $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ ist halbeinfach. $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ ist nach dem Satz von Wedderburn, verallgemeinert von Artin, direkte Summe von vollständigen Matrizenringen in (nichtkommutativen) Körpern. Nach Hilfssatz 2 und 4 ist der Durchschnitt aller maximalen Nilringe von $\mathfrak{o}$ Null, also folgt Satz 1 unmittelbar aus Hilfssatz 1.

Nach K. § 4 gilt Satz 1 also für alle Ringe, die der Bedingung genügen: Jedes reguläre Rechtsideal in $\mathfrak{o}$ umfaßt ein minimal reguläres und jede Kette $E_1\mathfrak{o} \subset E_1\mathfrak{o} + E_2\mathfrak{o} \subset \dots$, $E_i E_k = 0$ für $i < k$, $E_i^2 = E_i$, $E_i\mathfrak{o}$ minimal regulär, bricht nach endlich vielen Gliedern ab.

[3]) Die Voraussetzung der Existenz des Einheitselementes, die Herr Shoda macht, ist unnötig.

2.

Es sei $\mathfrak{o}$ ein vollständiger Matrizenring vom Grad n in einem (nichtkommutativen) Körper $\mathfrak{K}$. Dann gilt

Satz 2. *Alle maximalen nilpotenten Unterringe von $\mathfrak{o}$ sind miteinander konjugiert.*

Hilfssatz 5. *Jede Matrix $A = (a_{ik}) \neq 0$ aus $\mathfrak{o}$, von der eine Potenz verschwindet, läßt sich so transformieren, daß in der zweiten Spalte nur in der ersten Zeile eine Zahl $\neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ steht, in den übrigen Null.*

Wir betrachten einen $\mathfrak{o}$-Links-, $\mathfrak{K}$-Rechtsmodul[4]) $\mathfrak{M} = x_1\mathfrak{K} + \ldots + x_n\mathfrak{K}$ von der Beschaffenheit, daß für eine beliebige Matrix B aus $\mathfrak{o}$

$$(Bx_1, \ldots, Bx_n) = (x_1, \ldots, x_n)B,$$

wobei die rechte Seite als Produkt der Zeile $(x_1, \ldots, x_n)$ mit der Matrix B aufzufassen ist.

Sind $y_1, \ldots, y_n$, n in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear unabhängige Größen aus $\mathfrak{M}$, $(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)Z$, so bilden sie eine $\mathfrak{K}$-Basis von $\mathfrak{M}$, da die Basiszahl n eine Invariante ist (das folgt z. B. aus dem Satz von Jordan-Hölder für Gruppen mit Operatoren[5]), $\mathfrak{M}$ ist ja eine additive Gruppe mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{K}$). Es besteht also auch eine Relation

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)D,$$

die Matrix Z besitzt also die Inverse D.

Es sei nun $(Ax_1, \ldots, Ax_n) = (x_1, \ldots, x_n)A = (y'_1, \ldots, y'_n)$. Wegen $A \neq 0$ wird wenigstens ein y', etwa y'_1, $\neq 0$; es kann $y'_1 \neq x_1 k$, k aus $\mathfrak{K}$, vorausgesetzt werden, denn andernfalls wäre $A^n x_1 = x_1 k^n \neq 0$ für jedes n gegen die Voraussetzung. Wir ergänzen nun die beiden Elemente $z_1 = y'_1$, $z_2 = x_1$ zu einer linear unabhängigen Basis $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (x_1, \ldots, x_n)P$ von $\mathfrak{M}$, was, wie wir eben gesehen haben, möglich ist. Es wird nun $(Az_1, \ldots, Az_n) = (Ax_1, \ldots, Ax_n)P = (x_1, \ldots, x_n)AP = (z_1, \ldots, z_n)P^{-1}AP$.

Da $Az_2 = z_1$ ist, sieht die zweite Spalte von $P^{-1}AP$ so aus: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ q. e. d.

Beweis von Satz 2. Es sei $\mathfrak{m}$ ein maximaler nilpotenter Ring in $\mathfrak{o} = \sum_{i,k=1}^{n} C_{ik}\mathfrak{K}$. Es sei m der Exponent von $\mathfrak{m}$, d. h. $\mathfrak{m}^m = 0$ und für keine kleinere Zahl. Dann gilt für ein Element C aus $\mathfrak{m}^{m-1}$ die Gleichung $\mathfrak{m}C = 0$. Daher müssen, wenn wir C durch Transformation mit einer

[4]) Vgl. E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschrift 30, S. 647 und 669, zitiert als N.

[5]) Vgl. N. S. 649 und S. 654.

Matrix P auf die Form des Hilfssatzes bringen, alle Elemente von $P^{-1}\mathfrak{m}P$ die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

haben.

Die Matrizen A sind nur dann nilpotent, wenn die A' es sind, denn das Produkt zweier Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ wird zu $AB = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Die Matrizen A' aller Elemente A aus $P^{-1}\mathfrak{m}P$ bilden also einen nilpotenten Unterring $\mathfrak{m}'$ des Matrizenringes $\mathfrak{o}'$ vom Grad $n-1$ in $\mathfrak{K}$.

$\mathfrak{m}'$ *ist maximal in* $\mathfrak{o}'$: Es sei $\mathfrak{m}'$ nicht maximal, es gebe also einen nilpotenten Unterring $\mathfrak{m}'' > \mathfrak{m}'$. Dann ist *jede* Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, A' aus $\mathfrak{m}''$, nilpotent; da Summe und Produkt zweier solcher Matrizen wieder eine solche Matrix ist, wäre der Ring aller dieser Matrizen ein echter nilpotenter Oberring von $\mathfrak{m}$, was unmöglich ist.

Für $\mathfrak{m}'$ sei Satz 2 als bewiesen vorausgesetzt, für einreihige Matrizen ist er ja trivial. Es gibt also eine $n-1$-reihige Matrix Q', so daß $Q'^{-1}\mathfrak{m}'Q' = \sum_{i<j} C'_{ij}\mathfrak{K}$ ist, die C'_{ij} die Matrizeneinheiten von $\mathfrak{o}'$. Die Matrix $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ leistet dann die Transformation von $P^{-1}\mathfrak{m}P$ in einen Unterring von $\sum_{i<j} C_{ij}\mathfrak{K}$, also ist wegen der Maximaleigenschaft $Q^{-1}P^{-1}\mathfrak{m}PQ = \sum_{i<j} C_{ij}\mathfrak{K}$, also Satz 2 bewiesen.

Satz 3. *Jeder nilpotente Unterring* $\mathfrak{n}$ *des Matrizenringes* $\sum_{i,k=1}^{n} C_{ik}\mathfrak{K}$ *liegt in einem maximalen nilpotenten.*

Der Beweis verläuft analog dem von Satz 2. Man sieht genau so ein, daß $\mathfrak{n}$ durch eine Matrix P so transformiert werden kann, daß die Ele-

mente von $P^{-1}\mathfrak{n}P$ die Form $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ haben. Für den von den A' in $\mathfrak{o}'$ gebildeten nilpotenten Unterring $\mathfrak{n}'$ setzen wir den Satz als bewiesen voraus, nach Satz 2 kann durch Transformation mit einer Matrix Q' erreicht werden, daß $Q'^{-1}\mathfrak{n}'Q' \subseteq \sum_{i<j} C'_{ij}\mathfrak{K}$, daraus folgt, wenn $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ gesetzt wird, daß $Q^{-1}P^{-1}\mathfrak{n}PQ \subseteq \sum_{i<j} C_{ij}\mathfrak{K}$, woraus sich Satz 3 unmittelbar ergibt.

3.

Die beiden Sätze des vorigen Paragraphen geben einen vollen Überblick über die nilpotenten Unterringe eines vollständigen Matrizenringes in einem beliebigen Körper. Die Frage, wie es mit den Nilringen steht, ist noch offen, ich vermute, daß jeder Nilring in einem Matrizenring nilpotent ist. Daß jeder maximale nilpotente Unterring von $\mathfrak{o}$ auch maximaler Nilring ist, folgt nach Satz 2 daraus, daß $\sum_{i<j} C_{ij}\mathfrak{K}$ es ist.

Wir beweisen Satz 4. *Zwei maximale Nilringe eines Ringes $\mathfrak{o}$ mit Einheitselement, dessen Restklassenring nach dem Radikal $\mathfrak{c}$ vollständig reduzibel ist, sind miteinander konjugiert, wenn ihr Restklassenring in $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ maximal nilpotent ist.*

Es sei $\mathfrak{m}$ der Nilring und $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}/\mathfrak{c}$. Nach Hilfssatz 2 ist Satz 4 für $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ richtig. Es sei $P + \mathfrak{c}$, P ein Element aus $\mathfrak{o}$, die Restklasse, die $\mathfrak{m}^*$ in $\overline{\mathfrak{m}} = \sum_{i<k,\, l} C_{ik}^{(l)}\mathfrak{K}^{(l)}$ überführt (vgl. Hilfssatz 2). Jedes Element aus $P + \mathfrak{c}$ besitzt ein Inverses: Wenn $P' + \mathfrak{c}$ die inverse Restklasse ist, so wird $(P + C)P' = E + C'$. $E + C'$ ist nach Hilfssatz 3 eine Einheit, daher gibt es ein Q, so daß $(P + C)P'Q = E$ ist, $P + C$ besitzt also ein Inverses.

Transformieren wir $\mathfrak{m}$ mit P, so geht $\mathfrak{m}^*$ dabei in $\overline{\mathfrak{m}}$ über. Es ist $P^{-1}\mathfrak{c}P = \mathfrak{c}$, da jedes Element C aus $\mathfrak{c}$ die Form $P \cdot P^{-1}CP \cdot P^{-1}$ hat, also in $P^{-1}\mathfrak{c}\,P$ liegt. $P^{-1}\mathfrak{m}P$ ist daher identisch mit dem Nilring $\mathfrak{c}\frown\overline{\mathfrak{m}}$, der nach Hilfssatz 1 maximal ist, also unser Satz bewiesen.

Für Ringe, die den Doppelkettensatz für Rechtsideale erfüllen, folgt aus Satz 4 und 3

Satz 5. *Alle maximalen nilpotenten Unterringe eines Ringes mit Einheitselement, der den Doppelkettensatz für Rechtsideale erfüllt, sind miteinander konjugiert. Jeder nilpotente Unterring liegt in einem maximalen nilpotenten.*

(Eingegangen am 26. 11. 1929.)

Sur la notion de convergence des séries doubles.

Von

F. Leja in Warschau.

Une série double

$$(1)\qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$$

est dite *convergente* vers la somme s si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un indice p tel qu'on ait

$$|s_{\mu\nu} - s| < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad \mu \text{ et } \nu > p,$$

où

$$(2)\qquad s_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} a_{ij}.$$

Cette notion est due à M. Pringsheim[1]).

On distingue encore d'autres sortes de convergence des séries doubles:

1° *La convergence par diagonales*, qui se réduit à la convergence de la série simple

$$(3)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\mu+\nu=n} a_{\mu\nu}\Big);$$

2° *La convergence par lignes*, c'est-à-dire la convergence de la série réitérée

$$(4)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\Big);$$

3° *La convergence par colonnes*, c'est-à-dire celle de la série réitérée[2])

$$(5)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\Big).$$

---

[1]) Math. Annalen **53** (1900), p. 289.

[2]) Les séries simples $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots$ et $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$, $\mu = 0, 1, \ldots$, sont dites respectivement *lignes* et *colonnes* de la série double (1).

On sait que ces trois dernières convergences n'entraînent nullement la convergence proprement dite de la série (1); par exemple la série (1) où

$$a_{\mu\nu} = \begin{cases} 2, & \text{pour } \mu = \nu \geqq 1, \\ -1, & \text{pour } |\mu - \nu| = 2, \\ 0, & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

converge en même temps par diagonales, par lignes et par colonnes, chaque fois vers la même limite égale à zéro, sans converger au sens de M. Pringsheim.

On peut généraliser les notions de convergence 1°, 2° et 3° comme il suit: Soient α et β deux nombres réels satisfaisant aux relations que voici:

$$\alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Désignons par

$$\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu}$$

la somme de tous les $a_{\mu\nu}$ dont les indices satisfont à l'équation $\alpha\mu + \beta\nu = \lambda$ et considérons la série simple

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu} \Big), \tag{6}$$

où λ parcourt tous les nombres réels de la forme $\alpha\mu + \beta\nu$.

Si la série (6) *converge nous dirons que la série double* (1) *converge dans la direction* (α, β).

On obtient ainsi un ensemble de notions de convergence *ayant la puissance du continu* et contenant comme cas particuliers les notions 1°, 2° et 3°; si $\alpha = \beta$ on obtiendra la convergence par diagonales et si $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (ou $\alpha = 1$, $\beta = 0$) on obtiendra la convergence par lignes (ou par colonnes).

Il est naturel de se demander si la convergence d'une série double dans toutes les directions (α, β) entraîne celle au sens de M. Pringsheim. Or, la réponse est négative. Je vais donner un

Exemple d'une série double divergente qui converge vers la même somme dans toutes les directions (α, β), *où* $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$.

Soit

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$$

une suite croissante de nombres naturels pairs tels que, pour $k \to \infty$, on ait

$$n_k - n_{k-1} \to \infty. \tag{7}$$

Posons $n_0 = 0$ et

$$\frac{n_{k-1} + n_k}{2} = m_k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

et considérons la série double

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} \tag{9}$$

définie comme il suit:

$$(10)\quad \begin{cases} a_{\mu\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}}, & \text{pour } \mu = m_k - 1,\ n_{k-1}+1 \leqq \nu \leqq m_k - 1, \\ & \text{et pour } \mu = m_k + 1,\ m_k + 1 \leqq \nu \leqq n_k - 1, \\ a_{\mu\nu} = -\dfrac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}}, & \text{pour } \mu = m_k + 1,\ n_{k-1}+1 \leqq \nu \leqq m_k - 1, \\ & \text{et pour } \mu = m_k - 1,\ m_k + 1 \leqq \nu \leqq n_k - 1, \\ a_{\mu\nu} = 0, & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Je dis que la série (6), dont les termes ont les valeurs (10), converge vers zéro, quels que soient α et β.

En effet, désignons par l_k et l'_k les segments situés dans le plan des variables x et y et définis comme il suit:

$$(l_k)\quad x = m_k - 1, \quad n_{k-1} + 1 \leqq y \leqq n_k - 1,$$
$$(l'_k)\quad x = m_k + 1, \quad n_{k-1} + 1 \leqq y \leqq n_k - 1.$$

Nous dirons qu'un terme $a_{\mu\nu}$ est situé sur le segment l_k ou l'_k si le point (μ, ν) y est situé. On voit de (10) que les termes $a_{\mu\nu}$, qui ne sont situés sur aucun des segments l_k ou l'_k, $k = 1, 2, \ldots$, s'annulent et que la somme de tous les termes $a_{\mu\nu}$ situés sur un de ces segments est toujours égale à zéro.

Cela posé, considérons la famille des droites parallèles

$$(11)\qquad \alpha x + \beta y = \lambda$$

où α et β sont nonnégatifs et fixes et λ parcourt tous les nombres réels $\geqq 0$. Une droite quelconque de cette famille ne peut couper que deux, au plus, des segments (l_k, l'_k), $k = 1, 2, \ldots$, et, si elle en coupe deux, ces segments ont toujours le même indice k.

Supposons d'abord que les droites (11) soient parallèles à l'axe x ou à l'axe y. Dans ce cas la somme

$$\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu}$$

est égale à zéro quel que soit λ et, par suite, la série (6) converge vers zéro et la série (9) converge par lignes et par colonnes vers zéro.

Supposons maintenant que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ et posons

$$(12)\qquad s_p = \sum_{\lambda=0}^{p} \Big(\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu} \Big).$$

La somme

$$\sigma_k = \sum_{\lambda=\lambda_k}^{\lambda'_k} \Big(\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu} \Big),$$

où l'on a posé

$$\lambda_k = \alpha(m_k - 1) + \beta(n_{k-1} + 1),$$
$$\lambda'_k = \alpha(m_k + 1) + \beta(n_k - 1),$$

contient tous les termes $a_{\mu\nu}$ situés sur les segments l_k et l_k, donc $\sigma_k = 0$, quel que soit $k = 1, 2, \ldots$. Pareillement on a

$$\sum_{\lambda=\varrho}^{\varrho'} \Big(\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu} \Big) = 0,$$

quels que soient ϱ et ϱ' satisfaisant aux inégalités

$$\lambda'_{k-1} < \varrho < \varrho' < \lambda_k,$$

car, pour un λ appartenant à l'intervalle $(\lambda'_{k-1}, \lambda_k)$, la droite (11) ne coupe aucun des segments l_k ou l'_k. Il en résulte que la somme (12) s'annule chaque fois si l'indice p est extérieur aux intervalles (λ_k, λ'_k), $k = 0, 1, \ldots$ et que, si

$$\lambda_k \leqq p < \lambda'_k,$$

on a

$$s_p = s_p^{(k)} = \sum_{\lambda=\lambda_k}^{p} \Big(\sum_{\alpha\mu+\beta\nu=\lambda} a_{\mu\nu} \Big). \tag{13}$$

Cette dernière somme croît d'abord lorsque p croît à partir de λ_k, car la droite $\alpha x + \beta y = p$ ne coupe d'abord que la partie

$$x = m_k - 1, \quad n_{k-1} + 1 \leqq y \leqq m_k - 1 \tag{14}$$

du segment l_k sur laquelle sont situés les termes positifs $a_{\mu\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}}$ de la série (9). Désignons par A le point où la droite $\alpha x + \beta y = p$ coupe le segment (14). Lorsque ce point aura parcouru sur ce segment la longueur $\frac{2\alpha}{\beta}$, qui contient[3])

$$E\Big(\frac{2\alpha}{\beta}\Big)$$

termes de la série (9), la droite $\alpha x + \beta y = p$ rencontre pour la première fois la partie du segment l'_k sur laquelle sont situés les termes négatifs. Il en resulte que la valeur maximum de la somme (13) ne surpasse jamais le nombre

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}} \cdot E\Big(\frac{2\alpha}{\beta}\Big).$$

D'autre part, la somme $s_p^{(k)}$ n'est jamais plus petite que $-M_k$, ce qu'il est facile de vérifier, donc, en vertu de (7), on a

$$s_p \to 0, \quad \text{pour} \quad p \to \infty,$$

et, par suite, la série (9) converge vers zéro dans la direction (α, β), quels que soient $\alpha \geqq 0$ et $\beta \geqq 0$.

---

[3]) $E(x)$ = le plus grand entier qui ne surpasse pas x.

Néanmoins la série (9) est divergente (au sens de M. Pringsheim). En effet, la suite des sommes partielles (2) n'est pas bornée, car on a évidemment, quel que soit $k = 1, 2, \ldots$,

$$s_{n_k, n_k} = 0$$

et

$$s_{m_k, m_k} = s_{n_{k-1}, n_{k-1}} + r_k,$$

où r_k est la somme des termes $a_{\mu\nu}$ situés sur le segment (14), donc, le nombre de ces termes étant égal à

$$m_k - n_{k-1} - 1 = \frac{n_k - n_{k-1} - 2}{2},$$

on a

$$r_k = \frac{n_k - n_{k-1} - 2}{2\sqrt{n_k - n_{k-1}}}$$

et, par suite,

$$s_{m_k, m_k} \to \infty, \quad \text{pour} \quad k \to \infty,$$

c. q. f. d.

(Eingegangen am 18. 12. 1929.)

Preisaufgabe der Königsberger Gelehrten Gesellschaft.

„Im Anschluß an ein von H. Poincaré im Jahre 1907 gestelltes Problem haben sich in den letzten Jahren mehrere Forscher mit der topologischen Natur derjenigen Abbildungen beschäftigt, welche durch n analytische Funktionen von n komplexen Veränderlichen vermittelt werden. Zu dieser Frage sollen neue Beiträge geliefert werden, bei denen die Wechselbeziehung von funktionentheoretischen und geometrischen, insbesondere topologischen Methoden in Erscheinung tritt."

Die Arbeiten sind bis zum 15. Oktober 1931 mit Motto versehen einzureichen. In einem mit gleichem Motto versehenen, verschlossenen Briefumschlage ist der Name des Verfassers beizufügen. Die Verleihung des Preises in Höhe von 1000 RM. erfolgt im Januar 1932 am Gründungstage unserer Gesellschaft.

Mit der Zuerteilung des Preises erwirbt sich die Königsberger Gelehrte Gesellschaft das Recht, die preisgekrönte Arbeit drucken zu lassen.

Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen.

Von

Hans Petersson in Hamburg.

Man kennt in den ϑ-Reihen der Kongruenzgruppen schon seit langem automorphe Formen gebrochener Dimension. Es handelt sich hier um eindeutige Funktionen $\vartheta(\tau)$ einer komplexen Variablen τ, welche durch die Substitution $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ und Multiplikation mit einer Potenz von ω_2 zu homogenen Funktionen $\Theta(\omega_1, \omega_2)$ der beiden komplexen Variablen ω_1 und ω_2 werden. In dieser Gestalt sind die Funktionen $\Theta(\omega_1, \omega_2)$ notwendig mehrdeutig, sobald die Dimension keine ganze Zahl ist, zeigen aber ein sehr einfaches Verhalten bei Anwendung einer gewissen Gruppe linearer homogener Substitutionen in ω_1, ω_2.

Diese Tatsache legt es nun nahe, von vornherein die inhomogene Darstellung zu bevorzugen; freilich erkauft man die Eindeutigkeit der so entstehenden Funktionen dadurch, daß sich die Invarianzeigenschaft gegenüber den Substitutionen der betreffenden Gruppe in einer komplizierteren Form kundgibt, als bei der homogenen Darstellung der Modulformen. Die Invarianzeigenschaft der Funktion $\vartheta(\tau)$ drückt sich nämlich in der Gleichung

$$\vartheta(L\tau) = (\gamma\tau + \delta)_*^r \vartheta(\tau)$$

aus, wo $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine beliebige Substitution der Kleinschen Hauptkongruenzgruppe N-ter Stufe $\Gamma(N)$ für ein gewisses natürliches N ist; r ist eine rationale Zahl mit dem Nenner 1 oder 2 und unter $(\gamma\tau + \delta)_*^r$ ist ein bestimmter Zweig der analytischen Funktion $(\gamma\tau + \delta)^r$ zu verstehen.

Nun haben, von diesem Sachverhalt ausgehend, die Herren Hardy[1])

[1]) G. H. Hardy, On the representation of a number as a sum of any number of squares and in particular of five, Trans. Am. Math. Soc. 21 (1920).

und Mordell[2]) bei ihren Untersuchungen über die Anzahl der Darstellungen natürlicher Zahlen durch eine ungerade Anzahl von Quadraten zum erstenmal Reihen aufgestellt, welche als Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Eisensteinschen Reihen auf den Fall halbzahliger Dimensionen aufzufassen sind. Der Hardy-Mordellsche Ansatz benutzt den Umstand, daß die Umsetzung des Zweiges der Funktion $(\gamma\tau+\delta)^r$ bei Ausübung von Modulsubstitutionen N-ter Stufe aus der Gleichung

$$(\gamma\tau+\delta)^r_* = \frac{\vartheta(L\tau)}{\vartheta(\tau)}$$

abgelesen werden kann. Die Reihen

$$\sum_L \frac{1}{(\gamma\tau+\delta)^r_*} = \sum_L \frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta(L\tau)},$$

in denen über ein volles System von Substitutionen L von $\Gamma(N)$ mit verschiedenen zweiten Zeilen summiert wird, sind für $r>2$ absolut konvergent und besitzen tatsächlich die Invarianzeigenschaft der Modulformen N-ter Stufe.

Es stellt sich hierbei die merkwürdige Tatsache heraus, daß die Fälle gebrochener Dimension in vielen Hinsichten erheblich komplizierter sind als die ganzzahliger Dimension. Besonders gilt dies für die arithmetischen Konsequenzen, und daher ist das Problem der Darstellung natürlicher Zahlen durch $q=2r$ Quadrate im Falle eines ungeraden q wesentlich schwieriger als im Falle eines geraden q. Andererseits ist natürlich der Fall $q=1$ besonders einfach, und die zugehörige Funktion $\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\tau m^2}$ ist auch das einfachste Element in der Theorie der ϑ-Funktionen.

Dieser Sachverhalt hat mich veranlaßt, das Problem der Konstruktion von automorphen Formen nicht-ganzer Dimension unter möglichst allgemeinen Gesichtspunkten anzugreifen. Es sei Γ eine sogenannte Grenzkreisgruppe mit reellen Substitutionskoeffizienten, r eine zunächst beliebige reelle oder komplexe Zahl. Wir betrachten die eindeutigen Funktionen $f(\tau)$ einer komplexen Variablen τ, welche sich bei den Substitutionen $L=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ von Γ nach der Gleichung

$$f(L\tau) = v(L)(\gamma\tau+\delta)^r f(\tau) \qquad (\mathfrak{Im}\,\tau>0)$$

umsetzen; hier ist $v(L)$ nur von L abhängig und der Zweig der Funktion $(\gamma\tau+\delta)^r$ wird für beliebige reelle γ, δ ein für allemal festgelegt,

In § 1 beschäftige ich mich zunächst mit der strengen Fixierung des Begriffs einer automorphen Form im herkömmlichen Sinne, d. h. in homo-

---

[2]) L. J. Mordell, On the representations of a number as a sum of an odd number of squares, Trans. Cambr. Phil. Soc. 22 (1919).

gener Darstellung, und stelle den Zusammenhang dieser Formen mit jenen Funktionen $f(\tau)$ her; über die letzteren werden dabei die traditionellen Regularitätsannahmen gemacht. Dann behandele ich in diesem Paragraphen ausführlich die Beziehungen, die zwischen einer solchen automorphen Form „in inhomogener Darstellung" $f(\tau)$ und dem System der „Multiplikatoren" $v(L)$, $L \subset \Gamma$, bestehen. Es wird gezeigt, daß sämtliche Eigenschaften dieser Multiplikatoren $v(L)$, die sich mit Hilfe der Funktion $f(\tau)$ herausstellen lassen, aus einer von ihnen auf rein algebraischem Wege deduziert werden können; diese eine ist die „Kompositionsrelation", welche man erhält, wenn man auf $f(\tau)$ nacheinander zwei Substitutionen L_1 und L_2 der Gruppe Γ anwendet.

In § 2 werden unter gewissen Voraussetzungen automorphe Formen in Gestalt von Reihen G_{-r} konstruiert, welche ein Mittelding zwischen Eisensteinschen und Poincaréschen Reihen darstellen[3]). Diese Voraussetzungen sind folgende: Über die Gruppe, daß sie mindestens eine parabolische Substitution enthält; über die Dimension $-r$, daß $r > 2$; über das Multiplikatorsystem das Bestehen der Kompositionsrelation und der Gleichung $|v(L)| = 1$ für alle L aus Γ. Was die Voraussetzung über die Gruppe Γ betrifft, so ist zu sagen, daß die dadurch ausgeschlossenen Fälle zwar mit etwas anderen Methoden behandelt werden müssen; doch kommt man dort mit wesentlich geringerer Mühe ans Ziel als in den vorliegenden Fällen.

§ 3 ist der Aufstellung der Multiplikatorsysteme gewidmet. Es wird gezeigt, daß man zu jeder Dimension $-r$ und zu jeder Gruppe Γ, auch wenn sie kein endliches Erzeugendensystem besitzt, Multiplikatorsysteme, d. h. Systeme von Größen $v(L)$ finden kann, die der Kompositionsrelation genügen. Insbesondere gelingt es, die Parameterzahl des Systems aller Lösungen $v(L)$ oder der Lösungen $v(L)$ mit bestimmten Eigenschaften, z. B. der mit $|v(L)| = 1$, anzugeben. Im zweiten Teil dieses Paragraphen zeige ich noch, daß es möglich ist, das Multiplikatorsystem, zu dem die ϑ-Reihen halbzahliger Dimension $\left(\text{also auch } \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau m^2}\right)$ gehören, zu charakterisieren. Allerdings wird die Tatsache, daß die Dimension halbzahlig ist, nicht aufgeklärt.

In den folgenden beiden Paragraphen handelt es sich um den Nachweis, daß man aus den oben erwähnten Reihen G_{-r} jede automorphe Form, die den einschränkenden Voraussetzungen von § 2 unterliegt, zusammensetzen kann. Dabei muß aber überdies noch vorausgesetzt werden, daß Γ ein endliches Erzeugendensystem besitzt. Zunächst wird auf Grund

[3]) Ein Ansatz dieser Art für einen speziellen Fall bei der vollen Modulgruppe und geradzahliger Dimension findet sich bereits bei Poincaré, Œuvres 2, S. 592.

von § 2 in einfachster Weise gezeigt, daß man jede automorphe Form bis auf einen Rest, der ganz ist und in allen parabolischen Spitzen verschwindet, durch die Reihen G_{-r} darstellen kann. Die größere Schwierigkeit besteht im Beweis der Aussage, daß man auch die ganzen, in allen parabolischen Spitzen verschwindenden automorphen Formen durch die Reihen G_{-r} darstellen kann.

Das entscheidende Hilfsmittel ist hier die Rittersche Theorie der multiplikativen Formen auf algebraischen Gebilden[4]). § 4 enthält ein Referat über diese Theorie; es werden in § 4 die wichtigsten Begriffe der Theorie neu begründet, und es wird ein für unsere Anwendung fundamentaler Satz richtig formuliert und (zum erstenmal) bewiesen.

Der in § 5 wiedergegebene Beweis für den noch ausstehenden Teil unseres Darstellungssatzes verläuft in der Idee parallel zu dem Ritterschen Beweis[5]) für die Darstellbarkeit der automorphen Formen ganzzahliger Dimension $\leqq -3$ durch die bekannten Poincaréschen Reihen. Die Idee dieses Beweises findet sich schon in der Riemannschen Theorie der algebraischen Funktionen, nämlich bei der Darstellung der algebraischen Funktionen durch Integrale zweiter Gattung. Freilich ist in unserem Falle die Durchführung einer Reihe von Hilfsbetrachtungen notwendig, die, obgleich sie den Kern der ganzen Beweisführung bilden, bei Ritter völlig fehlen und auch in dem bekannten Lehrbuch von Fricke und Klein[6]) nicht genügend Beachtung finden.

Unter den Konsequenzen dieses Satzes ist die Tatsache hervorzuheben, daß bei geeigneter Fixierung der Multiplikatoren als stetiger Funktionen von r jede automorphe Form als Wert einer stetigen Funktion $\Psi(r)$ der reellen Variablen r aufgefaßt werden kann, wo $\Psi(r)$ auch umgekehrt für jeden Wert $r > 2$ wirklich eine automorphe Form der Dimension $-r$ darstellt.

In § 6 wird zunächst ein neues Erzeugungsprinzip für automorphe Formen aufgestellt, das ich am Beispiel der $\Gamma(N)$ auseinandersetze. Im zweiten Abschnitt dieses Paragraphen beschäftige ich mich mit einer Kleinschen Methode zur Konstruktion von Untergruppen der Modulgruppe und zeige durch Anwendung gruppentheoretischer Hilfsmittel, daß sich die so gewonnenen Untergruppen gruppentheoretisch in einfachster Weise charakterisieren lassen.

---

[4]) E. Ritter, Die multiplikativen Formen auf algebraischem Gebilde beliebigen Geschlechts usw., Math. Annalen **44**, im folgenden zitiert mit Ritter II.

[5]) E. Ritter, Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null, Math. Annalen **41**, im folgenden zitiert mit Ritter I.

[6]) Fricke und Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen II (Teubner 1912), im folgenden zitiert mit Fricke II.

§ 1.

In den folgenden Untersuchungen über automorphe Formen legen wir eine sogenannte Grenzkreisgruppe mit reellen Substitutionskoeffizienten zugrunde. Dabei ist es zweckmäßig, nicht die Gruppe der linearen Substitutionen einer komplexen Variablen τ, sondern diejenige Gruppe zum Ausgang zu nehmen, welche von den Koeffizientenschemata der Substitutionen gebildet wird. Ist

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit der Determinante $ad - bc = 1$, so ordnen wir dieser Matrix diejenige Substitution zu, welche die komplexe Variable τ in

$$\tau' = S\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

überführt. Ist Γ eine Gruppe von solchen Matrizen S, so bezeichnen wir die Gruppe $\overline{\Gamma}$ der Substitutionen, welche den S von Γ zugeordnet sind, als die durch Γ induzierte Substitutionsgruppe der komplexen Variablen τ. Als Grenzkreisgruppe wollen wir im folgenden kurz eine solche Gruppe Γ bezeichnen, welche folgende Eigenschaften hat:

Die Elemente der Matrizen von Γ sind sämtlich reell; $\overline{\Gamma}$ ist im Innern der oberen τ-Halbebene $\mathfrak{H}$ eigentlich diskontinuierlich und das Netz $\mathfrak{N}$ der Fundamentalbereiche von $\overline{\Gamma}$ innerhalb $\mathfrak{H}$ verdichtet sich gegen die ganze reelle τ-Achse.

Unter den Fundamentalbereichen von $\overline{\Gamma}$ innerhalb $\mathfrak{H}$ werden wir uns ein Exemplar $\mathfrak{D}$ ausgewählt denken. Als den „in abstracto geschlossenen" Fundamentalbereich $\overline{\mathfrak{D}}$ bezeichnen wir dann die aus $\mathfrak{D}$ durch Zuordnung der äquivalenten Ränder entstehende Mannigfaltigkeit.

Über die Gruppe Γ werden wir später noch die weiteren eingangs angekündigten Voraussetzungen machen.

Definition und Grundeigenschaften der automorphen Formen.

Wir geben zunächst die Definition einer zur Gruppe Γ gehörigen automorphen Form von der Dimension $-r$, wo r eine beliebige komplexe Zahl sein kann. Es sei zu diesem Zwecke mit $\mathfrak{F}_r$ die Riemannsche Fläche des Logarithmus bezeichnet, falls r nicht rational; falls $r = \frac{j}{k}$ rational, wo $k > 0$, $(j, k) = 1$, sei $\mathfrak{F}_r$ irgendeine nur bei 0 und ∞ verzweigte Riemannsche Fläche, auf der die Funktion $h(z) = \sqrt[k]{z}$ eindeutig ist; $\mathfrak{F}_r'$ entstehe aus $\mathfrak{F}_r$ durch Herausstanzen des 0-Punktes. Jetzt seien ω_1, ω_2 zwei komplexe Variable, welche auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ variieren sollen, die

durch folgende Vorschriften definiert ist:

1. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \tau$ habe positiven Imaginärteil.

2. ω_2 liege auf $\mathfrak{F}_r'$.

Wir nennen eine Funktion $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ eine automorphe Form $(-r)$. Dimension für die Gruppe Γ und das Multiplikatorsystem $\chi(L)$, wo L aus Γ, falls $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ folgende Eigenschaften hat:

I. $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ ist eine auf $\mathfrak{M}$ eindeutige analytische Funktion von ω_1, ω_2; für jedes ω_2 ist $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{H}$ bis auf endlich viele Pole regulär.

II. Für beliebiges komplexes $t \neq 0$ gilt

$$\varphi(t\omega_1, t\omega_2) = \frac{\omega_2^r}{(t\omega_2)^r}\,\varphi(\omega_1, \omega_2), \tag{1}$$

wenn $\{\omega_1, \omega_2\}$ und $\{t\omega_1, t\omega_2\}$ Punkte von $\mathfrak{M}$ bezeichnen. (Dabei sind ω_2^r und $(t\omega_2)^r$ als die Werte der Funktion $z^r = e^{r \lg z}$ für $z = \omega_2$ bzw. $z = t\omega_2$ auf $\mathfrak{F}_r'$ aufzufassen.)

Ist $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine unimodulare reelle Matrix, so setzen wir allgemein

$$S\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad S\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2.$$

III. Sei $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine Matrix aus Γ, und $\{\omega_1, \omega_2\}$ und $\{L\omega_1, L\omega_2\}$ Punkte von $\mathfrak{M}$. Dann gilt

$$\varphi(L\omega_1, L\omega_2) = \chi(L)\,\varphi(\omega_1, \omega_2), \tag{2}$$

wo $\chi(L)$ nur von L und der Auswahl der Blätter von $\mathfrak{F}_r'$ abhängt, in denen ω_2 und $L\omega_2$ liegen.

Bevor wir die Forderung IV formulieren, bilden wir nach II mit $t\omega_2 = 1$ ($\arg t\omega_2 = 0$ auf $\mathfrak{F}_r'$) die Funktion

$$f(\tau) = \varphi(\tau, 1) = \omega_2^r\,\varphi(\omega_1, \omega_2). \tag{3}$$

Mit I und II sind die folgenden Aussagen über $f(\tau)$ ersichtlich gleichbedeutend:

I'. $f(\tau)$ ist eine in $\mathfrak{H}$ eindeutige analytische Funktion von τ, welche in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{H}$ bis auf endlich viele Pole regulär ist.

Um auszudrücken, was die Eigenschaft III für $f(\tau)$ bedeutet, definieren wir für reelles $c, d \neq 0, 0$ und τ in $\mathfrak{H}$

$$(c\tau + d)^r = e^{r \lg (c\tau + d)},$$

wo der Zweig des Logarithmus zu nehmen ist, für welchen $\lg(c\tau + d)$ reell, wenn $c\tau + d > 0$, $c \neq 0$; falls $c = 0$, sei

$$(c\tau + d)^r = d^r = |d|^r e^{-\pi i r \frac{\operatorname{sgn} d - 1}{2}}.$$

Wenn nun $S\omega_2$ und ω_2 auf $\mathfrak{F}_r'$ fixiert sind, so gilt offenbar

$$(4)\qquad (S\omega_2)^r = \omega_2^r (c\tau + d)^r \mu(S),$$

wo $\mu(S)$ eine Zahl von der Form $e^{2\pi i \nu r}$ mit ganzem rationalem ν ist und nur von S und der Auswahl der Blätter von $\mathfrak{F}_r'$ abhängt, in denen ω_2 und $S\omega_2$ liegen. Aus III folgt

$$f(L\tau) = (L\omega_2)^r \omega_2^{-r} \chi(L) f(\tau) = \chi(L)\mu(L)(c\tau + d)^r f(\tau),$$

also gilt

$$\text{III}'.\qquad f(L\tau) = v(L)(\gamma\tau + \delta)^r f(\tau)$$

mit $v(L) = \chi(L)\mu(L)$, wo ersichtlich $v(L)$ nur von der Matrix L abhängt. Die Aussagen III′ und III sind wieder gleichbedeutend.

Sei jetzt $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ eine unimodulare reelle Matrix; wir schreiben $\underline{M} = \{m_1, m_2\}$ und setzen $\underline{M}S = \underline{MS}$. Nun ist offenbar

$$(5)\qquad (m_1 S\tau + m_2)^r = \sigma(M, S)\frac{(m_1'\tau + m_2')^r}{(c\tau + d)^r},$$

wo $\{m_1', m_2'\} = \underline{MS}$ und $\sigma(M, S) = \sigma^{(r)}(M, S)$ eine nur von $\underline{M}$ und S abhängige Zahl von der Form $e^{2\pi i \nu r}$ mit ganzem ν bezeichnet.

Ist s eine parabolische Spitze von $\mathfrak{N}$, $\overline{H}$ Erzeugende der zyklischen Untergruppe derjenigen Substitutionen $\overline{L}$ von $\overline{\Gamma}$, welche s festlassen, so hat die Matrix von $\overline{H}$ die Gestalt $\pm H$, wo

$$H = S^{-1} U^{\vartheta} S,$$

S eine Matrix mit der Eigenschaft $\underline{S} = \{c, d\}$, $s = -\frac{d}{c}$ und $U^{\vartheta} = \begin{pmatrix} 1 & \vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist (ϑ reell). Falls H nicht in Γ liegt, so nehmen wir die Matrix $-I = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ zu Γ hinzu. Daher können wir annehmen, H liege in Γ. Die Funktion $g(\tau) = (c\tau + d)^r f(\tau)$ hat nun die Eigenschaft

$$g(H\tau) = (cH\tau + d) f(H\tau) = \sigma(S, H) v(H)(c\tau + d)^r f(\tau),$$

$$g(H\tau) = e^{2\pi i \varkappa} g(\tau),$$

wo wir

$$\sigma(S, H) v(H) = e^{2\pi i \varkappa},\qquad \varkappa = \varkappa(s),\qquad 0 \leqq \Re\varkappa < 1$$

setzen. Hieraus folgt, daß $\varphi(\tau) = e^{-2\pi i \frac{\tau}{\vartheta}\varkappa} g(S^{-1}\tau)$ die Periode ϑ hat.

Wir verlangen nun

IVa. Im Innern von $\mathfrak{H}$ sei $f(\tau)$ bis auf Pole regulär. In einem Fundamentalbereich $\mathfrak{D}$ von $\overline{\Gamma}$ innerhalb $\mathfrak{H}$ sollen sich diese Pole höchstens gegen die nichtparabolischen Randpunkte auf der reellen Achse häufen.

Dann gibt es also eine Laurent-Entwicklung von $\varphi(\tau)$ nach Potenzen von $e^{2\pi i \frac{\tau}{\vartheta}}$, woraus eine Darstellung

$$(6) \qquad g(\tau) = (c\tau + d)^r f(\tau) = e^{2\pi i \frac{S\tau}{\vartheta}\varkappa}\, \mathfrak{P}_S\left(e^{2\pi i \frac{S\tau}{\vartheta}};\, f\right)$$

resultiert, in welcher $\mathfrak{P}_S(t;\, f)$ eine für alle hinreichend kleinen $|t| \neq 0$ konvergente Potenzreihe bedeutet.

Schließlich soll gelten:

IVb. In jeder parabolischen Spitze s von $\mathfrak{R}$ enthalte die Entwicklung der Funktion $e^{-2\pi i \frac{S\tau}{\vartheta}\varkappa}(c\tau + d)^r f(\tau)$ in eine Reihe nach Potenzen der Ortsuniformisierenden $t = e^{2\pi i \frac{S\tau}{\vartheta}}$ nur endlich viele Glieder mit negativen Exponenten.

IVa und IVb besagen zusammen:

IV. $f(\tau)$ ist in dem in abstracto geschlossenen Fundamentalbereich $\overline{\mathfrak{D}}$ bis auf Pole in der Ortsuniformisierenden regulär; diese Pole dürfen sich höchstens gegen die nichtparabolischen reellen Randpunkte von $\overline{\mathfrak{D}}$ häufen.

Wenn Γ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, so wird durch die Forderungen I, II, III, IV bzw. I', III', IV der Begriff einer automorphen Form in der üblichen Weise [7]) fixiert. Falls dagegen Γ nicht durch endlich viele Elemente erzeugt werden kann, so sieht man am Beispiel der Untergruppen der Modulgruppe von unendlichem Index, daß es nicht genügt, zu verlangen, daß $f(\tau)$ in $\overline{\mathfrak{D}}$ bis auf endlich viele Pole regulär ist. Dann muß an die Stelle dieser Forderung die Eigenschaft IV treten.

Es sei noch bemerkt, daß aus den geforderten Eigenschaften bereits folgt, daß $f(\tau)$ auch in einer elliptischen Ecke ε eine Entwicklung nach Potenzen der Ortsuniformisierenden im Punkte $\tau = \varepsilon$ besitzt. Sei nämlich

$$\varepsilon' = \bar{\varepsilon}, \qquad g_1(\tau) = (\tau - \varepsilon')^r f(\tau),$$

wo

$$(\tau - \varepsilon')^r = e^{r \lg(\tau - \varepsilon')}$$

und $\lg(\tau - \varepsilon')$ den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet. Ist $L\varepsilon = \varepsilon$, $L \subset \Gamma$, so folgt

$$g_1(L\tau) = \left(\frac{\tau - \varepsilon'}{(\gamma\tau + \delta)(\gamma\varepsilon' + \delta)}\right)^r v(L)\,(\gamma\tau + \delta)^r f(\tau) = \omega(L, \varepsilon)\frac{v(L)}{(\gamma\varepsilon' + \delta)^r}\, g_1(\tau),$$

wo

$$\omega(L, \varepsilon) = e^{2\pi i \nu' r}, \quad \nu' \text{ ganz.}$$

---

[7]) Vgl. Fricke II, Abschn. 1, Kap. II, § 3.

Hier ist zunächst eine Entwicklung von $g_1(\tau)$ nach Potenzen von $\frac{\tau-\varepsilon}{\tau-\varepsilon'}$ vorhanden, in der nur endlich viele negative Exponenten auftreten. Und nun folgt auf dem üblichen Wege

$$g_1(\tau)=\left(\frac{\tau-\varepsilon}{\tau-\varepsilon'}\right)^{m'}\mathfrak{P}(t),\quad t=\left(\frac{\tau-\varepsilon}{\tau-\varepsilon'}\right)^{m},$$

wo m die „inhomogene" Ordnung von ε, $0\leqq m'<m$, und $\mathfrak{P}(t)$ eine in der Umgebung von $t=0$ bis auf höchstens einen Pol im Punkte $t=0$ selbst reguläre Potenzreihe ist.

Wir bezeichnen im folgenden $f(\tau)$ als eine automorphe Form in inhomogener Darstellung von der Dimension $-r$ für die Gruppe Γ und das Multiplikatorsystem $v(L)$.

Die Multiplikatoren $\chi(L)$ der homogenen Formen sind bekanntlich*) multiplikative Funktionen ihres Arguments, falls man die Blätter der $\mathfrak{F}_r'$, in denen die Variable ω_2 und ihre Transformierten liegen, geeignet auswählt. Sind L_1, L_2 Elemente von Γ, so gilt

(7) $$\chi(L_1L_2)=\chi(L_1)\chi(L_2),$$

falls nämlich der Weg auf $\mathfrak{F}_r'$, der von ω_2 nach $L_1L_2\omega_2$ führt, durch Aneinanderhängen der Wege von ω_2 nach $L_2\omega_2$ und von $L_2\omega_2$ nach $L_1L_2\omega_2$ gewonnen werden kann. Unter den gleichen Bedingungen gilt

(8) $$\mu(L_1L_2)=\sigma(L_1,L_2)\mu(L_1)\mu(L_2)$$

und daher

(9) $$v(L_1L_2)=\sigma(L_1,L_2)v(L_1)v(L_2).$$

Das Symbol $\sigma(M,S)$ und verwandte Symbole.

Wir betrachten jetzt etwas ausführlicher die automorphen Formen in inhomogener Darstellung. Zunächst handelt es sich um das Symbol $\sigma^{(r)}(M,S)$. Es gilt

$\sigma^{(r_1)}(M,S)=\sigma^{(r_2)}(M,S)$, wenn $r_1\equiv r_2 \pmod 1$.

$\sigma^{(r)}(M_1,S)=\sigma^{(r)}(M_2,S)$, wenn $\underline{M_1}=\underline{M_2}$, d. h. $M_2=U^{\xi}M_1$ mit einem reellen ξ. Entsprechend ist $\sigma(M,U^{\xi})=1$ für jedes reelle ξ. Ferner sind die Werte für die Fälle $r\equiv\frac{1}{2}(1)$ leicht zu berechnen. Wir setzen

$$\operatorname{sgn} x=\frac{x}{|x|},\quad x \gtrless 0$$

$$\sigma_{a,b}=(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} a-1}{2}\frac{\operatorname{sgn} b-1}{2}}\quad \text{für reelle } a\neq 0,\ b\neq 0.$$

---

*) Fricke II, Abschn. I, Kap. II, § 8.

Dann ergibt sich folgendes:

$$(10)\quad \begin{cases} 1.\ c \neq 0 & \\ \quad \alpha)\ m_1 \neq 0,\quad m_1' \neq 0 & \sigma(M,\ S) = \sigma_{-c m_1,\, m_1 m_1'} \\ \quad \beta)\ m_1 = 0,\quad m_1' \neq 0 & \sigma(M,\ S) = \sigma_{-c,\, m_2} \\ \quad \gamma)\ m_1 \neq 0,\quad m_1' = 0 & \sigma(M,\ S) = \sigma_{c,\, m_1'} \\ 2.\ c = 0 & \\ \quad \alpha)\ m_1 \neq 0,\quad m_1' \neq 0 & \sigma(M,\ S) = \sigma_{d,\, m_1'} \\ \quad \beta)\ m_1 = 0,\quad m_1' = 0 & \sigma(M,\ S) = \sigma_{d,\, m_2}. \end{cases}$$

Man entnimmt hieraus insbesondere, daß $\sigma(S, S^{-1}) = 1$, falls $c \neq 0$, $r \equiv \frac{1}{2}(1)$. Diese Regel gilt aber allgemein: es ist für alle r $\sigma^{(r)}(S, S^{-1}) = 1$, falls $c \neq 0$, wie man leicht bestätigt.

Am wichtigsten ist die Regel, die sich ergibt, wenn man in $(m_1\tau + m_2)^r$ auf τ nacheinander die Substitutionen S_2 und S_1 ausübt. Es kommt

$$(11)\qquad \sigma(M, S_1 S_2) = \frac{\sigma(M, S_1)\,\sigma(MS_1, S_2)}{\sigma(S_1, S_2)}$$

und daraus folgt

$$(12)\qquad \sigma(MM', S) = \frac{\sigma(M', S)\,\sigma(M, M'S)}{\sigma(M, M')}.$$

Wir führen jetzt ein neues Symbol ein, welches folgenden Zweck hat: Wenn den unimodularen Matrizen M, S und $M' = MS$ Multiplikatoren v zugeordnet sind, so soll dies neue Symbol gestatten, die Funktionen

$$v(M)(m_1 S\tau + m_2)^r,\qquad v(MS)(m_1'\tau + m_2')^r \quad\text{und}\quad v(S)(c\tau + d)^r$$

miteinander in Verbindung zu bringen. Es gilt nämlich

$$v(M)(m_1 S\tau + m_2)^r = \varrho(M, S)\,\frac{v(MS)\,(m_1'\tau + m_2')^r}{v(S)\,(c\tau + d)^r},$$

wo

$$\varrho(M, S) = \varrho^{(r)}(M, S; v) = \sigma^{(r)}(M, S)\,\frac{v(M)\,v(S)}{v(MS)}.$$

Die Formeln

$$(13)\qquad \varrho(M, S_1 S_2) = \frac{\varrho(M, S_1)\,\varrho(MS_1, S_2)}{\varrho(S_1, S_2)}$$

und

$$(14)\qquad \varrho(MM', S) = \frac{\varrho(M', S)\,\varrho(M, M'S)}{\varrho(M, M')}$$

sind unmittelbare Konsequenzen von (11) bzw. (12) und gelten identisch in den in ihnen auftretenden Werten des Multiplikators v. Es muß aber vorausgesetzt werden, daß diese Werte sämtlich $\neq 0$ sind. Die aus der Invarianzeigenschaft von $f(\tau)$ früher abgeleitete Relation

$$(9)\qquad v(L_1 L_2) = \sigma(L_1, L_2)\,v(L_1)\,v(L_2),\qquad L_1 \subset \Gamma,\quad L_2 \subset \Gamma$$

bedeutet jetzt einfach, daß

(15) $\varrho(L_1, L_2; v) = 1$ für alle L_1, L_2 aus Γ.

Diese Beziehung folgt direkt aus der Invarianzeigenschaft von $f(\tau)$ durch Nacheinanderausüben von L_2 und L_1.

Transformation.

Wir bilden nun mit der unimodularen reellen Matrix $S_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$ die Funktion

(16) $$\varphi_{S_0}(\tau) = \varphi_{S_0}(\tau; f) = \frac{f(S_0\tau)}{(c_0\tau + d_0)^r}.$$

Man überzeugt sich, daß $\varphi_{S_0}(\tau)$ eine automorphe Form $(-r)$-ter Dimension für die Gruppe $\Gamma' = S_0^{-1}\Gamma S_0$ und das Multiplikatorsystem $v'_{S_0}(L')$ (L' aus Γ') ist, wo

(17) $$v'_{S_0}(L') = v(S_0 L' S_0^{-1}) \frac{\sigma(S_0 L' S_0^{-1}, S_0)}{\sigma(S_0, L')}.$$

Die Entwicklung von $\varphi_{S_0}(\tau)$ in den Spitzen ergibt sich dabei direkt aus der Formel (16); es wird

$$(c S_0\tau + d)^r f(S_0\tau) = \sigma(S, S_0)(c'\tau + d')^r \varphi_{S_0}(\tau),$$

also

$$e^{2\pi i\varkappa\frac{S'\tau}{\vartheta}} \mathfrak{P}_S\left(e^{2\pi i\frac{S'\tau}{\vartheta}}; f\right) = \sigma(S, S_0)\, e^{2\pi i\varkappa'\frac{S'\tau}{\vartheta}} \mathfrak{P}_{S'}\left(e^{2\pi i\frac{S'\tau}{\vartheta}}, \varphi_{S_0}\right),$$

wo

$$S' = SS_0, \quad e^{2\pi i\varkappa'} = \sigma(S', S'^{-1}U^\vartheta S')\, v'_{S_0}(S'^{-1}U^\vartheta S'), \quad 0 \leqq \Re\varkappa' < 1.$$

Hier ist $\varkappa' = \varkappa$, denn nach (11) und (12) wird

$$\begin{aligned} e^{2\pi i\varkappa'} &= \sigma(SS_0, S_0^{-1}HS_0)\, v(H) \frac{\sigma(H, S_0)}{\sigma(S_0, S_0^{-1}HS_0)} \\ &= v(H) \frac{\sigma(H, S_0)\,\sigma(S, HS_0)}{\sigma(S, S_0)} \\ &= v(H)\,\sigma(S, H) \frac{\sigma(SH, S_0)}{\sigma(S, S_0)} = e^{2\pi i\varkappa}. \end{aligned}$$

So kommt

(18) $$\mathfrak{P}_S(t; f) = \sigma(S, S_0)\, \mathfrak{P}_{SS_0}(t; \varphi_{S_0}).$$

Weitere Regeln über das Rechnen mit den Potenzreihen sind

(19) $$\mathfrak{P}_S(t; f) = e^{2\pi i\frac{\xi}{\vartheta}\varkappa} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \sigma(S, -I)\, e^{-\pi i r} \end{matrix} \right\} \mathfrak{P}_{\pm U^\xi S}\left(t e^{2\pi i\frac{\xi}{\vartheta}}; f\right),$$

(20) $$\mathfrak{P}_S(t; f) = \lambda^{-r}\mathfrak{P}_{S^*}(t; f), \quad \text{wo} \quad S^* = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}a & \lambda^{-1}b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0,$$

$$H = S^{*-1}U^{\vartheta^*}S^*, \quad \vartheta = \lambda^2\vartheta^*; \quad \lambda^{-r} = e^{-r\lg\lambda}, \quad \lg\lambda \text{ reell.}$$

Aus (18) folgt durch Spezialisierung ferner

(21) $$\mathfrak{P}_S(t; f) = \sigma(S, L)\, v(L)\, \mathfrak{P}_{SL}(t; f), \quad L \subset \Gamma,$$

(22) $$\mathfrak{P}_S(t; f) = \sigma(S, S^{-1})\, \mathfrak{P}_I(t; \varphi_{S^{-1}}),$$

und schließlich gilt

(23) $$e^{2\pi i \varkappa} = v(H)\, \sigma(S, S^{-1} U^\vartheta S) = v(H) \frac{\sigma(U^\vartheta S, S^{-1})}{\sigma(S^{-1}, U^\vartheta S)} = v'_{S^{-1}}(U^\vartheta).$$

Wir bemerken an dieser Stelle noch besonders, daß aus der Definition von $e^{2\pi i \varkappa}$ tatsächlich folgt, daß $e^{2\pi i \varkappa}$ ungeändert bleibt, wenn man S durch $\pm U^\xi S^*$ ersetzt, wo ξ eine reelle Zahl bezeichnet. Denn

$$\sigma(\pm U^\xi S^*, H) = \sigma(\pm S^*, H) = \sigma(\pm S, H)$$

und

$$\sigma(-S, H) = \sigma(S, H) \frac{\sigma(-I, U^\vartheta S)}{\sigma(-I, S)} = \sigma(S, H) \frac{\sigma(-U^\vartheta, S)}{\sigma(-I, S)} = \sigma(S, H).$$

Ferner zeigen wir, daß sich die Invarianzeigenschaft von $g(\tau) = (c\tau + d)^r f(\tau)$ nicht ändert, wenn man, falls $-I$ in Γ liegt, $-H$ statt H anwendet. Es ist

$$g((-H)\tau) = (c(-H)\tau + d)^r f((-H)\tau)$$
$$= \sigma(S, -H)(-c\tau - d)^r v(-H) f(\tau);$$

$$\frac{g((-H)\tau)}{g(\tau)} = \frac{\sigma(S, -I)\, \sigma(-S, H)}{\sigma(-I, H)} \frac{(-1)^r}{\sigma(S, -I)} \sigma(-I, H)\, v(-I)\, v(H)$$
$$= \sigma(-S, H)\, v(H) \cdot (-1)^r\, v(-I)$$
$$= e^{2\pi i \varkappa} \cdot \frac{f((-I)\tau)}{f(\tau)} = e^{2\pi i \varkappa}.$$

Wir haben nun in $\varphi_{S_0}(\tau)$ eine automorphe Form der Dimension $-r$ für die Gruppe Γ' und das Multiplikatorsystem $v'_{S_0}(L')$ vor uns. Danach ist z. B. $\varrho(L'_1, L'_2; v'_{S_0}) = 1$ für alle L'_1, L'_2 in Γ'. Eine einfache Rechnung zeigt ferner, daß $\varphi_{LS_0}(\tau) = v(L)\, \sigma(L, S)\, \varphi_{S_0}(\tau)$, so daß $v'_{LS_0}(L') = v'_{S_0}(L')$ für alle L aus Γ, L' aus Γ'. Ebenso muß $v'_{S_1 S_2}(L'') = (v'_{S_1})'_{S_2}(L'')$, $L'' \subset (S_1 S_2)^{-1} \Gamma S_1 S_2$ sein. Es erhebt sich nun die Frage, ob die beim Beweise dieser Formeln benutzte Tatsache, daß zum Multiplikatorsystem $v(L)$ eine automorphe Form $(-r)$-ter Dimension für die Gruppe Γ existiert, wirklich unentbehrlich ist, oder ob es möglich ist, diese Formeln auf rein algebraischem Wege herzuleiten. Letzteres ist in der Tat der Fall. Wir setzen zunächst für irgend zwei reelle unimodulare Matrizen S, Q

$$v'_S(Q) = v(SQS^{-1}) \frac{\sigma(SQS^{-1}, S)}{\sigma(S, Q)}$$
$$= v(Q) \frac{\varrho(SQS^{-1}, S)}{\varrho(S, Q)}$$

und definieren das Symbol $P_S(Q; v) = P_S(Q)$ durch die Gleichung

$$v'_S(Q) = v(Q)\, P_S(Q; v).$$

Hier und im folgenden Abschnitt nehmen wir an, daß allen bei Berechnung dieser Symbole auftretenden Matrizen ein Multiplikatorwert v zugeordnet sei, über den wir vorläufig nichts weiter voraussetzen, als daß er stets $\neq 0$ ist. Die nun folgenden

Hilfssätze über den Gebrauch der Symbole ϱ und P

beweisen wir unter ausschließlicher Verwendung der Identitäten (13) und (14). Alle großen lateinischen Buchstaben stehen in diesem Abschnitt für reelle unmodulare Matrizen. Wir lassen manchmal das dritte Argument in ϱ und das zweite in P fort, wenn es sich um den Multiplikator v handelt.

Hilfssatz a):

$$\varrho(A, B; v'_S) = \varrho(SAS^{-1}, SBS^{-1}; v).$$

Beweis. Es ist

$$\varrho(A, B; v'_S) = \varrho(A, B; v)\frac{P_S(A)\,P_S(B)}{P_S(AB)},$$

wo

$$\begin{aligned} P_S(AB) &= \frac{\varrho(SAS^{-1}SBS^{-1}, S)}{\varrho(S, AB)} \\ &= \frac{\varrho(A, B)}{\varrho(SA, B)\,\varrho(S, A)} \cdot \frac{\varrho(SBS^{-1}, S)\,\varrho(SAS^{-1}, SB)}{\varrho(SAS^{-1}, SBS^{-1})} \\ &= \frac{\varrho(A, B)}{\varrho(SAS^{-1}, SBS^{-1})} \cdot \frac{\varrho(SBS^{-1}, S)}{\varrho(S, B)} \cdot \frac{\varrho(SAS^{-1}, S)}{\varrho(S, A)}, \end{aligned}$$

$$\varrho(A, B; v'_S) = \varrho(SAS^{-1}, SBS^{-1}; v), \qquad \text{q. e. d.}$$

Hilfssatz b):

$$P_{S_1}(Q; v)\, P_{S_2}(Q; v'_{S_1}) = P_{S_1 S_2}(Q; v).$$

Beweis. Zunächst ist

$$P_S(Q) = \frac{\varrho(QS^{-1}, S)}{\varrho(S, QS^{-1})} = \frac{\varrho(S^{-1}, S)\,v(I)}{\varrho(SQ, S^{-1})\,\varrho(S, Q)}, \tag{24}$$

so daß nach Hilfssatz a)

$$\begin{aligned} P_{S_2}(Q; v'_{S_1}) &= \frac{\varrho(QS_2^{-1}, S_2; v'_{S_1})}{\varrho(S_2, QS_2^{-1}; v'_{S_1})} = \frac{\varrho(S_1QS_2^{-1}S_1^{-1}, S_1S_2S_1^{-1})}{\varrho(S_1S_2S_1^{-1}, S_1QS_2^{-1}S_1^{-1})} \\ &= \frac{\varrho(QS_2^{-1}S_1^{-1}, S_1S_2S_1^{-1})\,\varrho(S_1, QS_1^{-1})\,\varrho(S_1S_2, S_1^{-1})}{\varrho(S_1, QS_2^{-1}S_1^{-1})\,\varrho(S_1^{-1}, S_1QS_2^{-1}S_1^{-1})\,\varrho(S_1S_2, QS_2^{-1}S_1^{-1})} \\ &= \frac{\varrho(QS_2^{-1}S_1^{-1}, S_1S_2)\,\varrho(S_1, Q)\,\varrho(S_1Q, S_1^{-1})}{\varrho(S_1S_2, QS_2^{-1}S_1^{-1})\,\varrho(S_1^{-1}, S_1)\,v(I)} \end{aligned}$$

und das ist nach (24)

$$P_{S_2}(Q; v'_{S_1}) = \frac{P_{S_1 S_2}(Q)}{P_{S_1}(Q)}, \quad \text{q. e. d.}$$

Hilfssatz c):

$$P_{S_1 S_2}(Q; v) = P_{S_1}(S_2 Q S_2^{-1}; v)\, P_{S_2}(Q; v).$$

Beweis. Nach (24) kommt

$$P_{S_2}(Q; v'_{S_1}) = \frac{\varrho(Q S_2^{-1}, S_2; v'_{S_1})}{\varrho(S_2, Q S_2^{-1}; v'_{S_1})}$$

$$= P_{S_2}(Q)\, \frac{P_{S_1}(S_2 Q S_2^{-1})}{P_{S_1}(Q)};$$

andererseits ist nach Hilfssatz b)

$$P_{S_1}(Q)\, P_{S_2}(Q; v'_{S_1}) = P_{S_1 S_2}(Q; v), \quad \text{q. e. d.}$$

Hilfssatz a) hat zur Folge, daß

$$\varrho(L'_1, L'_2; v'_{S_0}) = \varrho(L_1, L_2; v), \quad \text{wenn} \quad L'_i = S_0^{-1} L_i S_0 \qquad (i = 1, 2)$$

und die Aussagen

$$\varrho(L_1, L_2; v) = 1 \quad \text{und} \quad \varrho(L'_1, L'_2; v'_{S_0}) = 1$$

sind gleichbedeutend. Nach Hilfssatz c) ist

$$P_{L S_0}(Q; v) = P_{S_0}(Q; v)\, P_L(S_0 Q S_0^{-1}; v).$$

Wenn nun Q in Γ' liegt und $\varrho(L_1, L_2; v) = 1$ für alle L_1, L_2 in Γ erfüllt ist, so folgt tatsächlich $P_L(S_0 Q S_0^{-1}; v) = 1$, d. h. $v'_{L S_0}(Q) = v'_{S_0}(Q)$. Hieraus geht insbesondere noch hervor, daß $e^{2\pi i \varkappa}$ sich beim Übergang zu einer äquivalenten Spitze $s' = L^{-1} s$ nicht ändert. Denn nach (23) ist[9])

$$e^{2\pi i \varkappa(s')} = v'_{(SL)^{-1}}(U^{\vartheta}) = v'_{L^{-1} S^{-1}}(U^{\vartheta}) = v'_{S^{-1}}(U^{\vartheta}) = e^{2\pi i \varkappa(s)}.$$

Hilfssatz b) besagt, daß $(v'_{S_1})'_{S_2} = v'_{S_1 S_2}$ ohne die geringsten Voraussetzungen über den Multiplikator v erfüllt ist.

Damit ist gezeigt, daß alle jene zu Anfang dieses Abschnittes erwähnten Formeln auf rein algebraischem Wege aus der Beziehung $\varrho(L_1, L_2; v) = 1$ für alle L_1, L_2 aus Γ folgen. Wir werden so darauf geführt, zu versuchen, allein mit Hilfe dieser Beziehung automorphe Formen der gewünschten Art zu konstruieren.

§ 2.

Wir machen jetzt die eingangs angekündigte Voraussetzung, daß der Fundamentalbereich $\mathfrak{D}$ von $\overline{\Gamma}$ mindestens eine parabolische Spitze besitzt.

---

[9]) Man bestätigt leicht, daß die Größe ϑ sich beim Übergang von s zu der äquivalenten Spitze s' nicht ändert.

Sei s eine solche Spitze, $H = A^{-1} U^{\vartheta} A$ Erzeugende der zyklischen Untergruppe $\mathfrak{Z}(H)$ derjenigen L von Γ, welche s fest lassen. Wir setzen $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$; dann ist $s = -\frac{a_2}{a_1}$.

Wir betrachten nun ein solches Teilsystem $\mathfrak{S}(A) = \mathfrak{S}(A; \Gamma)$ der Nebengruppe $A\Gamma$, welches die Eigenschaft hat, daß niemals für zwei Elemente M und M' aus $\mathfrak{S}(A)$ gilt: $\underline{M} = \underline{M}'$. Ferner soll $\mathfrak{S}(A)$ ein maximales System dieser Art sein. $\underline{M}' = \underline{M}$ bedeutet, wenn $M = AL$, $M' = AL'$, daß $M' = U^{\eta} M$ oder $L' = A^{-1} U^{\eta} A L = H^{\frac{\eta}{\vartheta}} L$, wo η ein Vielfaches von ϑ ist. Man erhält also jedes solche System $\mathfrak{S}(A)$ in den Matrizen $M = AL$, wo M ein volles Repräsentantensystem von nach der Gruppe $\mathfrak{Z}(U^{\vartheta})$ nicht linksäquivalenten Matrizen von $A\Gamma$, d. h. wo L ein volles Repräsentantensystem von nach $\mathfrak{Z}(H)$ nicht linksäquivalenten Elementen von Γ durchläuft. Die Matrizensysteme $\mathfrak{S}(A; \Gamma)$ haben einige einfache Eigenschaften; da es nachher nicht darauf ankommen wird, welches Repräsentantensystem man gewählt hat, so bezeichnen wir in den folgenden symbolischen Gleichungen alle solche Systeme $\mathfrak{S}(A; \Gamma)$ mit demselben Symbol, wenn sie in ihren Argumenten übereinstimmen. Es gilt in leicht verständlicher Bezeichnung

(25) 1. $\mathfrak{S}(\pm U^{\xi} C_{\lambda} A; \Gamma) = \pm U^{\xi} C_{\lambda} \mathfrak{S}(A; \Gamma)$, wenn $C_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$, ξ reell,

(26) 2. $\mathfrak{S}(A; \Gamma) S = \mathfrak{S}(AS; S^{-1} \Gamma S)$, wenn S unimodular und reell,

(27) 3. $\mathfrak{S}(A; \Gamma) L_0 = \mathfrak{S}(A; \Gamma)$, wenn L_0 aus Γ.

Wir betrachten nun die folgenden Ausdrücke

$$H_r(\tau; \lambda; A, \Gamma; f) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{f(M\tau)}{\lambda(M)\,(m_1 \tau + m_2)^r}.$$

Hier wird über irgendein System $\mathfrak{S}(A)$ summiert. Das Summenzeichen ist zunächst nur im mengentheoretischen Sinne zu verstehen, d. h. es dient nur zur Zusammenfassung der Summenglieder. Von Konvergenz soll erst später die Rede sein. Unter $f(\tau)$ verstehen wir vorläufig eine im Innern der oberen Halbebene bis auf isolierte Singularitäten reguläre analytische Funktion. Wir wollen nun $f(\tau)$ und das Koeffizientensystem $\lambda(M)$ so bestimmen, daß

A) das einzelne Glied der Reihe sich nicht ändert, wenn M durch ein zu M nach der Gruppe $\mathfrak{Z}(U^{\vartheta})$ linksäquivalentes Element M' ersetzt wird;

B) eine Transformationsformel

$$\frac{H_r(L_0\tau; \lambda; A, \Gamma; f)}{v(L_0)\,(\gamma_0 \tau + \delta_0)^r} = H_r(\tau; \lambda; A, \Gamma; f)$$

für alle $L_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$ aus Γ erfüllt ist, wo $v(L_0)$ ein gegebenes Multiplikatorsystem bezeichnet[10]).

Danach wollen wir hinreichende Bedingungen für absolute Konvergenz dieser Reihen angeben.

Was zunächst die erste Forderung angeht, so ist zu verlangen, daß für jedes ganze h, alle τ in $\mathfrak{H}$ bis auf eine diskrete Ausnahmemenge und alle M in $\mathfrak{S}(A)$

$$\frac{f(\tau+\vartheta h)}{f(\tau)} = \frac{\lambda(U^{h\vartheta} M)}{\lambda(M)}$$

gelte. Offenbar genügt es, dies für $h = 1$ und alle M in $A\Gamma$ zu verlangen. Das heißt, daß

$$\frac{\lambda(U^{\vartheta} M)}{\lambda(M)} = \frac{f(\tau+\vartheta)}{f(\tau)} = e^{2\pi i \eta_0},$$

wo η_0 von M und τ unabhängig ist und die Ungleichung $0 \leqq \Re\, \eta_0 < 1$ erfüllt. Es ist also

$$f(\tau) = e^{2\pi i \frac{\tau}{\vartheta}\eta_0} F\left(e^{2\pi i \frac{\tau}{\vartheta}}\right),$$

wo $F(t)$ eine im Einheitskreise $|t| < 1$ bis auf isolierte Singularitäten reguläre analytische Funktion von t ist. Für die $\lambda(M)$ resultiert aus A) mithin die Gleichung

$$(28) \qquad \lambda(U^{h\vartheta} M) = e^{2\pi i h \eta_0} \lambda(M), \qquad M \subset A\Gamma.$$

Das allgemeine Glied der Reihe ist nun

$$\frac{e^{2\pi i \eta_0 \frac{M\tau}{\vartheta}} F\left(e^{2\pi i \frac{M\tau}{\vartheta}}\right)}{\lambda(M)\,(m_1\tau + m_2)^r}.$$

Hieraus wird, wenn wir τ durch $L_0\tau$ ersetzen und mit $\frac{1}{v(L_0)\,(\gamma_0\tau+\delta_0)^r}$ multiplizieren,

$$(29) \qquad \frac{e^{2\pi i \eta_0 \frac{M'\tau}{\vartheta}} F\left(e^{2\pi i \frac{M'\tau}{\vartheta}}\right)}{\sigma(M, L_0)\,\lambda(M)\,v(L_0)\,(m_1'\tau + m_2')^r},$$

wo $M' = ML$, $\underline{M}' = \{m_1', m_2'\}$.

Der Formel (29) entnehmen wir nun folgenden Sachverhalt. Damit ein Koeffizientensystem $\lambda(M)$ die Gleichung (28) befriedige und zugleich so beschaffen sei, daß die Forderung B) erfüllt wird, genügt es, zu verlangen, daß für alle M aus $A\Gamma$ und alle L_0 aus Γ neben (28) die Glei-

[10]) Diese Transformationsformel ist in rein formalem Sinne zu verstehen; sie bedeutet, daß in den „Summen" auf beiden Seiten der Gleichung dieselben Glieder auftreten.

chung $\lambda(ML_0) = \sigma(M, L_0)\,\lambda(M)\,v(L_0)$ besteht. Offenbar erhält man sämtliche Lösungen $\lambda(M)$ dieser Gleichung, wenn man mit beliebig gegebenem $\lambda(A)$ für $M = AL$

$$\lambda(M) = \sigma(A, L)\,\lambda(A)\,v(L)$$

setzt. Tatsächlich ergibt sich unter Benutzung von (11):

$$\begin{aligned}\lambda(ML_0) = \lambda(ALL_0) &= \sigma(A, LL_0)\,\lambda(A)\,\sigma(L, L_0)\,v(L)\,v(L_0)\\ &= \sigma(M, L_0)\,\lambda(M)\,v(L_0).\end{aligned}$$

Die so erreichte Fixierung von $\lambda(M)$ gestattet nun auch, (28) zu beweisen und die Größen η_0 zu bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}\lambda(U^{h\vartheta} M) = \lambda(AH^h L) &= \sigma(AH^h, L)\,\lambda(AH^h)\,v(L)\\ &= \sigma(A, L)\,\sigma(A, H^h)\,\lambda(A)\,v(H^h)\,v(L)\\ &= \lambda(M)\,\sigma(A, H^h)\,v(H^h) = \lambda(M)\,p_h,\end{aligned}$$

wo

$$p_h = \sigma(AH, H^{h-1})\,\sigma(A, H)\,v(H)\,v(H^{h-1}) = e^{2\pi i \varkappa(s)}\,p_{h-1} = e^{2\pi i h \varkappa(s)},$$

so daß $\eta_0 = \varkappa(s)$ folgt.

Wir ordnen jetzt jeder unimodularen Matrix $Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_3 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ einen Multiplikatorwert $v(Q)$ zu, und zwar auf folgende Weise: Wir wählen aus der Nebengruppe $Q\Gamma$ ein beliebiges, aber festes Element $B = \begin{pmatrix} b_0 & b_3 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ aus; es sei $Q = BL$, L aus Γ. Wir fixieren zunächst $v(B)$ als eine beliebige, von 0 verschiedene Zahl und setzen

$$v(Q) = \sigma(B, L)\,v(B)\,v(L).$$

Dann erkennt man, daß für alle unimodularen reellen Matrizen Q und alle L_0 aus Γ die Gleichung

$$\varrho(Q, L_0; v) = 1 \tag{30}$$

zutrifft. Man erkennt überdies: wenn ein (und damit jedes) Q von $B\Gamma$ die Eigenschaft hat, daß $-\frac{q_2}{q_1}$ parabolische Spitze von $\mathfrak{R}$ ist, so unterscheidet sich jedes wie oben gebildete Koeffizientensystem $\lambda(Q)$ nur um eine multiplikative Konstante von $v(Q)$.

Wir setzen jetzt

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A:\Gamma)} \frac{e^{2\pi i \frac{M\tau}{\vartheta}\varkappa(s)}\,F\left(e^{2\pi i \frac{M\tau}{\vartheta}}\right)}{v(M)\,(m_1\tau + m_2)^r}. \tag{31}$$

Es bestehen nun (im selben Sinne wie unter [10])) noch einige weitere Beziehungen zwischen diesen Reihen. Zunächst ist nach (25) für beliebiges

reelles ξ und positives λ

$$G_{-r}(\tau; v; \pm U^{\xi} C_{\lambda} A, \Gamma; F) = \frac{v(A)\, e^{2\pi i \frac{\lambda^2 \xi}{\vartheta} \varkappa}\, \sigma(\pm I, A)}{v(\pm U^{\xi} C_{\lambda} A)\, \lambda^r (\pm 1)^r} \cdot G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F^*),$$

wo

$$F^*(t) = F\left(t \cdot e^{2\pi i \frac{\lambda^2 \xi}{\vartheta}}\right).$$

Denn es ist

$$M^* \tau = (\pm U^{\xi} C_{\lambda} M)\, \tau = \frac{1}{\lambda^2} M \tau + \xi,$$

$$\begin{aligned} v(M^*)\,(m_1^* \tau + m_2^*)^r &= v(\pm U^{\xi} C_{\lambda} A L)\, \lambda^r (\pm m_1 \tau \pm m_2)^r \\ &= \frac{v(\pm U^{\xi} C_{\lambda} A)}{v(A)} \lambda^r \sigma(\pm A, L)\, v(A)\, v(L)\, (\pm m_1 \tau \pm m_2)^r \\ &= \frac{v(\pm U^{\xi} C_{\lambda} A)\, \lambda^r (\pm 1)^r}{v(A)\, \sigma(\pm I, A)} v(M)\, (m_1 \tau + m_2)^r. \end{aligned}$$

Wir bilden ferner für ein reelles unimodulares $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\frac{G_{-r}(S\tau; v; A, \Gamma; F)}{v(S)\,(c\tau + d)^r} = \sum_{M' \subset \mathfrak{S}(AS;\, S^{-1}\Gamma S)} \frac{e^{2\pi i \frac{M'\tau}{\vartheta} \varkappa}\, F\left(e^{2\pi i \frac{M'\tau}{\vartheta}}\right)}{\varrho(M, S)\, v(M')\, (m_1' \tau + m_2')^r},$$

wo $M' = MS$. Hier ist nach (24)

$$v(M')\, \varrho(M, S) = v(M')\, \varrho(M' S^{-1}, S) = v_S'(M')\, \varrho(S, M' S^{-1})$$

und

$$\varrho(S, M' S^{-1}) = \varrho(S, AL) = \varrho(S, A).$$

Daher kommt

$$(32) \qquad \frac{G_{-r}(S\tau; v; A, \Gamma; F)}{v(S)\,(c\tau + d)^r} = \frac{1}{\varrho(S, A)} G_{-r}(\tau; v_S'; AS, S^{-1}\Gamma S; F).$$

Wir gehen jetzt auf die Frage der Konvergenz dieser Reihen ein. Um Konvergenz zu erzielen, wird es, wie wir sehen werden, genügen, folgende Festsetzungen zu treffen: Es sei $r > 2$,

$$|v(L)| = 1 \quad \text{für alle } L \text{ aus } \Gamma,$$

$F(t)$ im Innern des t-Einheitskreises bis auf endlich viele Pole und auf dem Rande durchweg regulär in t.

Der Poincarésche Konvergenzbeweis für die Poincaréschen Reihen im Hauptkreisfalle liefert hier das Resultat:

$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F)$ ist eine in der oberen τ-Halbebene $\mathfrak{H}$ mit möglicher Ausnahme einer diskreten Menge von Polen reguläre analytische Funktion von τ. Die Ausnahmemenge besteht ersichtlich höchstens aus der Vereinigungsmenge der Pole der einzelnen Glieder von $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F)$.

Zur Untersuchung des Verhaltens von $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F)$ im Innern von $\mathfrak{H}$ genügt es offenbar, den Fall

$$F(t) = R(t) = \frac{t^m}{(t-q)^g}$$

durchzudiskutieren, wo $g \geqq 0$ und m ganze rationale und $q = e^{2\pi i \frac{\omega}{\vartheta}}$ eine komplexe Zahl mit $|q| \neq 1$ bezeichnen. Die Pole von $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$ liegen ersichtlich, falls sie in $\mathfrak{H}$ überhaupt vorhanden sind, bei den Punkten $LA^{-1}\omega$, wo L die Gruppe Γ durchläuft. Es ist indessen zu bemerken, daß, wenn $-I$ in Γ liegt oder wenn $\omega_0 = A^{-1}\omega$ elliptischer Fixpunkt der Gruppe ist, stets mehrere Glieder in der Reihe $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F)$ denselben Pol haben. Der Koeffizient des niedrigsten nicht verschwindenden Gliedes in der Entwicklung von

$$W_M = \frac{e^{2\pi i (m+\varkappa)\frac{M\tau}{\vartheta}}}{v(M)\,(m_1\tau + m_2)^r \left(e^{2\pi i \frac{M\tau}{\vartheta}} - e^{2\pi i \frac{\omega}{\vartheta}}\right)^g}$$

nach Potenzen von $\tau - \omega_1 = \tau - M^{-1}\omega$ ist

$$\left(\frac{\vartheta}{2\pi i}\right)^g \frac{e^{2\pi i (m+\varkappa-g)\frac{\omega}{\vartheta}}}{v(M)\,(m_1\omega_1 + m_2)^{r-2g}}.$$

Wenn nun zunächst $-I$ in Γ liegt und ω_0 nicht elliptischer Fixpunkt der Gruppe ist, so ist

$$W_M = v(-I)\,(-1)^r\, W_{-M}$$

und das ist $= W_{-M}$, wenn es überhaupt eine Form der Dimension $-r$ für das Multiplikatorsystem $v(L)$ und die Gruppe Γ gibt. Es genügt offenbar, von dem Multiplikator zu verlangen, daß $v(-I)\,(-1)^r = 1$. Hier hebt sich der Pol also nicht heraus. Wenn aber ω_0 elliptischer Fixpunkt der Gruppe ist, dann sei E das erzeugende Element in der zyklischen Gruppe der Matrizen von Γ, welche ω_1 festlassen, n die kleinste natürliche Zahl, für die $E^n = I$. Es ist nun

$$\begin{aligned} v(M)\,(m_1\omega_1 + m_2)^{r-2g} &= v(M)\,(m_1 E\omega_1 + m_2)^{r-2g} \\ &= \frac{v(M')\,(m_1'\omega_1 + m_2')^{r-2g}}{v(E)\,(e_1\omega_1 + e_2)^{r-2g}}, \end{aligned}$$

wo $M' = ME$ und $\underline{E} = \{e_1, e_2\}$, also

$$\frac{1}{v(M')\,(m_1'\omega_1 + m_2')^{r-2g}} = \frac{1}{v(M)\,(m_1\omega_1 + m_2)^{r-2g}} \; \frac{1}{v(E)\,(e_1\omega_1 + e_2)^{r-2g}}.$$

Hieraus folgt

$$\{v(E)\,(e_1\omega_1 + e_2)^{r-2g}\}^n = 1.$$

Man sieht also, der Pol hebt sich dann und nur dann heraus, wenn

$$v(E)\,(e_1\omega_1+e_2)^{r-2g}\neq 1$$

ist. Wenn es nun überhaupt eine automorphe Form gibt, welche im Punkte $\tau=\omega_1$ einen Pol der Ordnung g besitzt, dann muß

$$v(E)\,(e_1\omega_1+e_2)^{r-2g}=1$$

sein; denn aus

$$f(\tau)=\frac{c}{(\tau-\omega_1)^g}+\{(\tau-\omega_1)^{-g+1}\}$$

folgt

$$f(E\tau)=\frac{c}{(E\tau-E\omega_1)^g}+\{(E\tau-E\omega_1)^{-g+1}\}=\frac{c\,(e_1\omega_1+e_2)^{2g}}{(\tau-\omega_1)^g}+\{(\tau-\omega_1)^{-g+1}\}$$
$$(c\neq 0).$$

Andererseits ist

$$f(E\tau)=v(E)(e_1\tau+e_2)^r f(\tau)=\frac{c\,v(E)\,(e_1\omega_1+e_2)^r}{(\tau-\omega_1)^g}+\{(\tau-\omega_1)^{-g+1}\},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

Insgesamt erkennt man nun:

$G_{-r}(\tau;v;A,\Gamma;R)$ besitzt nur dann Pole in $\mathfrak{H}$, wenn $|q|<1$ und $g>0$ ist. Sobald das zutrifft, hat $G_{-r}(\tau;v;A,\Gamma;R)$ in den Punkten $LA^{-1}\omega$, wo L die Gruppe Γ durchläuft, und nur in diesen Punkten je einen Pol von der Ordnung g, wenn nicht gerade $A^{-1}\omega$ elliptischer Fixpunkt ist. In diesem Falle gilt aber das gleiche, wenn es überhaupt eine automorphe Form der Dimension $-r$ und des Multiplikatorsystems $v(L)$ gibt, die in den Punkten $LA^{-1}\omega$ einen Pol von der Ordnung g hat.

Zum Nachweise, daß $G_{-r}(\tau;v;A,\Gamma;F)$ wirklich eine automorphe Form ist, bedarf es noch einer Untersuchung über das Verhalten der Funktion in den parabolischen Spitzen der Gruppe. Wegen (32) genügt es, dies für die Spitze ∞ durchzuführen. Der Beweis läßt sich am einfachsten so anordnen:

Nach Poincaré konvergiert die Reihe $\sum\limits_{M\subset\mathfrak{S}(A)}\frac{1}{|m_1\tau+m_2|^r}$ in jedem abgeschlossenen Teil $\mathfrak{B}$ der oberen τ-Halbebene gleichmäßig. Es gilt nun für alle τ mit $\mathfrak{Im}\,\tau>1$, welche in irgendeinem Vertikalstreifen von beschränkter Breite liegen, eine Abschätzung

$$\frac{1}{|m_1\tau+m_2|^2}\leqq C\,\frac{1}{m_1^2+m_2^2},$$

wo C eine feste Konstante ist, welche von τ nicht mehr abhängt. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Einteilung der

$$\sum_{\substack{M\subset\mathfrak{S}(A)\\ m_1\neq 0}}\frac{1}{|m_1\tau+m_2|^r}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2$$

in zwei Teile $\sum_1$ und $\sum_2$, wo $\sum_1$ nur endlich viele Glieder enthält, und

$$\sum_2 < \varepsilon,$$

für alle τ mit $\mathfrak{Im}\,\tau > 1$, welche im Streifen liegen. Da nun $\sum_1 < \varepsilon$ für alle τ mit hinreichend großem Imaginärteil, so strebt

$$\sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{1}{|m_1\tau + m_2|^r} \to 0,$$

wenn τ im Streifen gegen ∞ geht.

Unter den Elementen M von $\mathfrak{S}(A)$ findet sich dann und nur dann eines mit $m_1 = 0$, d. h. $M = \pm U^\xi C_\lambda$, wenn es ein L in Γ gibt, so daß

$$AL = \pm U^\xi C_\lambda.$$

Nach Definition des Systems $\mathfrak{S}(A)$ kann es höchstens ein solches M in $\mathfrak{S}(A)$ geben. Sind nämlich

$$M = AL = \pm U^\xi C_\lambda, \qquad M' = AL' = \pm U^{\xi'} C_{\lambda'}$$

zwei solche Elemente aus $A\Gamma$, so ist offenbar

$$Q = M'M^{-1} = \pm U^{\xi'} C_{\lambda'} C_\lambda^{-1} U^{-\xi} = \pm U^\eta C_\mu$$

mit gewissem positivem μ und reellem η. Falls $\mu \neq 1$, ergibt sich für alle ganzen rationalen n

$$Q^n\tau = \varrho + \frac{\tau - \varrho}{\mu^{2n}}, \qquad \varrho = \frac{\eta\mu^2}{\mu^2 - 1}.$$

Andererseits ist ∞ parabolische Spitze für die Gruppe $A\Gamma A^{-1}$, in der die sämtlichen Q^n, n ganz rational, enthalten sind. Die Betrachtung der Fundamentalbereiche der beiden Gruppen $A\Gamma A^{-1}$ und $\mathfrak{Z}(Q)$ lehrt, daß hier ein Widerspruch vorliegt. Also muß $\mu = 1$ sein. Damit ist auch die Behauptung über die Systeme $\mathfrak{S}(A)$ ersichtlich bewiesen.

Wenn nun ein Element $\pm U^\xi C_\lambda$ in $\mathfrak{S}(A)$ enthalten ist, so ist $A\Gamma = \pm U^\xi C_\lambda \Gamma$, und wir können $A = \pm U^\xi C_\lambda$ annehmen. Um das Verhalten von $G_{-r}(\tau)$ in der Spitze ∞ zu untersuchen, betrachten wir

$$g(\tau) = (\pm\lambda)^r G_{-r}(\tau).$$

Das der Matrix $A = \pm U^\xi C_\lambda$ zugeordnete H ist

$$C_\lambda^{-1} U^\vartheta C_\lambda = U^{\lambda^2\vartheta}.$$

Daher hat man das Verhalten von $G_{-r}(\tau)$ bei Ausübung der Substitution $U^{\lambda^2\vartheta}$ zu prüfen.

Nun ist das Glied der Reihe $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F)$, dessen $M = \pm U^\xi C_\lambda$,

$$\mathfrak{E}(\tau) = \frac{e^{2\pi i\left(\frac{\tau}{\lambda^2\vartheta} + \frac{\xi}{\vartheta}\right)\varkappa} F\left(e^{2\pi i\left(\frac{\tau}{\lambda^2\vartheta} + \frac{\xi}{\vartheta}\right)}\right)}{v(\pm U^\xi C_\lambda)(\pm\lambda)^r}.$$

Wir setzen $\mathfrak{E}(\tau)=0$, wenn es kein Element $\pm U^{\xi} C_{\lambda}$ in $\mathfrak{S}(A)$ gibt; offenbar gilt

$$\mathfrak{E}(U^{\lambda^2\vartheta}\tau)=e^{2\pi i\varkappa}\mathfrak{E}(\tau)$$

und daher

$$(\pm\lambda)^r\mathfrak{E}(\tau)=e^{2\pi i\frac{\tau}{\lambda^2\vartheta}\varkappa}\,\mathfrak{P}_0\left(e^{2\pi i\frac{\tau}{\lambda^2\vartheta}}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_0(t)$ eine bei $t=0$, eventuell mit einziger Ausnahme des Punktes $t=0$ selbst konvergente Potenzreihe bezeichnet. Wenn

$$F(t)=R(t)=\frac{t^m}{(t-q)^g},$$

so ist die niedrigste nicht verschwindende t-Potenz in $\mathfrak{P}_0(t)$ gleich t^m. Nach dem Obigen verschwindet

$$G_{-r}(\tau;v;A,\Gamma;F)-\mathfrak{E}(\tau),$$

wenn τ unter Vermeidung der Pole von G_{-r} im Streifen $\to\infty$ geht. Daraus folgt nun, daß die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}^*(t)=\mathfrak{P}_A(t;G_{-r}(\tau;v;A,\Gamma;F))-\mathfrak{P}_0(t)$$

im Punkte $t=0$ regulär sein und verschwinden muß. Denn

$$e^{2\pi i\varkappa\frac{\tau}{\lambda^2\vartheta}}\,\mathfrak{P}^*\left(e^{2\pi i\frac{\tau}{\lambda^2\vartheta}}\right)$$

verschwindet, wenn τ im Streifen $\to\infty$ geht. Da aber $0\leqq\varkappa<1$, so kann ersichtlich $\mathfrak{P}^*(t)$ zunächst keinen Pol endlicher Ordnung bei $t=0$ besitzen. Enthielte $\mathfrak{P}^*(t)$ unendlich viele Glieder mit negativen Exponenten, so gälte das gleiche für die Potenzreihe

$$t\,\mathfrak{P}^*(t)=e^{2\pi i\varkappa\frac{\tau}{\lambda^2\vartheta}}\,\mathfrak{P}^*\left(e^{2\pi i\frac{\tau}{\lambda^2\vartheta}}\right)e^{2\pi i(1-\varkappa)\frac{\tau}{\lambda^2\vartheta}},$$

die jedoch, wie man sieht, auch $\to 0$ geht, wenn τ im Streifen $\to\infty$. Das steht im Widerspruch mit der Aussage, daß $t\,\mathfrak{P}^*(t)$ bei $t=0$ wesentlich singulär ist.

So erkennen wir zusammenfassend:

Satz 1. Die sämtlichen Funktionen

$$G_{-r}(\tau;v;A,\Gamma;F)$$

sind automorphe Formen $(-r)$-ter Dimension für die Gruppe Γ und das Multiplikatorsystem $v(L)$. Über das Verhalten der einzelnen Funktion

$$G_{-r}(\tau;v;A,\Gamma;F)$$

gelten folgende Aussagen:

1. Wenn $F(t)$ im Innern und auf dem Rande des t-Einheitskreises regulär ist, so ist $G_{-r}(\tau;v;A,\Gamma;F)$ in $\mathfrak{H}$ regulär. $G_{-r}(\tau;v;A,\Gamma;F)$

hat, wenn $|q| < 1$ und $g > 0$, und wenn nicht gerade $A^{-1}\omega$ elliptischer Fixpunkt von Γ ist, in den zu $A^{-1}\omega$ nach der Gruppe Γ äquivalenten Punkten je einen Pol der Ordnung g und ist sonst in $\mathfrak{H}$ regulär. Wenn $A^{-1}\omega$ elliptischer Fixpunkt von Γ ist, so gilt das gleiche dann und nur dann, wenn es für das Multiplikatorsystem $v(L)$ überhaupt eine automorphe Form der Dimension $-r$ gibt, die in $A^{-1}\omega$ einen Pol der Ordnung g hat.

2. Die Potenzreihe $\mathfrak{P}_S(t; G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F))$ ist bei $t = 0$ regulär und verschwindet dort für alle Spitzen s, für welche nicht

$$AL = \pm U^{\xi} C_{\lambda} S$$

für ein L aus Γ, ein reelles ξ und ein positives λ erfüllt ist. Dabei ist S eine unimodulare reelle Matrix mit $S(s) = \infty$.

In denjenigen Spitzen s, für welche

$$AL = \pm U^{\xi} C_{\lambda} S$$

für ein L aus Γ, ein reelles ξ und ein positives λ erfüllt ist, ist die niedrigste nicht verschwindende t-Potenz in

$$\mathfrak{P}_S(t; G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R))$$

gleich t^m, wenn $m < 0$, oder wenn $m = 0$ und zugleich die der Spitze s zugeordnete reelle Zahl $\varkappa(s) = 0$ ist.

In den anderen Fällen kann man, falls auch noch $g = 0$ oder $|q| > 1$ ist, überhaupt nicht unmittelbar sehen, daß

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$$

nicht identisch verschwindet. Jedenfalls ist dann

$$\mathfrak{P}_S(t; G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R))$$

bei $t = 0$ regulär und verschwindet für $t = 0$.

§ 3.

Wir haben im § 2 gesehen, daß es zur Konstruktion von automorphen Formen ausreicht, ein Multiplikatorsystem $v(L)$ anzugeben, welches die Eigenschaft hat, daß

$$v(L_1 L_2) = \sigma^{(r)}(L_1, L_2)\, v(L_1)\, v(L_2)$$

für alle L_1, L_2 aus Γ, und daß $|v(L)| = 1$ für alle L aus Γ erfüllt ist.

Man kann nun, um solche Multiplikatoren aufzustellen, zwei Wege einschlagen. Der erste, den wir nur ganz kurz skizzieren wollen, benutzt die Eigenschaften der in § 1 eingeführten Funktion $\mu(L)$. Wir nehmen an, es sei möglich, einem jeden Element L von Γ eindeutig einen Weg auf $\mathfrak{F}_r'$ zuzuordnen, welcher ω_2 mit $L\omega_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$ verbindet (wobei Wege mit demselben Anfangs- und Endpunkt als nicht verschieden an-

gesehen werden), derart, daß der dem Produkt $L_1 L_2$ zugeordnete Weg durch Anhängen des L_1-Weges an den L_2-Weg entsteht. Dann ist

$$v(L) = \mu(L),$$

wo die Funktion rechts mit dem der Matrix L zugeordneten Wege zu bilden ist, offenbar ein brauchbarer Multiplikator, für den auch stets $|v(L)| = 1$ ist.

Um jetzt ein solches System von Wegen zu konstruieren, müssen wir darauf Rücksicht nehmen, daß sich im allgemeinen jedes Element der Gruppe auf mehr als eine Weise durch die Erzeugenden darstellen läßt. Man zeigt aber leicht, daß es ausreicht, die den Erzeugenden zugeordneten Wege so zu bestimmen, daß die Relationen erfüllt sind, d. h. daß die Wege, die sich durch Aneinanderhängen der den Erzeugenden zugeordneten Wege für beide Seiten einer Relation ergeben, stets gleich sind. Wir setzen hier der Einfachheit halber voraus, daß die Anzahl der Erzeugenden von Γ endlich sei. Dann lassen sich diese Erzeugenden so wählen, daß die Relationen folgende Gestalt annehmen[11]):

$$(33_i) \qquad E_i^{l_i} = \pm I, \quad 1 \leqq i \leqq e_0,$$

$$(34) \qquad \prod_{i=1}^{\sigma+e_0} P_i \prod_{i=1}^{p} G_i H_i G_i^{-1} H_i^{-1} = \pm I.$$

Hier sind die E_i die sämtlichen e_0 elliptischen, P_i die sämtlichen $\sigma + e_0$ parabolischen und elliptischen Erzeugenden, und die G_i, H_i entsprechen den Überschreitungen eines der p Paare konjugierter Rückkehrschnitte; l_i bezeichnet die (inhomogen gemessene) Ordnung der Substitution E_i. — Ferner wissen wir, daß $v(-I)$ durch die Bedeutung von v stets eindeutig bestimmt ist, denn es gilt, falls die Matrix $-I$ in Γ enthalten ist,

$$f((-I)\tau) = f(\tau) = v(-I)(-1)^r f(\tau), \quad \text{also} \quad v(-I) = e^{-\pi i r}.$$

Was nun die Möglichkeit angeht, ein System von Wegen für die Erzeugenden anzugeben, so daß die Relationen erfüllt sind, so ist daher zu bemerken, daß dies sicherlich dann nicht möglich ist, wenn $-I$ in Γ vorkommt, und wenn dabei die Zahl $e^{-\pi i r}$ nicht von der Form $e^{2\pi i \nu r}$ mit ganzem rationalem ν ist (d. h. wenn nicht r rational und $k \equiv 1 \pmod 2$). Wenn wir diese Fälle gleich ausschließen, so zeigt sich, daß man, falls erforderlich, einen Weg für das Element $-I$ angeben kann, so daß für diesen Weg $\mu(-I) = e^{-\pi i r}$ ist. Aber es braucht trotzdem keiner der dem Element E_i zugeordneten Wege auf $\mathfrak{F}_r'$ so beschaffen zu sein, daß die Relation (33_i) erfüllt ist. Bezeichnet nämlich δ_k den Argumentzuwachs

[11]) Ritter II, Teil III.

längs eines solchen E_i-Weges, der von $E_i^h \omega_2$ nach $E_i^{h+1}\omega_2$ führt, so ist $\sum_{h=0}^{l_i-1} \delta_h \equiv g_i \pmod k$ die Bedingung dafür, daß die Relation (33_i) erfüllt ist, wo g_i eine gegebene ganze Zahl bedeutet; diese Kongruenz braucht keineswegs immer lösbar zu sein. Wenn aber die Relationen (33_i) gar nicht bestehen, und man, falls erforderlich, einen brauchbaren Weg für $-I$ finden kann, oder wenn es andernfalls möglich ist, die Wege für $-I$ und die E_i so zu wählen, daß die Relationen (33_i) erfüllt sind, so ist von hier ab alles in Ordnung. Wir können nämlich die Relation (34) durch Transformation so umformen, daß die linke Seite mit einer parabolischen Substitution P beginnt. Und nun kann man die Wege für die G_i, H_i, $1 \leqq i \leqq p$, beliebig vorschreiben, desgleichen die Wege der sämtlichen $\sigma - 1$ parabolischen Erzeugenden, welche von P verschieden sind. Die Relation (34) bestimmt jetzt den Weg von P eindeutig. Die Anzahl der verschiedenen Wegsysteme und damit der verschiedenen Multiplikatoren, die man so erhält, ist, wenn r rational, ein von 0 verschiedenes ganzes Vielfaches von $k^{2p+\sigma-1}$

Eine einfache Betrachtung zeigt, daß die Hauptkongruenzgruppe N-ter Stufe $\Gamma(N)$ für $N > 1$ keine elliptischen Fixpunkte besitzt. Auch ist für $N > 2$ das Element $-I$ nicht in der $\Gamma(N)$ enthalten (als diese bezeichnen wir mit Rücksicht auf § 1 konsequenterweise die Gruppe der unimodularen ganzzahligen Matrizen $L = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, welche der Identität $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \bmod N$ kongruent sind). Die eben auseinandergesetzte Methode, Multiplikatoren von der Form $e^{2\pi i r}$ aufzustellen, ist daher auf die $\Gamma(N)$ mit $N > 2$ anwendbar, liefert dagegen im Falle $N = 1$ kein Resultat. Im Falle $N > 2$ besteht eine einzige Relation, nämlich

$$\prod_{i=1}^{\sigma} P_i \prod_{i=1}^{p} G_i H_i G_i^{-1} H_i^{-1} = I,$$

im Falle $N = 2$ gilt bei geeigneter Wahl der P_i ebenfalls diese Relation und daneben als einzige weitere Relation die Gleichung $(-I)^2 = I$. Im Falle $N = 1$ dagegen ist die Lösbarkeit der den Relationen entsprechenden Gleichungen für die Multiplikatoren nicht ohne weiteres einzusehen.

Die zweite Methode zur Aufstellung der Multiplikatoren ist rein algebraisch. Wir betrachten zunächst das Symbol $\sigma(M, S)$ und gehen jetzt daran, ein entsprechendes Symbol aufzustellen, welches gestattet, $v(L_1 L_2 \ldots L_n)$ durch das Produkt $v(L_1) v(L_2) \ldots v(L_n)$ auszudrücken. Es seien im folgenden $M_1, M_2, \ldots$ beliebige unimodulare Matrizen mit reellen Elementen.

Wir definieren

$$\sigma_1(M_1) \qquad = 1,$$
$$\sigma_2(M_1, M_2) \quad = \sigma(M_1, M_2),$$
$$\sigma_3(M_1, M_2, M_3) = \sigma(M_1 M_2, M_3)\,\sigma(M_1, M_2),$$

allgemein für $n \geqq 3$

$$\sigma_n(M_1, M_2, \ldots, M_n)$$
$$= \sigma_m(M_1, M_2, \ldots, M_m)\,\sigma_{n-m}(M_{m+1}, \ldots, M_n)\,\sigma_2(M_1 M_2 \ldots M_m, M_{m+1} \ldots M_n),$$

wo $1 \leqq m \leqq n-1$. Man erkennt durch vollständige Induktion leicht, daß σ_n von m nicht abhängt. Denn für $1 \leqq m \leqq n-2$ ist

$$\begin{aligned}
&\sigma_{m+1}(M_1, \ldots, M_{m+1})\,\sigma_{n-m-1}(M_{m+2}, \ldots, M_n)\,\sigma_2(M_1 \ldots M_{m+1}, M_{m+2} \ldots M_n)\\
&\quad = \sigma_m(M_1, \ldots, M_m)\,\sigma_2(M_1 \ldots M_m, M_{m+1})\\
&\qquad \times \sigma_{n-m-1}(M_{m+2}, \ldots, M_n)\,\sigma_2(M_1 \ldots M_{m+1}, M_{m+2} \ldots M_n)\\
&\quad = \sigma_m(M_1, \ldots, M_m)\,\sigma_2(M_1 \ldots M_m, M_{m+1} \ldots M_n)\\
&\qquad \times \sigma_2(M_{m+1}, M_{m+2} \ldots M_n)\,\sigma_{n-m-1}(M_{m+2}, \ldots, M_n)\\
&\quad = \sigma_n(M_1, \ldots, M_n).
\end{aligned}$$

Wir beweisen gleich noch eine allgemeinere Formel. Seien die Matrizen $M_j^{(i)}$ für $1 \leqq j \leqq m_i$, $1 \leqq i \leqq \nu$ gegeben, $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu$. Wir setzen zur Abkürzung

$$T_i = M_1^{(i)} M_2^{(i)} \ldots M_{m_i}^{(i)},$$
$$\sigma_{m_i}(M^{(i)}) = \sigma_{m_i}(M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \ldots, M_{m_i}^{(i)}),$$
$$M_j = M_j^{(1)},\ 1 \leqq j \leqq m_1; \qquad M_{m_1+\ldots+m_{i-1}+j} = M_j^{(i)} \quad \text{für} \quad i > 1,\ 1 \leqq j \leqq m_i.$$

Dann gilt folgende Formel

$$\sigma_n(M_1, \ldots, M_n) = \sigma_{m_1}(M^{(1)})\,\sigma_{m_2}(M^{(2)}) \ldots \sigma_{m_\nu}(M^{(\nu)})\,\sigma_\nu(T_1, \ldots, T_\nu). \tag{35}$$

Für $\nu = 2$ und für jedes n ist die Formel bewiesen. Wir wenden wieder vollständige Induktion an und beweisen, daß die Formel richtig bleibt, wenn man die gegebene Einteilung der Matrizen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ in die ν Gruppen durch Unterteilung verfeinert. Es sei also $m_\nu = m'_\nu + m'_{\nu+1}$, $m'_\nu > 0$, $m'_{\nu+1} > 0$,

$$M_j^{(\nu)} = M_j'^{(\nu)} \qquad \text{für} \quad 1 \leqq j \leqq m'_\nu,$$
$$M_j^{(\nu)} = M_j'^{(\nu+1)} \qquad \text{für} \quad m'_\nu + 1 \leqq j \leqq m'_\nu + m'_{\nu+1}.$$

Dann gilt in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\sigma_{m_\nu}(M^{(\nu)}) = \sigma_{m'_\nu}(M'^{(\nu)})\,\sigma_{m'_{\nu+1}}(M'^{(\nu+1)})\,\sigma_2(T'_\nu, T'_{\nu+1})$$

und

$$\sigma_\nu(T_1, \ldots, T_{\nu-1}, T'_\nu T'_{\nu+1})\,\sigma_2(T'_\nu, T'_{\nu+1})$$

$$= \sigma_{\nu-1}(T_1, \ldots, T_{\nu-1})\,\sigma_2(T_1 \ldots T_{\nu-1}, T'_\nu T'_{\nu+1})\,\sigma_2(T'_\nu, T'_{\nu+1})$$

$$= \sigma_{\nu+1}(T_1, \ldots, T_{\nu-1}, T'_\nu, T'_{\nu+1}).$$

Damit ist der Induktionsbeweis geführt und die Formel (35) als richtig erkannt.

Man sieht jetzt: Wenn $v(M)$ eine solche Funktion der Matrix M ist, daß

$$v(M_i M_k) = \sigma(M_i, M_k)\,v(M_i)\,v(M_k),$$

so ist

$$v(M_1 M_2 \ldots M_n) = \sigma_n(M_1, \ldots, M_n)\,v(M_1) \ldots v(M_n). \tag{36}$$

Wir lassen von nun an die Annahme, daß Γ endlich viele Erzeugende besitzt, fallen. Es seien

$$A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$$

die Erzeugenden von Γ. Die Relationen zwischen den Erzeugenden schreiben wir in der Form

$$R_i = I,$$

wo R_i für $i = 1, 2, \ldots$ einen Ausdruck in den A_ν und den A_ν^{-1} darstellt. Ist nun zunächst $v(L)$ ein Multiplikator, so läßt sich nach (36) $v(L)$ stets mit Hilfe des verallgemeinerten σ-Symbols durch die $v(A_\nu)$ und die $v(A_\nu^{-1})$ ausdrücken. Es gilt dann insbesondere

$$\overline{R}_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

wo $\overline{R}_i = v(R_i)$ der Ausdruck in den $v(A_\nu)$ ist, der entsteht, wenn man $v(R_i)$ auf die eben beschriebene Weise ausrechnet. Dabei wollen wir nachträglich auch stets die $v(A_\nu^{-1})$ mit Hilfe der Gleichung

$$v(A_\nu)\,v(A_\nu^{-1})\,\sigma(A_\nu, A_\nu^{-1}) = 1$$

durch die $v(A_\nu)$ ausdrücken.

Um jetzt ein Multiplikatorsystem aufzustellen, denken wir uns die Größen $v(A_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, irgendwie, aber so gewählt, daß die Gleichungen $\overline{R}_i = 1$ für $i = 1, 2, \ldots$ erfüllt sind. Hat nun ein beliebiges Element L von Γ die Gestalt

$$L = K_1 K_2 \ldots K_n,$$

wo die K_j unter den A_ν und den A_ν^{-1} enthalten sind, so definieren wir allgemein

$$v(L) = \sigma_n(K_1, \ldots, K_n)\,v(K_1) \ldots v(K_n). \tag{37}$$

Wenn $L' = K_{n+1} \ldots K_{n+q}$ eine Darstellung von L' durch die A_ν und A_ν^{-1} ist, so wird

$$v(LL') = \sigma_{n+q}(K_1, \ldots, K_{n+q})\, v(K_1) \ldots v(K_{n+q})$$
$$= \sigma_3(K_1 \ldots K_n, K_{n+1} \ldots K_{n+q})$$
$$\times \sigma_n(K_1, \ldots, K_n)\, \sigma_q(K_{n+1}, \ldots, K_{n+q})\, v(K_1) \ldots v(K_{n+q})$$
$$= \sigma(L, L')\, v(L)\, v(L').$$

Es ist also, um auf diese Weise einen Multiplikator zu erhalten, nur nötig, festzustellen, daß $v(L)$ nicht davon abhängt, wie man L als Ausdruck in den Erzeugenden schreibt. Seien

$$L = Q_1, \quad L = Q_2$$

zwei verschiedene Ausdrücke von L in den A_ν und den A_ν^{-1}. Dann läßt sich Q_2 durch mehrmaliges Einfügen von Faktoren der Form $A_\nu A_\nu^{-1}$ und $A_\nu^{-1} A_\nu$ auf die Gestalt $Q_1 Q_1^{-1} Q_2$ bringen. Hier gilt $Q_1^{-1} Q_2 = I$, d. h. der Ausdruck von $Q_1^{-1} Q_2$ in den A_ν, A_ν^{-1} ist nach einem bekannten Satze der Gruppentheorie[12]) mit einem Produkt von Transformierten $T_i R_i T_i^{-1}$ von endlich vielen der Ausdrücke R_i identisch, wo die T_i beliebige Produkte der A_ν und A_ν^{-1} sein können. Um jetzt den gewünschten Nachweis zu erbringen, genügt es, zu zeigen: Wenn man in einem Produkt L von Erzeugenden von Γ und deren Inversen an einer Stelle einen Ausdruck $T_i R_i T_i^{-1}$ einfügt, so ändert sich das nach der obigen Definition (37) zu berechnende Symbol $v(L)$ dadurch nicht. Sei nämlich $L = Q = Q'$, wo

$$Q = D_1 \ldots D_n D_{n+1} \ldots D_{n+q},$$
$$Q' = D_1 \ldots D_n T_i R_i T_i^{-1} D_{n+1} \ldots D_{n+q}.$$

Darin bedeuten die $D_1, D_2, \ldots, D_{n+q}$ gewisse der Erzeugenden A_ν und ihrer Inversen. Dann gilt nach dem Vorangehenden zunächst

$$v(Q') = \sigma_3(D_1 \ldots D_n, T_i R_i T_i^{-1}, D_{n+1} \ldots D_{n+q})$$
$$\times v(D_1 \ldots D_n)\, v(T_i R_i T_i^{-1})\, v(D_{n+1} \ldots D_{n+q})$$
$$= \sigma(D_1 \ldots D_n, D_{n+1} \ldots D_{n+q})$$
$$\times v(D_1 \ldots D_n)\, v(D_{n+1} \ldots D_{n+q})\, v(T_i R_i T_i^{-1})$$
$$= v(Q)\, v(T_i R_i T_i^{-1}).$$

Nun ist aber nach Konstruktion

$$v(T_i R_i T_i^{-1}) = \sigma_3(T_i, R_i, T_i^{-1})\, v(T_i)\, v(R_i)\, v(T_i^{-1})$$
$$= \sigma(T_i, T_i^{-1})\, v(T_i)\, v(T_i^{-1}).$$

Hier darf man nicht unmittelbar schließen, daß der zuletzt erhaltene Ausdruck $= 1$ ist. Man kann das jedoch folgendermaßen einsehen:

---

[12]) O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Hamburger Abhandlungen 5, S. 161.

Sei etwa $T_i = B_1 B_2 \dots B_\nu$ der Ausdruck von T_i durch die Erzeugenden von Γ und ihre Inversen. Dann ist

$$\sigma(T_i, T_i^{-1})\, v(T_i)\, v(T_i^{-1})$$
$$= \sigma(T_i, T_i^{-1})\, \sigma_\nu(B_1, \dots, B_\nu)\, \sigma_\nu(B_\nu^{-1}, \dots, B_1^{-1})\, v(B_1)\, v(B_1^{-1}) \dots v(B_\nu)\, v(B_\nu^{-1})$$
$$= \frac{\sigma_{2\nu}(B_1, \dots, B_\nu, B_\nu^{-1}, \dots, B_1^{-1})}{\sigma(B_1, B_1^{-1}) \dots \sigma(B_\nu, B_\nu^{-1})}.$$

Hier ist der Zähler gleich

$$\sigma_{\nu-1}(B_1, \dots, B_{\nu-1})\, \sigma_2(B_\nu, B_\nu^{-1})\, \sigma_{\nu-1}(B_{\nu-1}^{-1}, \dots, B_1^{-1})\, \sigma_2(B_1 \dots B_{\nu-1}, B_{\nu-1}^{-1} \dots B_1^{-1})$$
$$= \sigma_{2\nu-2}(B_1, \dots, B_{\nu-1}, B_{\nu-1}^{-1}, \dots, B_1^{-1})\, \sigma(B_\nu, B_\nu^{-1}),$$

und danach wird

$$\sigma_{2\nu}(B_1, \dots, B_\nu, B_\nu^{-1}, \dots, B_1^{-1}) = \sigma(B_1, B_1^{-1}) \dots \sigma(B_\nu, B_\nu^{-1}),$$

also tatsächlich

$$\sigma(T_i, T_i^{-1})\, v(T_i)\, v(T_i^{-1}) = 1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wenn die Gruppe Γ durch endlich viele Elemente erzeugt wird, so kann man diese so wählen, daß die Relationen die Gestalt (33_i) und (34) annehmen. Zu diesen Relationen tritt unter Umständen noch die Beziehung $(-I)^2 = I$. Man bemerke nun zunächst, daß die der Relation $(-I)^2 = I$ entsprechende Gleichung

$$\sigma(-I, -I)\, v(-I)^2 = 1$$

für den Wert $v(-I) = e^{-\pi i r}$ erfüllt ist. Denn es ist

$$(-1)^r = \sigma(-I, -I)\frac{1}{(-1)^r}, \quad \text{also} \quad \sigma(-I, -I) = e^{2\pi i r}.$$

Die den Relationen (33_j) entsprechenden Gleichungen für die $v(A_\nu)$ sind nun

(38) $$\sigma_{l_j}(E_j, E_j, \dots, E_j)\, v(E_j)^{l_j} = v(\pm I), \qquad 1 \leqq j \leqq e_0.$$

Die j-te Gleichung hat hier genau l_j Lösungen $v(E_j)$, welche alle von der Gestalt $e^{\pi i \frac{r}{l_j} \nu}$ sind, wo ν eine ganze rationale Zahl bezeichnet. Die der Relation (34) entsprechende Gleichung kann man nach dem Vorangehenden auf folgende Weise aufstellen. Wir erhalten:

$$\sigma_{\sigma+e_0+p}(P_1, \dots, P_{\sigma+e_0}, G_1 H_1 G_1^{-1} H_1^{-1}, \dots, G_p H_p G_p^{-1} H_p^{-1})$$
$$\times \prod_{i=1}^{\sigma+e_0} v(P_i) \prod_{i=1}^{p} v(G_i H_i G_i^{-1} H_i^{-1}) = v(\pm I),$$

$$v(G_i H_i G_i^{-1} H_i^{-1}) = \sigma_4(G_i, H_i, G_i^{-1}, H_i^{-1})\, v(G_i)\, v(H_i)\, v(G_i^{-1})\, v(H_i^{-1})$$
$$= \frac{\sigma_4(G_i, H_i, G_i^{-1}, H_i^{-1})}{\sigma(G_i, G_i^{-1})\, \sigma(H_i, H_i^{-1})}.$$

So kommt

$$\prod_{i=1}^{\sigma+e_0} v(P_i) \tag{39}$$

$$= \frac{v(\pm 1)\prod_{i=1}^{p}\sigma(G_i, G_i^{-1})\,\sigma(H_i, H_i^{-1})}{\sigma_{\sigma+e_0+p}(P_1, \ldots, P_{\sigma+e_0}, G_1 H_1 G_1^{-1} H_1^{-1}, \ldots, G_p H_p G_p^{-1} H_p^{-1})\prod_{i=1}^{p}\sigma_4(G_i, H_i, G_i^{-1} H_i^{-1})}.$$

Da unter den P_i nach Annahme mindestens eine parabolische Matrix ist, so kann man diese Gleichungen stets lösen. Was die Mannigfaltigkeit der Lösungen angeht, so erkennt man:

Die Gesamtheit $\mathfrak{V}$ der Multiplikatoren v, für welche jedes $v(E_i)$, $1 \leqq i \leqq e_0$, einen festen Wert hat, hängt von $2p + \sigma - 1$ willkürlichen komplexen Konstanten ab. Wenn man im Falle eines reellen r verlangt, daß $|v(L)| = 1$ für alle L aus Γ, so heißt dies, daß $|v(A_\nu)| = 1$ für alle ν. Setzt man hier $v(A_\nu) = e^{2\pi i \alpha_\nu}$, α_ν reell, so ist ersichtlich, daß die Teilmenge der $v(L)$ von $\mathfrak{V}$ mit $|v(L)| = 1$ von $2p + \sigma - 1$ willkürlichen reellen Konstanten abhängt, die bei dieser Darstellung aber nur mod 1 in Betracht kommen. Lösungen von der Form $v(L) = e^{2\pi i \frac{r}{n} h}$ mit ganzen rationalen h, n sind immer vorhanden, sobald n durch $n_0 = [l_0, l_1, \ldots, l_{e_0}]$ teilbar ist. Hier setzen wir $l_0 = 2$ oder 1, je nachdem $-I$ in Γ vorkommt oder nicht und $n_0 = l_0$, wenn $e_0 = 0$. Die Teilmenge der Multiplikatoren $v(L)$ von $\mathfrak{V}$, welche für ein gegebenes n mit $n \equiv 0\,(n_0)$ die Form $v(L) = e^{2\pi i \frac{r}{n} h}$ haben, hängt von $2p + \sigma - 1$ willkürlichen ganzen rationalen Konstanten ab; dabei ist zu beachten, daß, wenn r rational ist, diese Konstanten nur mod $k\,n$ in Betracht kommen. Wenn man die Menge $\mathfrak{V}'$ der Multiplikatoren betrachtet, für welche sämtliche $v(P_i)$, $1 \leqq i \leqq \sigma + e_0$, feste Werte haben, so hängen diese $v(L)$ in jedem der betreffenden Fälle von $2p$ willkürlichen komplexen bzw. reellen bzw. ganzen rationalen Konstanten ab.

Wenn die Gruppe Γ kein endliches Erzeugendensystem besitzt, so betrachten wir die dem Fundamentalbereich $\mathfrak{D}$ von $\overline{\Gamma}$ durch Identifizierung der Ränder zugeordnete Riemannsche Fläche $\mathfrak{T}$. Das System der Ecken und Kanten von $\mathfrak{D}$ geht in ein zusammenhängendes Streckennetz $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{T}$ über. Den elliptischen Ecken und parabolischen Spitzen entsprechen genau die Eckpunkte von $\mathfrak{E}$, von denen nur eine Strecke ausgeht. In allen anderen Ecken von $\mathfrak{E}$ laufen mindestens drei Strecken zusammen. Diese Ecken bezeichnen wir als Ecken vom zweiten, jene als Ecken vom ersten Typus.

Die Gesamtheit der Relationen von Γ besteht aus zwei Gruppen:

a) Die Relation $(-I)^2 = I$, falls $-I$ in Γ liegt und die Umläufe um die elliptischen Ecken von $\mathfrak{D}$, falls solche vorhanden sind. Die zu diesen

Umläufen gehörigen Relationen haben die Gestalt

$$\pm E_j^{l_j} = I.$$

Diese Relationen haben auf $\mathfrak{T}$ keine anschauliche Bedeutung.

b) Die Umläufe um die sog. zufälligen Ecken von $\mathfrak{D}$, d. h. hier die Ecken vom zweiten Typus.

Um die Relationen besser diskutieren zu können, setzen wir

$$v(A_\nu) = e^{2\pi i \alpha_\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

wo α_ν irgendeinen der Werte von $\frac{1}{2\pi i}\log v(A_\nu)$ bezeichnet. Sind nun $R_{i_j} = I$ die unter a) angegebenen Relationen, so denken wir uns $v(-I)$ und die $v(E_j)$ für $j = 1, 2, \ldots$ so fixiert, daß die Gleichungen $\overline{R_{i_j}} = 1$ erfüllt sind. Von den übrigen Relationen, den Umläufen um die Ecken vom zweiten Typus, steht zunächst fest, daß sie in unendlich großer Zahl vorhanden sind. Denn gäbe es nur endlich viele Ecken vom zweiten Typus, so müßte es unendliche viele Ecken vom ersten Typus geben. Da aber in einer Ecke nur endlich viele Strecken zusammenlaufen können, so ergibt sich ein Widerspruch daraus, daß eine von einer Ecke des ersten Typus auslaufende Strecke in einer Ecke des zweiten Typus endigen muß.

Wir führen jetzt in die den Umläufen um die Ecken des zweiten Typus entsprechenden Gleichungen die Variablen $\alpha_\nu = \frac{1}{2\pi i}\lg v(A_\nu)$ ein und erhalten auf diese Weise ein System $\mathfrak{G}$ von unendlich vielen linearen Gleichungen in den α_ν. Wir schaffen die auf der linken Seite dieser Gleichungen eventuell auftretenden Glieder, die mit einem α_ν behaftet sind, für welches $A_\nu = -I$ oder elliptisch ist, auf die rechte Seite. Dann sind die rechten Seiten aller Gleichungen bekannt. Wenn wir uns nun die Matrix der Koeffizienten des Gleichungssystems ansehen, so bemerken wir folgendes:

1. Jede Zeile enthält nur endlich viele von Null verschiedene Elemente.

2. Zu jedem natürlichen n gibt es höchstens zwei Zeilen, deren n-tes Element $\neq 0$ ist.

Die dritte Eigenschaft läßt sich am besten als eine Eigenschaft des Streckennetzes $\mathfrak{E}$ formulieren:

3. Das Teilnetz $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{E}$, das aus $\mathfrak{E}$ durch Löschen der Strecken entsteht, welche in einer elliptischen Ecke endigen, ist zusammenhängend.

Aus 1., 2., 3. schließt man leicht, daß zwischen endlich vielen Zeilen der Matrix keine Relation bestehen kann.

Es sei ferner $\mathfrak{G}'$ ein endliches Teilsystem von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ enthalte g' Gleichungen mit mindestens drei Unbekannten. Aus 2. folgt dann, daß die

Anzahl der willkürlichen Konstanten, von welchen das Lösungssystem von $\mathfrak{G}'$ abhängt, $\geqq \frac{1}{2} g'$ ist. Um von hier aus eine Lösung des Gesamtsystems $\mathfrak{G}$ zu konstruieren, gehen wir folgendermaßen vor.

Es entstehe aus $\mathfrak{E}^*$ durch Streichen aller Strecken, welche von den Umläufen von $\mathfrak{G}'$ betroffen werden, das Netz $\mathfrak{E}'$. Allgemein wird $\mathfrak{E}'$ in endlich oder unendlich viele in sich zusammenhängende Teilnetze $\mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \ldots, \mathfrak{E}_n', \ldots$ zerfallen, die zu je zweien getrennt liegen. Wir nennen diese Teilnetze die Komponenten von $\mathfrak{E}'$. Nun zeigt man leicht, daß unter diesen Teilnetzen $\mathfrak{E}_n'$ nur endlich viele sein können, welche nicht unendlich viele Ecken enthalten. Das erhellt aus der Herkunft des Netzes: Der Gesamtheit der Strecken von $\mathfrak{G}'$ entspricht in $\mathfrak{H}$ eine endliche Menge von Paaren von Kanten des Fundamentalbereiches $\mathfrak{D}$ von $\overline{\Gamma}$. Man kann daher zu jeder Kante, abgesehen von endlich vielen Ausnahmen, einen „Weg" angeben, der mit dieser Kante beginnt, aus lauter solchen Kanten von $\mathfrak{D}$ besteht, deren Bilder auf $\mathfrak{T}$ nicht im Netze von $\mathfrak{G}'$ vorkommen, und der unendlich viele Ecken des Randes von $\mathfrak{D}$ trifft. Dabei kann man zugeordnete Kanten als nicht verschieden ansehen.

Jetzt ersetze ich $\mathfrak{G}'$ durch $\overline{\mathfrak{G}}$, indem ich alle jene endlich vielen Netze $\mathfrak{E}_n'$ zu dem Netz von $\mathfrak{G}'$ hinzufüge, welche nicht unendlich viele Ecken enthalten. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist also gleichfalls ein endliches Teilsystem von $\mathfrak{G}$. Wenn ich nun aus $\mathfrak{E}^*$ alle Strecken fortlasse, welche in den Umläufen von $\overline{\mathfrak{G}}$ vorkommen, so erhalte ich ein neues Netz $\overline{\mathfrak{E}}$, dessen in sich zusammenhängende Komponenten sämtlich unendlich viele Ecken enthalten.

Ist jetzt ein allgemeines Lösungssystem von $\overline{\mathfrak{G}}$ gegeben, so schaffen wir in sämtlichen Gleichungen von $\mathfrak{G} - \overline{\mathfrak{G}}$ die damit bekannten Glieder auf die rechte Seite. Einer Zerfällung des Netzes $\overline{\mathfrak{E}}$ in Komponenten entspricht eine Zerspaltung des so erhaltenen Gleichungssystems in „Komponentensysteme", die zu je zweien fremd sind, d. h. keine gemeinsamen Unbekannten enthalten. Für die Matrix jedes Komponentensystems gilt der Satz, daß zwischen endlich vielen Zeilen keine lineare Relation bestehen kann. Mithin können wir jedes endliche Teilsystem jedes Komponentensystems auflösen.

Ersichtlich kann man auf diesem Wege sukzessive eine Lösung des gesamten Systems $\mathfrak{G}$ gewinnen. Die allgemeine Lösung bei gegebenen $v(E_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, hängt, wie man leicht sieht, von $2p + \sigma$ willkürlichen Konstanten ab. Die der Lösung entsprechenden Multiplikatorensysteme hängen also auch von $2p + \sigma$ willkürlichen Konstanten ab, die im allgemeinen komplex sind. Die Multiplikatoren mit $|v(L)| = 1$ (r reell) hängen von $2p + \sigma$ reellen, die mit $v(L) = e^{2\pi i \frac{r}{n} h}$ von $2p + \sigma$ ganzzahligen

Parametern ab. Hier muß n durch $n_0 = [l_0, l_1, l_2, \ldots]$ teilbar sein; die Parameterwerte kommen nur $\mathrm{mod}\, k\, n$ in Betracht, wenn r rational ist.

Wir erkennen daher zusammenfassend

Satz 2. Das vollständige Lösungssystem der Gleichung

$$v(L_1 L_2) = \sigma(L_1, L_2)\, v(L_1)\, v(L_2)$$

hängt bei vorgegebenen Multiplikatorwerten für die elliptischen Erzeugenden der Gruppe Γ von $2p + \sigma - 1$ (bzw., falls $e_0 = \infty$, $2p + \sigma$) willkürlichen komplexen Konstanten ab. Das System der Lösungen $v(L)$ mit $|v(L)| = 1$ hängt im Falle eines reellen r von $2p + \sigma - 1$ (bzw. $2p + \sigma$) reellen Konstanten ab. Lösungen von der Form $v(L) = e^{2\pi i \frac{r}{n} h}$ mit ganzen h, n gibt es dann und nur dann, wenn n durch $n_0 = [l_0, l_1, l_2, \ldots]$ teilbar ist. Dabei bedeutet n die Zahl l_0, falls $e_0 = 0$ ist. Das System der Lösungen, welche für ein gegebenes festes n diese Gestalt haben, hängt von $2p + \sigma - 1$ (bzw. $2p + \sigma$) ganzzahligen Konstanten ab, welche aber, falls r rational ist, nur $\mathrm{mod}\, k\, n$ in Betracht kommen.

Es sollen noch einige spezielle Untersuchungen über die Multiplikatoren der Kongruenzgruppen, insbesondere die der niedrigen Stufenzahlen mitgeteilt werden. Sei zunächst $Q(x_1, \ldots, x_q)$ eine definite quadratische Form mit rationalen Koeffizienten, $\Lambda(x_1, \ldots, x_q)$ eine beliebige Linearform mit rationalen Koeffizienten; seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$; $g_1, \ldots, g_q$ beliebige rationale Zahlen. Dann gibt es, wie wir an anderer Stelle zeigen werden, zwei natürliche Zahlen $N \equiv 0\,(4)$ und N' derart, daß

$$\vartheta(\tau) = \sum_{m_i \equiv \alpha_i\,(g_i)} e^{2\pi i \tau \frac{Q(m_1, \ldots, m_q)}{N'} + 2\pi i \Lambda(m_1, \ldots, m_q)}$$

eine Modulform der Stufe N und der Dimension $-r = -\frac{q}{2}$ für das Multiplikatorsystem

$$v(L) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_*^q$$

ist, wo $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ aus $\Gamma(N)$. Hier bedeutet

$$\left(\frac{a}{n}\right)_* = \left(\frac{a}{|n|}\right) \sigma_{a,n}, \quad \text{falls} \quad n \not\equiv 0\,(2), \quad a \neq 0,$$

$$\left(\frac{0}{1}\right)_* = \left(\frac{0}{-1}\right)_* = 1,$$

$\left(\frac{a}{|n|}\right)$ ist das Legendre-Jacobische Restsymbol. Wir behaupten nun

Satz 3. $v(L) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_*^q$ ist ein Multiplikator für die Dimension $-r = -\frac{q}{2}$ und die Gruppe $\Gamma = \Gamma(4)$. Für jedes $N \equiv 0\,(4)$ und jedes

unimodulare reelle $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt überdies

$$e^{2\pi i \varkappa\left(-\frac{d}{c}\right)}=\sigma(S, S^{-1}U^N S)\,v(S^{-1}U^N S)=1.$$

Wir werden für alle M aus $\Gamma(1)$ einen verallgemeinerten Multiplikator $v(M)$ angeben, so daß

$$v(M)=v(L), \quad \text{wenn } M=L \text{ aus } \Gamma(N),$$
$$\varrho(M, L; v)=1 \quad \text{für } M \text{ aus } \Gamma(1),\ L \text{ aus } \Gamma(N).$$

Der ganze Satz ist für gerades q trivial; sei also fortan $q\equiv 1\,(2)$. Wir definieren nun das Symbol $\left(\frac{a}{n}\right)^*$ durch $\left(\frac{a}{n}\right)^*=\left(\frac{a}{|n|}\right)$, wenn $n\not\equiv 0\,(2)$.

Für die Symbole $\left(\frac{a}{n}\right)^*$ und $\left(\frac{a}{n}\right)_*$ gelten dann neben den bekannten Multiplikationsformeln folgende Gleichungen

$$(40)\qquad \left(\frac{a}{n}\right)^*=\left(\frac{a'}{n}\right)^*,\quad \left(\frac{a}{n}\right)_*=\left(\frac{a'}{n}\right)_*\sigma_{n,aa'},\quad \text{wenn } a\equiv a'(n),\ a\neq 0\neq a',$$

$$(40')\qquad \left(\frac{a}{n}\right)^*=\left(\frac{a}{n'}\right)^*\sigma_{a,nn'},\quad \left(\frac{a}{n}\right)_*=\left(\frac{a}{n'}\right)_*,\quad \text{wenn } n\equiv n'(4a),\ a\neq 0,$$

$$\left(\frac{-1}{n}\right)^*=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{sgn} n,\qquad \left(\frac{-1}{n}\right)_*=(-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)^*=\left(\frac{2}{n}\right)_*=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^*\left(\frac{n}{m}\right)^*=\left(\frac{m}{n}\right)_*\left(\frac{n}{m}\right)_*=(-1)^{\frac{n-1}{2}\frac{m-1}{2}}\sigma_{m,n}.$$

Hier wurde $n\equiv n'\equiv m\equiv 1\,(2)$ angenommen. Wir setzen nun für $\underline{M}=\{m_1, m_2\}$

$$v(M)=\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_*,\quad \text{falls}\quad m_2\equiv 1\,(2),$$
$$v(M)=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^*,\quad \text{falls}\quad m_1\equiv 1\,(2);$$

die Fälle können sich natürlich überdecken; wenn das zutrifft, nehme man irgendeine der beiden Definitionen, jedoch für alle M einer ganzen Nebengruppe von $\Gamma(1)$ bezüglich $\Gamma(4)$ durchweg dieselbe.

Sei $L=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ aus $\Gamma(4)$, $M'=ML=\begin{pmatrix} m_0' & m_3' \\ m_1' & m_2' \end{pmatrix}$, so daß

$$m_1'=\alpha m_1+\gamma m_2,\qquad m_1=\delta m_1'-\gamma m_2',$$
$$m_2'=\beta m_1+\delta m_2,\qquad m_2=-\beta m_1'+\alpha m_2'.$$

Zu beweisen ist $v(M')=\sigma(M, L)\,v(M)\,v(L)$.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) $\gamma \neq 0, \quad m_1 \neq 0, \quad m_1' \neq 0, \quad m_2 \equiv 1\,(2)$,

dann ist $v(M) = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_*$ eine nach dem Obigen zulässige Festsetzung der Multiplikatorwerte, und es wird nach (40) und (40′)

$$\left(\frac{m_1}{m_2'}\right)_* = \left(\frac{\delta m_1' - \gamma m_2'}{m_2'}\right)_* = \left(\frac{\delta}{m_2'}\right)_* \left(\frac{m_1'}{m_2'}\right)_* \sigma_{m_2',\, \delta m_1 m_1'}$$

$$\left(\frac{m_1}{m_2'}\right)_* = \left(\frac{m_1}{\beta m_1 + \delta m_2}\right)_* = \left(\frac{m_1}{\delta}\right)_* \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_*,$$

so daß

$$\left(\frac{m_1'}{m_2'}\right)_* = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_* \left(\frac{m_1}{\delta}\right)_* \left(\frac{\delta}{m_2'}\right)_* \sigma_{m_2',\, \delta m_1 m_1'}.$$

Nun kommt

$$\left(\frac{\delta}{m_2'}\right)_* = \left(\frac{m_2'}{\delta}\right)_* \sigma_{\delta,\, m_2'} = \left(\frac{-\gamma m_2'}{\delta}\right)_* \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* \sigma_{\delta,\, m_2'} = \left(\frac{m_1}{\delta}\right)_* \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* \sigma_{\delta,\, m_2'} \sigma_{\delta,\, -\gamma m_1 m_2'},$$

und daher

$$\left(\frac{m_1'}{m_2'}\right)_* = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_* \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* \sigma_{m_2',\, \delta m_1 m_1'} \sigma_{\delta,\, m_2'} \sigma_{\delta,\, -\gamma m_1 m_2'}.$$

Es erübrigt also nur, zu zeigen

$$\sigma_{-\gamma m_1,\, m_1 m_1'} = \sigma_{m_2',\, \delta m_1 m_1'} \sigma_{\delta,\, m_2'} \sigma_{\delta,\, -\gamma m_1 m_2'}.$$

Wegen $\sigma_{a,\, bc} = \sigma_{a,\, b} \sigma_{a,\, c}$ $(a, b, c \neq 0)$ bedeutet dies, daß

$$\sigma_{\delta,\, -\gamma m_1} \sigma_{-\gamma m_1,\, m_1 m_1'} \sigma_{m_2',\, \delta m_1 m_1'} = 1.$$

Die linke Seite ist aber

$$\sigma_{-\gamma m_1,\, \delta m_1 m_1'} \sigma_{m_2',\, \delta m_1 m_1'} = \sigma_{-\gamma m_1 m_2',\, \delta m_1 m_1'}$$

und das ist tatsächlich $= 1$; denn

$$m_1^2 = m_1 (\delta m_1' - \gamma m_2') = -\gamma m_1 m_2' + \delta m_1 m_1' > 0,$$

daher kann nicht zugleich $-\gamma m_1 m_2' < 0$ und $\delta m_1 m_1' < 0$ sein, q. e. d. — Fall

a′) $\gamma \neq 0, \quad m_1 \neq 0, \quad m_1' \neq 0, \quad m_1 \equiv 1\,(2)$.

Wir nehmen $v(M) = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^*$; dann ist zu beweisen, daß

$$\left(\frac{m_2'}{m_1'}\right)^* = \sigma_{-\gamma m_1,\, m_1 m_1'} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^* \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_*.$$

Hier wird

$$\left(\frac{m_2'}{m_1}\right)^* = \left(\frac{m_2'}{\delta}\right)^* \left(\frac{m_2'}{m_1'}\right)^* \sigma_{m_2',\, \delta m_1 m_1'}, \qquad \left(\frac{m_2'}{m_1}\right)^* = \left(\frac{\delta}{m_1}\right)^* \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^*,$$

daher

$$\left(\frac{m_2'}{m_1'}\right)^* = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^* \left(\frac{m_2'}{\delta}\right)^* \left(\frac{\delta}{m_1}\right)^* \sigma_{m_2',\, \delta m_1 m_1'}.$$

Nun ist

$$\left(\frac{\delta}{m_1}\right)^* = \left(\frac{m_1}{\delta}\right)^* \sigma_{\delta, m_1} = \left(\frac{-\gamma}{\delta}\right)^* \left(\frac{m_2'}{\delta}\right)^* \sigma_{\delta, m_1}$$

und

$$\left(\frac{-\gamma}{\delta}\right)^* = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* \sigma_{-\gamma, \delta},$$

so daß

$$\left(\frac{m_2'}{m_1'}\right)^* = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^* \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* \sigma_{m_2', \delta m_1 m_1'} \sigma_{\delta, -\gamma m_1} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^* \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* \sigma_{-\gamma m_1, m_1 m_1'}, \quad \text{q. e. d.}$$

Die Bestätigung in den restlichen Fällen führt direkt auf die Definition der in ihnen auftretenden Symbole.

Um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, zeigen wir:

(41) $\qquad \alpha) \quad \sigma^{(r)}(S, S^{-1} U^N S) = 1$

für alle reellen unimodularen $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alle reellen N und alle reellen r.

$$\beta) \quad v(S^{-1} U^N S) = 1$$

für alle S aus $\Gamma(1)$ und alle ganzen $N \equiv 0\ (4)$.

Ad α): Es ist $\sigma(S, S^{-1} U^N S) = 1$, falls $c = 0$.

Sei $c \neq 0$; wir setzen $H = S^{-1} U^N S$, $\underline{H} = \{h_1, h_2\}$, wo $h_1 = -c^2 N$, $h_2 = 1 - cdN$. Man bemerkt nun, daß

$$h_1 < 0, \quad -\frac{h_2}{h_1} = -\frac{d}{c} + \frac{1}{c^2 N} > -\frac{d}{c}.$$

Mit Hilfe dieser Aussagen über die Abbildung, welche die Substitution H vermittelt, schließt man leicht, daß man ein reelles τ finden kann, für welches $(cH\tau + d)^r > 0$, $(c\tau + d)^r > 0$, $(h_1 \tau + h_2)^r > 0$ ist, woraus die Behauptung erhellt.

Ad β): Es ist

$$S^{-1} U^N S = \begin{pmatrix} 1 + cdN & d^2 N \\ -c^2 N & 1 - cdN \end{pmatrix},$$

daher

$$v(S^{-1} U^N S) = \left(\frac{-c^2 N}{1 - cdN}\right)_* = \left(\frac{N}{1 - cdN}\right)_*.$$

Sei $N = 2^\lambda N'$, $(N', 2) = 1$. Dann wird

$$v(S^{-1} U^N S) = \left(\frac{2}{1 - cdN}\right)_*^\lambda \left(\frac{N'}{1 - cdN}\right)_*.$$

Beide Faktoren rechts sind aber $= 1$, da $\lambda \geqq 2$ angenommen wurden.

Der damit bewiesene Satz sagt also aus, daß es für die Gruppe $\Gamma(4)$ einen Multiplikator $v(L)$ gibt, der die Eigenschaft hat, daß $v(P) = 1$ für alle parabolischen Matrizen P von $\Gamma(4)$, oder, was nach (23) auf dasselbe hinauskommt, daß $e^{2\pi i \varkappa(s)} = 1$, $\varkappa(s) = 0$ für alle Spitzen der Gruppe $\Gamma(4)$.

Übrigens nimmt $v(L)$ ersichtlich nur die Werte ± 1 an. Da nun das Geschlecht $p(4) = 0$ für die Gruppe $\Gamma(4)$, und da $\Gamma(4)$ keine elliptischen Substitutionen enthält, so ist $\Gamma(4)$ nach dem Obigen eine freie Gruppe, die durch 5 parabolische Elemente erzeugt wird. Der Multiplikator $v(L)$ ist also durch die oben angegebenen Eigenschaften bereits eindeutig charakterisiert. Wenn man für die anderen $\Gamma(N)$ nach Multiplikatoren von den analogen Eigenschaften sucht, so stellt man zunächst fest, daß es für $N = 1, 2$ nichts dergleichen geben kann; denn in diesen Fällen liegt $-I$ in $\Gamma(N)$ und es ist $v(-I) = e^{-\pi i \frac{q}{2}} = (-i)^q$ imaginär. Im Falle $N = 3$ werden wir nachher den Unmöglichkeitsbeweis für die Existenz solcher Multiplikatoren erbringen. Damit haben wir aber dann erkannt:

Der oben angegebene Multiplikator $v(L)$ läßt sich folgendermaßen eindeutig charakterisieren: Wir suchen die Gruppe $\Gamma(N)$ mit dem kleinsten N, zu welcher es einen Multiplikator $v(L)$ gibt mit der Eigenschaft $v(P) = 1$ für alle parabolischen Matrizen P von $\Gamma(N)$.

Ist $N \equiv 0(2)$, $N > 4$, $r \equiv \frac{1}{2}(1)$, so kann man leicht viele Multiplikatoren mit der Eigenschaft $v(P) = 1$ für alle parabolischen Elemente P von $\Gamma(N)$ aufstellen, welche nur der Werte ± 1 fähig sind. Es gibt nämlich, wie bewiesen, für die Gruppe $\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)$ mindestens einen Multiplikator $v(L)$, welcher nur die Werte ± 1 annimmt.

Ist P_N eine parabolische Matrix von $\Gamma(N)$ mit einem bestimmten Fixpunkt, so gilt für ein gewisses S aus $\Gamma(1)$

$$P_N = S^{-1} U^N S = P_{\frac{N}{2}}^2,$$

wo

$$P_{\frac{N}{2}} = S^{-1} U^{\frac{N}{2}} S.$$

Daher ist

$$v(P_N) = \sigma(P_{\frac{N}{2}}, P_{\frac{N}{2}})\, v(P_{\frac{N}{2}})^2 = \sigma(P_{\frac{N}{2}}, P_{\frac{N}{2}})$$

und das ist gleich 1; denn es gilt

$$1 = \sigma(S, P_{\frac{N}{2}}^2) = \frac{\sigma(S, P_{\frac{N}{2}})\, \sigma(U^{\frac{N}{2}} S, P_{\frac{N}{2}})}{\sigma(P_{\frac{N}{2}}, P_{\frac{N}{2}})},$$

$$\sigma(U^{\frac{N}{2}} S, P_{\frac{N}{2}}) = \sigma(S, P_{\frac{N}{2}}) = 1,$$

also

$$v(P_N) = 1.$$

Man kann übrigens diesen Schluß auch auf den Fall $N=4$ übertragen, wenn man aus der $\Gamma(2)$ eine Untergruppe $\overline{\Gamma(2)}$ vom Index 2 aussondert, in welcher das Element $-I$ nicht vorkommt.

Nun sei $v^*(L)$ irgendein Multiplikator für die Dimension $-\frac{q}{2}=-r$. Dann ist

$$\chi(L)=\frac{v^*(L)}{v(L)}$$

ein Multiplikator für die Gruppe $\Gamma(N)$ und die Dimension 0.

$v^*(P)=1$ für alle parabolischen P von $\Gamma(N)$ heißt, daß $\chi(P)=1$, und man sieht, daß es genau 2^{2p} Multiplikatoren $v^*(L)$ für die Gruppe $\Gamma(N)$ und die Dimension $-r$ gibt, so daß $v^*(P)=1$ für alle parabolischen P, und $v(L)=\pm 1$ für alle L aus $\Gamma(N)$ ist. (Es ist bereits $p(8)=5$, also $2^{2p}>1000$.)

Der nachzutragende Beweis für die Unmöglichkeit, einen Multiplikator $v(L)$ mit den angegebenen Eigenschaften für die $\Gamma(3)$ zu bestimmen, verläuft so:

Den vier parabolischen Spitzen $\infty, 0, 1, 2$ eines Fundamentalbereiches der $\overline{\Gamma(3)}$ seien die vier parabolischen Matrizen P_∞, P_0, P_1, P_2 zugeordnet, wo

$$P_\infty=U^3,\quad P_0=TU^3T^{-1},\quad P_1=UP_0U^{-1},\quad P_2=U^2P_0U^{-2};$$

hier ist $T=\begin{pmatrix}0 & +1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Man sieht nun, daß es einen solchen Multiplikator gibt oder nicht gibt, je nachdem $\sigma_4(P_\infty, P_0, P_1, P_2)=1$ ist oder nicht. Es ist aber

$$\begin{aligned}\sigma_4(P_\infty, P_0, P_1, P_2)&=\sigma_3(P_0, P_1, P_2)=\sigma(P_0P_1, P_2)\sigma(P_0, P_1)\\&=\sigma(P_0UP_0, UP_0)\sigma(P_0, UP_0).\end{aligned}$$

Die Relation $(TU)^3=I$ hat zur Folge, daß

$$P_0UP_0UP_0=U^{-1}.$$

so daß

$$P_0UP_0=U^{-1}P_0^{-1}U^{-1},$$

also

$$\sigma_4(P_\infty, P_0, P_1, P_2)=\sigma(P_0, UP_0).$$

Hier zeigt eine kleine Rechnung, daß

$$\sigma(P_0, UP_0)=\sigma_{-9,-9}=-1.$$

Damit ist der Beweis geführt.

Im Falle der vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$ gibt es zu jeder Dimension $-r$ genau zwölf Multiplikatoren [18]). Ist $r\equiv\frac{1}{2}(1)$, so überzeugt man sich, daß

[18]) Vgl. für den Fall ganzzahliger Dimension Fricke II, S. 93 ff.

vier von diesen Multiplikatoren durchweg achte Einheitswurzeln sind, während die übrigen acht im allgemeinen vierundzwanzigste Einheitswurzeln sind. Unter diesen zwölf Multiplikatoren ist nun einer funktionentheoretisch ausgezeichnet, nämlich der, zu dem die Modulform $(-\frac{1}{2})$-ter Dimension

$$\sqrt[24]{\Delta(\tau)} = e^{2\pi i \frac{\tau}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})$$

gehört. Sei $v_0(M)$, M in $\Gamma(1)$, dieser Multiplikator. Es gilt

Satz 4. $v_0(M)$ *ist der einzige Multiplikator der vollen Modulgruppe, zu welchem es eine ganze, in allen Spitzen verschwindende Modulform von der Dimension* $-\frac{1}{2}$ *gibt.*

Sei nämlich $v(M)$ ein von $v_0(M)$ verschiedener Multiplikator. Angenommen, es gäbe eine ganze Modulform $g(\tau)$ von der Dimension $-\frac{1}{2}$ für das Multiplikatorsystem $v(M)$, welche in allen Spitzen verschwindet. Da $\sqrt[24]{\Delta(\tau)}$ in allen Spitzen in der niedrigsten überhaupt möglichen Ordnung verschwindet, so ist

$$f(\tau) = \frac{g(\tau)}{\sqrt[24]{\Delta(\tau)}}$$

eine ganze Modulform von der Dimension 0 für den Multiplikator $\chi = \frac{v}{v_0}$; nach dem Obigen ist daher $(f(\tau))^{24}$ eine ganze Modulfunktion, also konstant, im Widerspruch mit der Annahme.

Zum Schlusse dieses Paragraphen beweisen wir noch kurz den Satz, daß es stets möglich ist, die oben aufgestellten Multiplikatoren für stetig veränderliches r als stetige Funktionen von r aufzufassen. Zunächst ist nämlich bei festem M und S das Symbol $\sigma^{(r)}(M, S)$ eine analytische Funktion von r und damit sind die sämtlichen verallgemeinerten Symbole $\sigma_n(M_1, \ldots, M_n)$ analytische Funktionen von r. Nun ist $v(-I) = e^{-\pi i r}$, und man kann daher die $v(E_j)$ aus der Gleichung

$$\sigma_{l_j}(E_j, E_j, \ldots, E_j)\, v(E_j)^{l_j} = v(\pm I)$$

als analytische Funktionen von r gewinnen. Wählt man nun die willkürlichen Konstanten in dem vollständigen Lösungssystem der noch übrigen Gleichungen $\bar{R}_i = 1$ als willkürliche stetige bzw. analytische Funktionen von r, deren Betrag für reelles r gleich 1 ist, so erhält man, wie eine Betrachtung der Determinante des dem Gleichungssystem $\bar{R}_i = 1$ entsprechenden linearen Gleichungssystems zeigt, die resultierenden Multiplikatoren als stetige bzw. analytische Funktionen von r, welche für reelles r den Betrag 1 haben.

§ 4.

In den nun folgenden beiden Abschnitten erbringen wir den Beweis dafür, daß sich jede zu einer Grenzkreisgruppe mit endlich vielen Erzeugenden gehörige automorphe Form, deren Dimension $-r < -2$ ist, und deren Multiplikatorsystem $v(L)$ die Bedingung $|v(L)| = 1$ erfüllt, durch die oben eingeführten Reihen G_{-r} darstellen läßt. Wir setzen also voraus, daß Γ durch endlich viele Elemente erzeugt wird und können danach den Fundamentalbereich $\mathfrak{D}$ von Γ innerhalb $\mathfrak{H}$ in die kanonische Gestalt[14]) bringen. Das wesentliche Hilfsmittel dieses Beweises sind die von Ritter zuerst eingeführten multiplikativen Formen auf algebraischen Gebilden, und wir müssen jetzt einen kurzen Exkurs über diesen Gegenstand einschieben.

Die allgemeinen Existenzsätze aus der Theorie der automorphen Funktionen garantieren die Existenz einer $(2p+2)$-wertigen automorphen Funktion $Z(\tau)$, welche den in abstracto geschlossenen Fundamentalbereich $\bar{\mathfrak{D}}$ auf eine $(2p+2)$-blättrige sog. kanonische Riemannsche Fläche $\mathfrak{T}$ umkehrbar eindeutig und konform abbildet. Das System der Ecken und Kanten von $\mathfrak{D}$ findet sich auf $\mathfrak{T}$ in der Weise wieder, wie es Fig. 12 in Ritter II angibt. Zur Fixierung des Begriffs einer multiplikativen Form auf $\mathfrak{T}$ von der Dimension $-\eta$ führen wir in Anlehnung an Ritter die homogenen Variablen z_1, z_2 ein, welche auf folgender Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}'$ variieren sollen: $z = \frac{z_1}{z_2}$ variiere auf $\mathfrak{T}$ und z_2 auf $\mathfrak{F}'_\eta$. Ritter schreibt allerdings vor, daß z_1 und z_2 beide endlich bleiben sollen, so daß man also den Punkt $z_2 = 0$ auf $\mathfrak{F}'_\eta$ nicht entbehren kann. Indessen wollen wir, falls es sich um diesen Punkt handelt, durch die Transformation $z' = \frac{1}{z}$ zur Fläche $\mathfrak{T}'$ und zu den homogenen Variablen $z'_1 = z_2$, $z'_2 = z_1$ übergehen, wo die Vorschriften wieder erfüllt sind. Indem wir so erklären, was unter dem Verhalten einer Funktion von z_1, z_2 für $z_2 = 0$ zu verstehen ist, erweitern wir die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}'$ zu einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$ durch Hinzufügung dieses Punktes $z_2 = 0$.

Es heiße nun $K(z_1, z_2)$ eine multiplikative Form auf $\mathfrak{R}$ von der Dimension $-\eta$, wenn $K(z_1, z_2)$ folgende Eigenschaften hat:

1. $K(z_1, z_2)$ ist eine auf $\mathfrak{R}$ höchstens in den Verzweigungspunkten verzweigte, bei festem z_2 bis auf endlich viele Pole in der Ortsuniformisierenden auf $\mathfrak{T}$ überall reguläre analytische Funktion.

---

[14]) F. Klein, Über den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereichs, Math. Annalen 40.

2. Es gilt für beliebiges komplexes $t \neq 0$

$$K(tz_1, tz_2) = \frac{z_2^\eta}{(tz_2)^\eta} K(z_1, z_2).$$

wo $\frac{tz_1}{tz_2} = \frac{z_1}{z_2} = z$ ist, und z_2^η und $(tz_2)^\eta$ die Werte der auf $\mathfrak{F}_\eta$ eindeutigen Funktionen ω_2^η für $\omega_2 = z_2$ bzw. $\omega_2 = tz_2$ bedeuten.

3. Bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges auf $\mathfrak{K}$ nimmt $K(z_1, z_2)$ einen konstanten Faktor auf.

Die Eigenschaften 1., 2. besagen wieder, daß

$$K(z) = K(z, 1) = z_2^\eta K(z_1, z_2)$$

eine auf $\mathfrak{T}$ höchstens in den Verzweigungspunkten verzweigte, bis auf endlich viele Pole reguläre Funktion ist. 3. bedeutet dann, daß $K(z)$ bei geschlossenen Umläufen auf $\mathfrak{T}$ konstante Faktoren aufnimmt. Man sieht daraus, daß man sich darauf beschränken kann, das Verhalten von $K(z_1, z_2)$ bei Umläufen von z_1, z_2 auf $\mathfrak{K}$ in den Fällen zu betrachten, wo entweder z_2 festliegt und z auf $\mathfrak{T}$ variiert, oder z festliegt und z_2 auf $\mathfrak{F}'_\eta$ variiert. In dem letzteren Fall ist das Verhalten von $K(z_1, z_2)$ durch die Homogeneitätseigenschaft bereits fixiert. Zur Bestimmung des Verhaltens von $K(z_1, z_2)$ bei Umläufen von z auf $\mathfrak{T}$ für festes z_2 bedarf es der Angabe der von Ritter sog. Verzweigungs- und Periodenmultiplikatoren; das sind die Faktoren, welche $K(z_1, z_2)$ bei Umlaufung eines Verzweigungspunktes bzw. bei Überschreitung eines der Rückkehrschnitte, durch welche $\mathfrak{T}$ zu einem einfach zusammenhängenden Bereich gemacht wird, aufnimmt.

Eines der wichtigsten Ergebnisse Ritters ist die Aufstellung der zu einem bestimmten Punkte a auf $\mathfrak{T}$ gehörigen multiplikativen Primform $P(z, a)$. $P(z, a)$ ist eine multiplikative Form auf $\mathfrak{T}$, welche im Punkte a eine Nullstelle von genau erster Ordnung (gemessen in der Ortsuniformisierenden) besitzt und überall sonst auf $\mathfrak{T}$ endlich und von Null verschieden ist. Ritter zeigt, daß sich jede multiplikative Form $K(z_1, z_2)$ bis auf die Exponentialfunktion eines Integrals erster Gattung als Potenzprodukt von Primformen darstellen läßt, wobei die den Verzweigungspunkten zugeordneten Primformpotenzen im allgemeinen beliebige komplexe Exponenten erhalten.

Diese Primformen gestatten es auch, einen direkten Zusammenhang zwischen den beiden homogenen Variablenpaaren ω_1, ω_2 und z_1, z_2 so zu konstruieren, daß

a) erlaubten Wertepaaren (im obigen Sinne von Ritter) von z_1, z_2 nur erlaubte Wertepaare von ω_1, ω_2 (d. h.: $\{\omega_1, \omega_2\}$ auf $\mathfrak{M}$) entsprechen und umgekehrt,

b) den auf $\mathfrak{K}$ geschlossenen Umläufen von z_1, z_2 die ganzen binären Substitutionen in ω_1, ω_2 der homogenen Gruppe Γ entsprechen und umgekehrt.

Der allgemeinste Zusammenhang dieser Art wird durch die Formeln

$$(42)\qquad \begin{cases} \omega_2 = \left(\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n} P(z, e_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \frac{z_2}{\sqrt{G(z_1, z_2)}} e^{j(z)} \\ \omega_1 = \tau\,\omega_2 \end{cases}$$

vermittelt, in welchen $n = \sigma + e_0$, $j(z)$ ein beliebiges, aber bestimmtes Integral erster Gattung und $G(z_1, z_2)$ eine gewisse ganze algebraische Form auf $\mathfrak{T}$ bezeichnet, welche nur in den Verzweigungspunkten der Fläche und dort je mit der Multiplizität des Verzweigungspunktes verschwindet.

Man entnimmt diesen Gleichungen die folgenden Aussagen:

ω_1, ω_2 sind als Funktionen von z_1, z_2 zwar Formen auf $\mathfrak{T}$ im Sinne der Festsetzungen 1. und 2. für multiplikative Formen; aber bei Ausführung eines geschlossenen Weges auf $\mathfrak{K}$ geht das Paar ω_1, ω_2 in $\lambda L\omega_1$, $\lambda L\omega_2$ über, wo λ konstant ist und L eines der Elemente von Γ bedeutet, welche dem Wege von z auf $\mathfrak{T}$ entsprechen.

Umgekehrt sind z_1 und z_2 als Funktionen von ω_1, ω_2 automorphe Formen einer gewissen, bei beiden Funktionen z_1 und z_2 übereinstimmenden Dimension und eines gewissen, bei beiden Funktionen übereinstimmenden Multiplikatorsystems.

Diese Formeln ermöglichen es nun, eine direkte Zuordnung zwischen den multiplikativen Formen auf $\mathfrak{T}$ und den automorphen Formen der Gruppe Γ herzustellen. Man beweist nämlich:

Ist $K(z_1, z_2)$ eine multiplikative Form auf $\mathfrak{T}$, so ist

$$F(\omega_1, \omega_2) = K(z_1(\omega_1, \omega_2),\ z_2(\omega_1, \omega_2))$$

eine automorphe Form der Gruppe Γ, und umgekehrt:

Ist $F(\omega_1, \omega_2)$ eine automorphe Form der Gruppe Γ, so ist

$$K(z_1, z_2) = F(\omega_1(z_1, z_2),\ \omega_2(z_1, z_2))$$

eine multiplikative Form auf $\mathfrak{T}$.

Zum Vergleich der unter 1. aufgeführten Eigenschaften einer multiplikativen Form auf $\mathfrak{T}$ und den entsprechenden Eigenschaften 1. und 4. für automorphe Formen der Gruppe Γ bedarf es noch einer Vorbereitung. Ist nämlich ε eine elliptische Ecke von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{H}$, $\varepsilon' = \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_2'}$, so folgt aus den Gleichungen (42), daß

$$\omega_1 \varepsilon_2' - \omega_2 \varepsilon_1' = \psi(z_1, z_2)$$

eine bei dem der Ecke ε auf $\mathfrak{T}$ entsprechenden Verzweigungspunkte e_i unverzweigte reguläre und dort von 0 verschiedene Form ist. Ist ferner

$s = \frac{s_1}{s_2}$ eine parabolische Spitze von $\mathfrak{R}$, so folgt:

$$\omega_1 s_2 - \omega_2 s_1 = \psi_1(z_1, z_2)$$

ist eine bei dem der Spitze s auf $\mathfrak{T}$ entsprechenden Verzweigungspunkte e_i unverzweigte reguläre und dort von 0 verschiedene Form.

Mit Hilfe dieser Aussagen schließt man leicht, daß bei dieser Übertragung die Regularitäts- und Eindeutigkeitsvorschriften für multiplikative Formen auf $\mathfrak{T}$ und für automorphe Formen der Gruppe Γ genau äquivalent sind. Man sieht insbesondere, daß die Ordnung, welche eine Form in einem Punkte, gemessen in der Ortsuniformisierenden, besitzt, bei dieser Übertragung erhalten bleibt.

Die Homogeneitätseigenschaft überträgt sich von einer Mannigfaltigkeit auf die andere vermöge der Gleichung

$$\omega_2^{-r} F(\tau, 1) = z_2^{-\eta} K(z, 1)$$

und eine einfache Überlegung zeigt, daß auch die Invarianzeigenschaften sich entsprechen.

Unter den multiplikativen Formen auf $\mathfrak{T}$ spielen die algebraischen Formen $\Phi(z_1, z_2)$ von der Dimension $2p-2$ eine besonders wichtige Rolle. Ihnen sind nämlich die eigentlich automorphen Formen von der Dimension -2, die wir als Funktionen von z_1, z_2 mit

$$E_{-2}(z_1, z_2)$$

bezeichnen wollen, umkehrbar eindeutig durch die Gleichung

$$E_{-2}(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^{n} P(z, e_i)^{1-\frac{1}{l_i}} \Phi(z_1, z_2) \tag{43}$$

zugeordnet. Ritter nennt nun zwei multiplikative Formen $K_1(z_1, z_2)$ und $K_2(z_1, z_2)$ reziprok, wenn ihr Produkt

$$K_1(z_1, z_2)\, K_2(z_1, z_2) = \Phi(z_1, z_2)$$

eine algebraische Form auf $\mathfrak{T}$ von der Dimension $2p-2$ ist; zwei automorphe Formen $F_1(\omega_1, \omega_2)$ und $F_2(\omega_1, \omega_2)$ heißen konjugiert, wenn ihr Produkt

$$F_1(\omega_1, \omega_2)\, F_2(\omega_1, \omega_2) = G_{-2}(\omega_1, \omega_2)$$

eine eigentlich automorphe Form (-2)-ter Dimension für die Gruppe Γ ist.

Wir wollen nun von hier ab nur solche Formen betrachten, deren sämtliche Verzweigungsmultiplikatoren den Betrag 1 haben. Wie eine genauere Untersuchung lehrt, ist dies damit gleichbedeutend, daß der Multiplikator $v(L)$ der zugeordneten automorphen Form in inhomogener Schreibweise für parabolische und elliptische L nur Werte vom Betrage 1 annimmt. Für parabolische L ist insbesondere der Multiplikatorwert $v(L)$ gleich dem Verzweigungsmultiplikator der zugeordneten multiplikativen Form.

Sei nämlich $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unimodular und reell, $s = -\frac{d}{c}$ eine parabolische Spitze, $H = S^{-1} U^{\delta} S$ erzeuge die zyklische Untergruppe $\mathfrak{Z}(H)$ von Γ. Ist $F(\omega_1, \omega_2)$ eine automorphe Form der Gruppe Γ, $K(z_1, z_2)$ die zugeordnete multiplikative Form auf $\mathfrak{T}$, so ist bei geeigneter Wahl des Zweiges der Funktion $(c\omega_1 + d\omega_2)^r$ die Beziehung

$$(c\omega_1 + d\omega_2)^r F(\omega_1, \omega_2) = (c\tau + d)^r F(\tau, 1)$$

erfüllt. Hier wählen wir die neuen Variablen $H\omega_1$, $H\omega_2$ auf $\mathfrak{M}$ so, daß sich dieser Zweig der Funktion $(c\omega_1 + d\omega_2)^r$ beim Übergang zu den neuen Variablen nicht ändert, daß also

$$(cH\omega_1 + dH\omega_2)^r = (c\omega_1 + d\omega_2)^r.$$

Nun ist

$$(c\omega_1 + d\omega_2)^r = \text{konst.}\,(\psi_1(z_1, z_2))^r = \psi_2(z_1, z_2)$$

eine Form in z_1, z_2 von der Dimension $+\eta$, und wir wissen, daß sie sich bei festem z_2 nicht ändert, wenn z auf $\mathfrak{T}$ den der Spitze s zugeordneten Verzweigungspunkt umkreist. $\psi_2(z_1, z_2)$ verträgt aber auch den Umlauf auf $\mathfrak{K}$, welcher der wie eben fixierten Substitution H entspricht. Hieraus schließt man auf Grund der Homogeneitätseigenschaft von $\psi_2(z_1, z_2)$, daß bei diesem Umlauf z_2 den Nullpunkt auf $\mathfrak{F}_\eta$ nicht umkreisen kann, es sei denn η eine ganze rationale Zahl, in welchem Falle die Behauptung gegenstandslos wird.

Nun ergibt sich einerseits nach (41)

$$(cH\omega_1 + dH\omega_2)^r F(H\omega_1, H\omega_2) = v(H)(c\omega_1 + d\omega_2)^r F(\omega_1, \omega_2),$$

also

$$F(H\omega_1, H\omega_2) = v(H) F(\omega_1, \omega_2).$$

Andererseits geht z_2 bei dem Umlauf auf $\mathfrak{K}$, welcher der durch H erzeugten homogenen Substitution in $\mathfrak{M}$ zugeordnet ist, in sich über, ohne den Nullpunkt auf $\mathfrak{F}_\eta$ zu umkreisen. Der Multiplikator für die Umkreisung der der Spitze s zugeordneten Verzweigung ist daher, wie jetzt die oben erwähnte Untersuchung zeigt, selbst gleich $v(H)$.

Wir können jetzt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Form $F_2(\omega_1, \omega_2)$ zu der gegebenen Form $F_1(\omega_1, \omega_2)$ konjugiert sei, leicht angeben. Es gilt

$$F_1(\omega_1, \omega_2) = \prod_{i=1}^{n} P(z, e_i)^{\bar{\varkappa}_i^{(1)}} U_1(z_1, z_2),$$

$$F_2(\omega_1, \omega_2) = \prod_{i=1}^{n} P(z, e_i)^{\bar{\varkappa}_i^{(2)}} U_2(z_1, z_2),$$

$$(0 \leqq \bar{\varkappa}_i^{(1)} < 1, \quad 0 \leqq \bar{\varkappa}_i^{(2)} < 1),$$

wo $U_1(z_1, z_2)$ und $U_2(z_1, z_2)$ unverzweigte Formen darstellen und die sogenannten Verzweigungsfaktoren

$$V_j(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^{n} P(z, e_i)^{\bar{\varkappa}_i^{(j)}} \qquad (j = 1, 2)$$

durch das Multiplikatorsystem der Formen $F_j(\omega_1, \omega_2)$ eindeutig bestimmt sind. Durch eine einfache Betrachtung mit Hilfe der Gleichung (43) zeigt man, daß jene notwendige und hinreichende Bedingung sich in Gestalt der Gleichungen

$$(44) \qquad U_1(z_1, z_2)\, U_2(z_1, z_2) = \prod_{\substack{i=1 \\ l_i = \infty,\ \bar{\varkappa}_i^{(1)} = 0}}^{n} P(z, e_i)\, \Phi(z_1, z_2)$$

oder

$$(45) \qquad \bar{\varkappa}_i^{(1)} + \bar{\varkappa}_i^{(2)} = 1 - \frac{1}{l_i} \qquad (l_i < \infty \text{ oder } l_i = \infty,\ \bar{\varkappa}_i^{(1)} > 0)$$

kundgibt, wo $\Phi(z_1, z_2)$ eine algebraische Form von der Dimension $2p - 2$ auf $\mathfrak{T}$ ist.

Andererseits gestattet die Eigenschaft zweier automorpher Formen, zueinander konjugiert zu sein, eine besonders einfache Formulierung in der Sprache der Gruppe Γ und der Variablen τ: Seien $-r_1$, $-r_2$ die Dimensionen, v_1, v_2 die Multiplikatoren von $F_1(\omega_1, \omega_2)$ bzw. $F_2(\omega_1, \omega_2)$ (in inhomogener Schreibweise). Dann ist die gesuchte Bedingung einfach in den Gleichungen

$$r_1 + r_2 = 2, \qquad v_1(L)\, v_2(L) = 1 \quad \text{für alle } L \text{ aus } \Gamma$$

enthalten.

Im folgenden wollen wir den Fall eingehend untersuchen, in welchem $F_1(\omega_1, \omega_2)$ eine ganze automorphe Form ist. Dabei nennen wir eine beliebige automorphe Form $F(\omega_1, \omega_2)$ in der Spitze $s = -\frac{d}{c}$ regulär, falls die nach Potenzen von $t = e^{2\pi i \frac{S\tau}{\vartheta}}$ fortschreitende Reihe

$$\mathfrak{P}(t) = (c\,\omega_1 + d\,\omega_2)^r F(\omega_1, \omega_2)\, e^{-2\pi i \varkappa \frac{S\tau}{\vartheta}} \qquad (0 \leqq \varkappa < 1)$$

bei $t = 0$ regulär ist. Dagegen wollen wir von jetzt ab sagen, $F(\omega_1, \omega_2)$ verschwinde in der Spitze s, wenn,

falls $\varkappa > 0$, $\mathfrak{P}(t)$ bei $t = 0$ regulär ist, und

falls $\varkappa = 0$, $\mathfrak{P}(t)$ bei $t = 0$ regulär ist und verschwindet.

Sei nun $F(\omega_1, \omega_2)$ eine automorphe Form und

$$V(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^{n} P(z, e_i)^{\bar{\varkappa}_i} \qquad (0 \leqq \bar{\varkappa}_i < 1)$$

der Verzweigungsfaktor der zugeordneten multiplikativen Form

$$F(\omega_1(z_1, z_2), \omega_2(z_1, z_2)) = K(z_1, z_2) = V(z_1, z_2)\, U(z_1, z_2).$$

Wenn $F(\omega_1, \omega_2)$ eine ganze Form ist, welche in allen Spitzen verschwindet, so gilt für die unverzweigte Form $U(z_1, z_2)$ eine Darstellung

$$U(z_1, z_2) = \prod_{\substack{i=1 \\ l_i = \infty,\ \bar{z}_i = 0}}^{n} P(z, e_i)\, U^*(z_1, z_2) = Q(z_1, z_2)\, U^*(z_1, z_2),$$

wo $U^*(z_1, z_2)$ wieder eine ganze unverzweigte multiplikative Form auf $\mathfrak{T}$ bezeichnet; Dimension $-\eta^*$ und Multiplikatorsystem χ^* von $U^*(z_1, z_2)$ sind gleichfalls durch Dimension und Multiplikatorsystem von $F(\omega_1, \omega_2)$ eindeutig bestimmt. Wir betrachten jetzt eine solche ganze automorphe Form $F_1(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1, \omega_2)$, welche in allen Spitzen verschwindet und deren Multiplikator v für alle parabolischen L aus Γ die Gleichung $|v(L)| = 1$ befriedigt. Von der automorphen Form $F_2(\omega_1, \omega_2)$ wollen wir voraussetzen, daß $F_2(\omega_1, \omega_2)$ in allen elliptischen Ecken und parabolischen Spitzen regulär sei. Die Bedingung, daß $F_2(\omega_1, \omega_2)$ zu $F_1(\omega_1, \omega_2)$ konjugiert sei, besagt nach (44) genau, daß $U^*(z_1, z_2)$ und $U_2(z_1, z_2)$ reziproke multiplikative Formen auf $\mathfrak{T}$ sind.

Nach dem Vorangehenden ist klar, daß die Anzahl $\bar{g}$ linear unabhängiger ganzer, in allen Spitzen verschwindender automorpher Formen der Dimension $-r$ und des Multiplikatorsystems $v(L)$ (in inhomogener Schreibweise) mit der Anzahl linear unabhängiger ganzer unverzweigter multiplikativer Formen $U^*(z_1, z_2)$ der Dimension $-\eta^*$ und des Multiplikatorsystems χ^* (auf $\mathfrak{T}$) übereinstimmt. Für diese letztere Anzahl gilt aber ein fundamentaler Satz von Ritter, welcher aussagt: Sie ist um genau 1 kleiner als die Minimalzahl h wirklicher, frei beweglicher Pole der in allen Verzweigungspunkten regulären reziproken multiplikativen Formen $U_2(z_1, z_2)$ auf $\mathfrak{T}$. Bezüglich dieses Ritterschen Satzes sei bemerkt: Die Beweglichkeit der $h' \geqq h$ Pole eines Systems von Formen kann dadurch eingeschränkt sein, daß in dem Raum von h' komplexen Dimensionen, den ein System von h' voneinander unabhängigen, auf $\mathfrak{T}$ variablen Punkten erfüllt, eine analytische Ausnahmemannigfaltigkeit von höchstens $h' - 1$ komplexen Dimensionen existiert, welche für das System der h' Pole verboten ist.

Damit ist ersichtlich, daß h die Minimalzahl wirklicher mit der obigen Einschränkung frei beweglicher Pole der zu $F_1(\omega_1, \omega_2)$ konjugierten, in allen Ecken und Spitzen regulären automorphen Formen $F_2(\omega_1, \omega_2)$ angibt. Diese Formen sind alle die und nur die, deren Dimension $-r' = r - 2$ und deren Multiplikatorsystem in inhomogener Schreibweise $\tilde{v}(L) = \frac{1}{v(L)}$ ist.

Es ist nun fixiert, was die Gleichung $h = \bar{g} + 1$ innerhalb der Theorie der automorphen Formen besagt. Diese Gleichung wird im nächsten Paragraphen eine fundamentale Rolle spielen. Wir formulieren deshalb

Satz 5 (Ritter). Es gilt, wenn $\bar{g}$ und h die soeben angegebene Bedeutung haben, die Gleichung

$$h = \bar{g} + 1.$$

§ 5.

Der nun auf dieser Grundlage zu erbringende Beweis für die Darstellbarkeit aller automorphen Formen durch die Reihen

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$$

stützt sich auf einen schon von Ritter benutzten Ansatz, der wohl zum erstenmal in der Riemannschen Theorie der algebraischen Funktionen auftritt. Der Beweis zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile beweisen wir

Satz 6. Sei Γ eine Grenzkreisgruppe mit endlich vielen Erzeugenden. Jede automorphe Form $f(\tau)$, deren Dimension $-r < -2$ ist, läßt sich in der Gestalt

$$f(\tau) = A_0(\tau) + \tilde{G}_{-r}$$

darstellen, wo $A_0(\tau)$ eine Linearkombination von endlich vielen der $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$ und $\tilde{G}_{-r}$ eine ganze Form ist, welche in allen parabolischen Spitzen verschwindet.

Bei der Begründung dieser Aussage brauchen wir uns der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Ritterschen Theorie nicht zu bedienen. Sobald Γ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, ist Satz 6 eine triviale Folge von bereits vorher bewiesenen Sätzen. In den anderen Fällen scheint der Nachweis des entsprechenden Satzes wesentlich schwieriger zu sein.

Es seien vorgelegt: eine beliebige Grenzkreisgruppe Γ, eine reelle Zahl $r > 2$ und ein Multiplikatorsystem $v(L)$ in inhomogener Schreibweise, so daß $|v(L)| = 1$ für alle L aus Γ erfüllt ist. Als automorphe Form schlechthin bezeichnen wir fortan eine inhomogen geschriebene automorphe Form der Gruppe Γ von der Dimension $-r$ für das Multiplikatorsystem $v(L)$.

Hilfssatz d). Es sei g eine natürliche Zahl, ω ein Punkt von $\mathfrak{D}$ im Innern von $\mathfrak{H}$. Wenn ω eine elliptische Ecke von $\mathfrak{D}$ ist, so gelte für jedes $E = \begin{pmatrix} e_0 & e_3 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix}$ aus Γ, welches ω festläßt, die Gleichung

$$v(E)(e_1\omega + e_2)^{r-2g} = 1.$$

Dann gibt es zu jedem $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$, für welches $-\frac{a_2}{a_1}$ parabolischer

Fixpunkt von Γ ist, eine rationale Funktion $R(t)$, so daß

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$$

in allen Punkten von $\mathfrak{D}$, einschließlich der parabolischen Spitzen, mit einziger Ausnahme des Punktes ω regulär ist. Dabei wird das Verhalten in einer Variablen t^* gemessen, welche folgendermaßen definiert ist: In allen Punkten, welche nicht elliptische Ecken von $\mathfrak{R}$ sind, sei t^* gleich der Ortsuniformisierenden t. In einer elliptischen Ecke ε sei $t^* = \tau - \varepsilon$. Im Punkte $\tau = \omega$ hat $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$ einen Pol g-ter Ordnung; in allen parabolischen Spitzen von $\mathfrak{R}$ verschwindet $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$.

Man überzeugt sich unter Benutzung der Ausführungen des § 2, daß der Satz für

$$R(t) = \frac{t^m}{(t-q)^g}$$

zutrifft, wo $q = e^{2\pi i \frac{A\omega}{\vartheta}}$ und m eine beliebige natürliche Zahl ist; wenn $\varkappa\left(-\frac{a_2}{a_1}\right) > 0$ ist, darf m auch $= 0$ sein. Der Satz bleibt richtig, wenn man $R(t)$ durch $F(t) = R(t) + F_1(t)$ ersetzt, falls $F_1(t)$ im Innern und auf dem Rande des t-Einheitskreises regulär ist.

Hilfssatz e). Es sei $s = -\frac{a_2}{a_1}$ eine parabolische Spitze von $\mathfrak{D}$, g_1 eine natürliche Zahl, falls $\varkappa(s) > 0$, und g_1 eine nicht negative ganze rationale Zahl, falls $\varkappa(s) = 0$. Dann ist

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; t^{-g_1}),$$

gemessen in der Variablen t^*, im Innern von $\mathfrak{H}$ und allen von s verschiedenen Spitzen von $\mathfrak{D}$ durchweg regulär, und verschwindet sogar in diesen Spitzen. In der Spitze s aber hat die Entwicklung

$$\mathfrak{P}\left(e^{2\pi i \frac{A\tau}{\vartheta}}\right) = (a_1\tau + a_2)^r e^{-2\pi i \frac{A\tau}{\vartheta}\varkappa} G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; t^{-g_1})$$

nach Potenzen von $t = e^{2\pi i \frac{A\tau}{\vartheta}}$ bei $t = 0$ einen Pol der Ordnung g_1, wenn $g_1 > 0$; wenn dagegen $\varkappa(s) = 0$ und $g_1 = 0$, so ist $\mathfrak{P}(t)$ bei $t = 0$ regulär und von 0 verschieden.

Zusammenfassend erkennen wir daher

Hilfssatz f). Sei w ein beliebiger Punkt im Innern oder auf dem Rande von $\mathfrak{D}$ mit der Einschränkung, daß w parabolischer Fixpunkt von Γ sein soll, falls w reell ist. Sei t^* die oben eingeführte „maßgebende Variable“ für den Punkt w,

$$\Phi(t^*) = \sum_{m=-g}^{m_0} C_m t^{*m}$$

mit konstanten C_m, wo $m_0 = 0$ oder -1, je nachdem w eine parabolische Spitze mit $\varkappa = 0$ ist oder nicht, und $g \geqq m_0$. Wenn es überhaupt eine automorphe Form gibt, welche im Punkte w mit $\Phi(t^*)$ bis auf Glieder von höherer als m_0-ter Ordnung übereinstimmt (und das ist stets der Fall, außer wenn gerade w eine elliptische Ecke von $\mathfrak{D}$ ist), so gibt es ein $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R(t))$, welches das tut, und überdies

a) in allen von w verschiedenen Punkten von $\mathfrak{D}$, gemessen in t^*, regulär ist,

b) in allen von w verschiedenen parabolischen Spitzen von $\mathfrak{D}$ verschwindet.

Dabei ist $R(t)$ eine endliche Linearkombination der rationalen Funktionen, wie sie, je nach der Lage von w, in Hilfssatz d) bzw. e) auftreten.

Hieraus folgt Satz 6 sofort für solche automorphen Formen, welche nur in endlich vielen im Innern von $\mathfrak{H}$ gelegenen Punkten von $\mathfrak{D}$ unendlich werden und nur in endlichen vielen parabolischen Spitzen von $\mathfrak{D}$ nicht verschwinden. Insbesondere ist für solche Gruppen Γ, die ein endliches Erzeugendensystem besitzen, der Satz vollständig bewiesen.

Es sollen jetzt noch kurz einige Betrachtungen über die Frage der linearen Unabhängigkeit eines Systems automorpher Formen mitgeteilt werden. Alle Überlegungen, die sich in der neueren Literatur[15]) über dieses Problem finden, gründen sich im Falle der durch absolut konvergente Reihen dargestellten automorphen Formen auf das folgende Prinzip. Es sei in einem Gebiet, etwa dem Bereich $\overline{\mathfrak{D}}$, ein System von endlich oder unendlich vielen analytischen Funktionen gegeben. Zu jeder Funktion $f(\tau)$ gebe es einen Punkt τ_0 in $\overline{\mathfrak{D}}$ derart, daß die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(\tau)$ in τ_0 ein Glied enthält, welches in der Entwicklung einer beliebigen anderen Funktion $f^*(\tau)$ des Systems nicht auftritt. Dann kann zwischen endlich oder abzählbar vielen Funktionen des Systems keine lineare homogene Relation bestehen, deren linke Seite in der Umgebung jedes solchen Punktes τ_0 gleichmäßig konvergiert.

Das im folgenden benutzte Prinzip ist etwas spezieller: Die sämtlichen Funktionen $f(\tau)$ des Systems seien bis auf Pole in $\overline{\mathfrak{D}}$ regulär. Als Ordnung von $f(\tau)$ in einem Punkte τ_1 bezeichnen wir den Exponenten der niedrigsten Potenz in der Entwicklung von $f(\tau)$ nach der maßgebenden Variablen t^* im Punkte τ_1. Wir setzen jetzt voraus: Zu jeder Funktion $f(\tau)$ des Systems gebe es einen Punkt $\tau_0 = \tau_0(f)$ derart, daß die Ordnung m von $f(\tau)$ in τ_0 von den Ordnungen aller anderen Funktionen des Systems

[15]) E. Hecke, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Annalen 97 (1927), S. 210; Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe usw., Hamburger Abhandlungen 5, S. 199.

in τ_0 verschieden ist, und daß es zu jedem $m' < m$ höchstens eine Funktion im System gibt, deren Ordnung in τ_0 gleich m' ist. Dann kann eine lineare homogene Relation zwischen endlich oder abzählbar vielen Funktionen $f_\nu(\tau)$ des Systems nicht bestehen, wenn die linke Seite in einer Umgebung jedes Punktes $\tau_0(f_\nu)$ gleichmäßig konvergiert, und wenn die Ordnungen der $f_\nu(\tau)$ in den Punkten $\tau_0(f_\nu)$ nach unten beschränkt sind.

Wir erkennen nun, daß ein System dieser Art vorliegt, wenn wir folgende Funktionen betrachten:

a) Sei ω ein nicht reeller Punkt von $\mathfrak{D}$, g eine natürliche Zahl; wenn ω elliptischer Fixpunkt von Γ ist, so gelte für jedes E mit $E\omega = \omega$, $\underline{E} = \{e_1, e_2\}$, daß $v(E)(e_1\omega + e_2)^{r-2g} = 1$ ist; wir bestimmen in A eine beliebige unimodulare reelle Matrix, so daß $A^{-1}\infty = -\frac{a_2}{a_1}$ parabolischer Fixpunkt von Γ ist, in m eine beliebige natürliche Zahl (oder auch $m = 0$, falls $\varkappa\left(-\frac{a_2}{a_1}\right) > 0$), und setzen $q' = e^{2\pi i \frac{A\omega}{\vartheta}}$. Dann bilden wir für jedes solche ω und g die Funktion

$$f(\tau) = G_{-r}\left(\tau; v; A, \Gamma; \frac{t^m}{(t-q')^g}\right). \tag{46}$$

b) Sei s eine parabolische Spitze von $\mathfrak{D}$, unter S verstehen wir eine unimodulare reelle Matrix mit $S(s) = \infty$; g' sei eine natürliche Zahl; wenn die reelle Zahl $\varkappa(s) = 0$ ist, so sei auch $g' = 0$ gestattet. Wir bilden für jedes solche s und g' die Funktion

$$f(\tau) = G_{-r}(\tau; v; S, \Gamma; t^{-g'}). \tag{47}$$

Dann gilt

Satz 7. Die sämtlichen Funktionen $f(\tau)$ in (46) und (47) sind in dem oben angegebenen Sinne linear unabhängig voneinander. — Der Satz gilt auch, wenn Γ kein endliches Erzeugendensystem besitzt.

Wir beginnen jetzt die Auseinandersetzung des Beweises für die Darstellbarkeit der ganzen in allen Spitzen verschwindenden automorphen Formen durch die Reihen G_{-r}. Bei diesem Beweis wird die Tatsache, daß Γ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, an entscheidender Stelle benutzt.

Es sei $q = e^{2\pi i \frac{A\omega}{\vartheta}}$, $A\omega = \omega_0$, A eine unimodulare reelle Matrix mit der Eigenschaft, daß $-\frac{a_2}{a_1}$ parabolische Spitze für die Gruppe Γ ist; $m \geq 0$ und $g > 0$ seien ganze rationale Zahlen, ω liege im Innern von $\mathfrak{H}$. Die Funktion

$$G_{-r}\left(\tau; v; A, \Gamma; \frac{t^m}{(t-q)^g}\right)$$

hat im allgemeinen einen Pol der Ordnung g in den Punkten

$$\omega_1 = L\omega = LA^{-1}\omega_0,$$

wo L die Gruppe Γ durchläuft. Der Koeffizient des Gliedes niedrigster Ordnung in der Entwicklung von W_M nach Potenzen von $\tau - \omega_1$ ist:

$$k(\omega_1) = \left(\frac{\vartheta}{2\pi i}\right)^g \frac{e^{2\pi i(m+\varkappa-g)\frac{A\omega}{\vartheta}}}{v(M)\,(m_1 M^{-1}\omega_0 + m_2)^{r-2g}} = \left(\frac{\vartheta}{2\pi i}\right)^g \frac{e^{2\pi i(m+\varkappa-g)\frac{A\omega}{\vartheta}}}{v(M)\,\sigma(M, M^{-1})\,(m_1'\omega_0 + m_2')^{2g-r}},$$

wo $M = AL^{-1}$ und $M' = M^{-1}$ gesetzt wurde. Nun ist

$$v(M)\,\sigma(M, M^{-1}) = \frac{\varrho(M, M^{-1})}{v(M^{-1})} = \frac{\varrho(A, A^{-1})}{v(LA^{-1})\,\varrho(L, A^{-1})} = \frac{\varrho(A, A^{-1})}{v'_{A^{-1}}(LA^{-1})},$$

also

$$\frac{1}{v(M)\,\sigma(M, M^{-1})\,(m_1'\omega_0 + m_2')^{2g-r}} = \frac{1}{\varrho(A, A^{-1})} \cdot v'_{A^{-1}}(M')\,(m_1' A\omega + m_2')^{r-2g}$$

$$= \frac{\varrho(M', A;\, v'_{A^{-1}})}{\varrho(A, A^{-1};\, v)}\;\frac{v'_{A^{-1}}(L)\,(\gamma\omega + \delta)^{r-2g}}{v'_{A^{-1}}(A)\,(a_1\omega + a_2)^{r-2g}}.$$

Hier ist $v'_{A^{-1}}(A) = v(A)$ und

$$\frac{\varrho(M', A;\, v'_{A^{-1}})\,v'_{A^{-1}}(L)}{\varrho(A, A^{-1};\, v)} = \frac{v(L)\,\varrho(A, LA^{-1};\, v'_{A^{-1}})}{\varrho(A, A^{-1};\, v)} = v(L)\frac{\varrho(A, A^{-1}L;\, v)}{\varrho(A, A^{-1};\, v)} = v(L),$$

so daß schließlich

$$k(\omega_1) = \bar{v}(A)\,(a_1\omega + a_2)^{2g-r}\left(\frac{\vartheta}{2\pi i}\right)^g \frac{e^{2\pi i(m+\varkappa-g)\frac{A\omega}{\vartheta}}}{\bar{v}(L)\,(\gamma\omega + \delta)^{2g-r}},$$

wo $L = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ und allgemein $v(S)\,\bar{v}(S) = 1$ für jedes reelle unimodulare S gesetzt ist.

Wir führen nun die Funktion $F_{m,g}(\tau; v; A, \omega)$ durch die Gleichung

$$G_{-r}\left(\tau; v; A, \Gamma; \frac{t^m}{(t-q)^g}\right)$$

$$= \left(\frac{\vartheta}{2\pi i}\right)^g \bar{v}(A)\,(a_1\omega + a_2)^{2g-r}\, e^{2\pi i(m+\varkappa-g)\frac{A\omega}{\vartheta}}\, F_{m,g}(\tau; v; A, \omega)$$

ein. Das Verhalten dieser Funktion als Funktion von τ ist aus dieser Definitionsgleichung ersichtlich. Insbesondere weiß man: $F_{m,g}(\tau; v; A, \omega)$ verschwindet in allen Spitzen und hat im Innern von $\mathfrak{H}$ in den Punkten $\omega_1 = L\omega$ je einen Pol der Ordnung g mit dem Koeffizienten

$$k_1(\omega_1) = \frac{n}{\bar{v}(L)\,(\gamma\omega + \delta)^{2g-r}},$$

wenn nicht gerade ω elliptischer Fixpunkt von Γ ist. In diesem Falle ist dies dann und nur dann richtig, wenn es überhaupt eine automorphe Form

28*

gibt, welche in diesen Punkten einen Pol der Ordnung g hat. Dabei bedeutet n eine natürliche Zahl, nämlich

$n=1$, wenn $-I$ nicht in Γ und ω nicht elliptischer Fixpunkt ist,

$n=2$, wenn $-I$ in Γ und ω nicht elliptischer Fixpunkt ist,

$n=l$, wenn ω elliptischer Fixpunkt ist und l die Ordnung der zyklischen Gruppe der Matrizen von Γ angibt, welche ω fest lassen. Das Verhalten dieser Funktionen $F_{m,g}(\tau; v; A, \omega)$ als Funktionen von ω bei festem τ soll in dem Falle genauer untersucht werden, wo τ im Innern von $\mathfrak{H}$ liegt und nicht mit einer elliptischen Ecke zusammenfällt.

Man sieht zunächst: $F_{m,g}(\tau; v; A, \omega)$ ist im Innern der oberen Halbebene $\mathfrak{H}_\omega$ der komplexen Variablen ω bis auf eine diskrete Ausnahmemenge von Polen der Ordnung g in den Punkten $L_1\omega$ regulär, wo L_1 die Gruppe Γ durchläuft. Wir sehen ferner: $F_{m,g}(\tau; v; A, \omega)$ setzt sich bei Ausübung einer Substitution $L_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$ aus Γ auf die Variable ω so um, daß

$$\frac{F_{m,g}(\tau; v; A, L_1\omega)}{\bar{v}(L_1)(\gamma_1\omega+\delta_1)^{2g-r}} = F_{m,g}(\tau; v; A, \omega) + \Phi_0(\tau),$$

wo $\Phi_0(\tau)$ in den Punkten $L\omega$ einen Pol von höchstens $(g-1)$-ter Ordnung besitzt oder gar in diesen Punkten regulär ist. Offenbar ist $\Phi_0(\tau)$ als Funktion von τ eine automorphe Form, welche in allen Spitzen verschwindet und im Innern von $\mathfrak{H}$ abgesehen höchstens von den Punkten $L\omega$ regulär ist. Wir bemerken noch, daß diese Aussage stets richtig ist, nämlich auch stets dann, wenn ω elliptischer Fixpunkt für die Gruppe Γ ist.

Wir wollen nachher in dem speziellen Fall $g=1$ untersuchen, wie sich $F_{m,g}(\tau; v; A, \omega)$ verhält, wenn ω in eine parabolische Spitze s der Gruppe Γ hineinrückt. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst eine Transformationsformel, die es gestattet, die Spitze s nach ∞ zu schaffen. Sei B eine unimodulare reelle Matrix, $\underline{B} = \{b_1, b_2\}$. Es ist

$$\frac{F_{m,g}(B\tau; v; A, B\omega)}{v(B)(b_1\tau+b_2)^r\,\bar{v}(B)(b_1\omega+b_2)^{2g-r}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2\pi i}{\vartheta}\right)^g G_{-r}\left(B\tau; v; A, \Gamma; \frac{t^m}{(t-q')^g}\right) e^{-2\pi i(m+\varkappa-g)\frac{AB\omega}{\vartheta}}}{v(B)(b_1\tau+b_2)^r\,\bar{v}(A)(a_1B\omega+a_2)^{2g-r}\,\bar{v}(B)(b_1\omega+b_2)^{2g-r}}$$

$$= \left(\frac{2\pi i}{\vartheta}\right)^g \frac{G_{-r}\left(\tau; v_B'; AB, B^{-1}\Gamma B; \frac{t^m}{(t-q')^g}\right) e^{-2\pi i(m+\varkappa-g)\frac{AB\omega}{\vartheta}}}{\varrho(B,A;v)\,\varrho(A,B;\bar{v})\,\bar{v}(AB)(c_1\omega+c_2)^{2g-r}},$$

wo $\underline{AB} = \{c_1, c_2\}$, $q' = e^{2\pi i\frac{AB\omega}{-\vartheta}}$ gesetzt wurde. Hier ergibt sich

$$\bar{v}(AB)\cdot\frac{\varrho(A,B;\bar{v})}{\varrho(B,A;\bar{v})} = \bar{v}_B'(AB)$$

und so erhält man

$$\frac{F_{m,g}(B\tau;\, v;\, A,\, B\omega)}{(b_1\tau+b_2)^r\,(b_1\omega+b_2)^{2g-r}} = F_{m,g}(\tau;\, v_B';\, AB,\, \omega),$$

wo die letztere Funktion mit Hilfe der Gruppe $B^{-1}\Gamma B$ zu bilden ist. Ersetzen wir hierin A durch AB^{-1}, Γ durch $B\Gamma B^{-1}$, v durch $v'_{B^{-1}}$, so erhalten wir

$$(48)\qquad F_{m,g}(\tau;\, v;\, A,\, \omega) = \frac{F_{m,g}(B\tau;\, v'_{B^{-1}};\, AB^{-1},\, B\omega)}{(b_1\tau+b_2)^r\,(b_1\omega+b_2)^{2g-r}},$$

wo jetzt die Funktion rechts mit Hilfe der Gruppe $B\Gamma B^{-1}$ zu bilden ist.

Es sei von jetzt ab $g=1$ und m die kleinste nichtnegative ganze rationale Zahl, so daß $F_{m,1}(\tau;\, v;\, A,\, \omega)$ eine in allen Spitzen verschwindende automorphe Form von τ ist. Sei also

$$m = 0, \quad \text{wenn} \quad \varkappa\left(-\frac{a_2}{a_1}\right) > 0,$$

$$m = 1, \quad \text{wenn} \quad \varkappa\left(-\frac{a_2}{a_1}\right) = 0$$

ist. Wir lassen die Indizes an dem Funktionszeichen $F_{m,1}$ fort, wenn g und m diese Werte haben. Wir untersuchen jetzt das Verhalten der $F(\tau;\, v;\, A,\, \omega)$, wenn ω in eine Spitze s von $\mathfrak{R}$ rückt. Nach Gleichung (48) können wir uns auf den Fall $s=\infty$ beschränken. Hier trennen wir folgende Fälle:

1. $a_1 = 0$. Dann ist $A = \pm U^{\xi} C_\lambda$, ξ reell, $\lambda > 0$

$$q = e^{2\pi i \frac{\omega}{\lambda^2\vartheta}}\, e^{2\pi i \frac{\xi}{\vartheta}}.$$

Man sieht, daß

$$\left| e^{2\pi i \frac{M\tau}{\vartheta}} - e^{2\pi i \frac{A\omega}{\vartheta}} \right|$$

zuletzt nach unten beschränkt ist, wenn $\mathfrak{Im}\,\omega \to +\infty$. Es ist also $G_{-r}\left(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma;\, \frac{t^m}{t-q}\right)$ bei $q=0$ regulär und der Wert dieser Funktion für $q=0$ ist $G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma;\, t^{m-1})$. Da

$$F(\tau;\, v;\, A,\, \omega) = \frac{2\pi i}{\vartheta}\, \frac{G_{-r}\left(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma;\, \frac{t^m}{t-q}\right)}{\bar{v}(A)\, a_2^{2-r}}\, e^{2\pi i(1-m-\varkappa)\frac{\omega+\lambda^2\xi}{\lambda^2\vartheta}},$$

so verhält sich $F(\tau;\, v;\, A,\, \omega)$ im Unendlichen wie eine dort in der Ortsuniformisierenden reguläre automorphe Form von ω.

2. $a_1 \neq 0$. Dann geht $A\omega \to \frac{a_0}{a_1}$, wenn $\omega \to \infty$. Wir beschreiben um den Punkt $s' = \frac{a_0}{a_1}$ einen Kreis $\mathfrak{K}_{s'}$ vom Radius $\frac{1}{4}\vartheta$. Sobald $M\tau$

außerhalb dieses Kreises und der Kreise $U^{h\vartheta}\,\mathfrak{K}_{s'}$ (h ganz) liegt, ist

$$\left| e^{2\pi i \frac{M\tau}{\vartheta}} - q \right| \geqq \xi_1, \quad \xi_1 > 0$$

nach unten beschränkt, und zwar gleichmäßig für alle ω, für die $A\omega$ in dem Kreise $\mathfrak{K}'_{s'}$ vom Radius $\frac{1}{8}\vartheta$ um s' liegt. Wenn aber $M\tau$ in einem der Kreise $U^{h\vartheta}\,\mathfrak{K}_{s'}$ liegt, so können wir durch Wahl des Systems $\mathfrak{S}(A)$ zunächst erreichen, daß $M\tau$ im Kreise $\mathfrak{K}_{s'}$ selbst liegt. Dann aber ist eine Ungleichung

$$\left| e^{2\pi i \frac{M\tau}{\vartheta}} - q \right| \geqq \xi_2 \,|M\tau - A\omega|, \qquad \xi_2 > 0$$

gleichmäßig für alle ω mit $A\omega$ in $\mathfrak{K}'_{s'}$ erfüllt. Nun gilt für $M = AL$ aus $\mathfrak{S}(A)$

$$\frac{1}{M\tau - A\omega} = \frac{(a_1\omega + a_2)(a_1 L\tau + a_2)}{L\tau - \omega} = (a_1\omega + a_2)\left(a_1 + \frac{a_1\omega + a_2}{L\tau + \omega}\right).$$

Wenn hier $\omega \to \infty$ in einem Vertikalhalbstreifen beschränkter Breite, so ist die zweite Klammer zuletzt beschränkt, weil $\mathfrak{Im}\, L\tau$ beschränkt ist. Daher gilt zuletzt

$$G_{-r}\left(\tau; v; A, \Gamma; \frac{t^m}{t-q}\right)\Big| < C_1\,|a_1\omega + a_2| \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{1}{|m_1\tau + m_2|^r} < C_2\,|a_1\omega + a_2|,$$

$$|F(\tau; v; A, \omega)| < C_3\,|a_1\omega + a_2|^{r-1} < C_4\,|\omega|^{r-1}.$$

Aus dieser Abschätzung und der Transformationsformel (48) folgt sofort die entsprechende Aussage über das Verhalten von $F(\tau; v; A, \omega)$, wenn ω in eine beliebige Spitze s von $\mathfrak{N}$ rückt. Es gilt, falls $B(s) = \infty$, bei Annäherung von ω an $s = -\frac{b_2}{b_1}$

$$|(b_1\omega + b_2)^{2-r} F(\tau; v; A, \omega)| < C_5\,|B\omega|^{r-1}.$$

Wir beweisen jetzt

Hilfssatz g). Seien $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$ beliebige Punkte im Innern von $\mathfrak{H}$, welche sämtlich von den elliptischen Ecken von $\mathfrak{N}$ verschieden sind, $A_1, \ldots, A_\nu$ unimodulare reelle Matrizen derart, daß $A_i^{-1}(\infty)$, $1 \leqq i \leqq \nu$, parabolische Fixpunkte von Γ sind. Es habe die Funktion

$$\Lambda(\omega) = \sum_{i=1}^{\nu} K_i F(\tau_i; v; A_i, \omega),$$

wo die K_i von ω nicht abhängen, die Invarianzeigenschaft III′, § 1 einer automorphen Form von ω der Dimension $-r' = r - 2$ für die Gruppe Γ und das Multiplikatorsystem $\tilde{v}(L) = \frac{1}{v(L)}$, d. h. es gelte für alle L aus Γ

$$\Lambda(L\omega) = \tilde{v}(L)(\gamma\omega + \delta)^{2-r}\Lambda(\omega).$$

Dann ist $A(\omega)$ wirklich eine in allen Ecken und Spitzen reguläre automorphe Form in ω von der Dimension $-r'$ für die Gruppe Γ und das Multiplikatorsystem $\tilde{v}(L)$.

Der Beweis liegt nach den Abschätzungen über das Verhalten von $F(\tau; v; A, \omega)$, wenn ω in eine Spitze rückt, auf der Hand. Man wendet die am Ende von § 2 zur Untersuchung des Verhaltens von $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F)$ in den Spitzen benutzte Schlußweise an und erhält sofort das gewünschte Resultat.

Dieser Hilfssatz setzt uns nun in den Stand, den Beweis für die Darstellbarkeit aller ganzen automorphen Formen, die in den parabolischen Spitzen verschwinden, durch die Reihen G_{-r} im Prinzip genau so zu führen, wie er bei Ritter I und in dem Lehrbuch von Klein und Fricke über automorphe Funktionen zu finden ist. Der Vollständigkeit halber sei es gestattet, den Beweis hier nochmals zu reproduzieren. Wir beginnen mit dem

Hilfssatz h). Für jedes L aus Γ ist

$$H_L(\tau; v; A, \omega) = \frac{F(\tau; v; A, L\omega)}{\tilde{v}(L)(\gamma\omega+\delta)^{r'}} - F(\tau; v; A, \omega)$$

eine ganze automorphe Form von τ, welche in den parabolischen Spitzen verschwindet. Wenn es nun überhaupt eine ganze in allen Spitzen verschwindende automorphe Form gibt, so gilt insbesondere: $H_L(\tau; v; A, \omega)$ kann nicht für alle L identisch in τ und ω verschwinden.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist klar. Wäre nun

$$H_L(\tau; v; A, \omega) = 0$$

identisch in τ und ω und für alle L aus Γ, so wäre $F(\tau; v; A, \omega)$ eine in allen Ecken und Spiten reguläre automorphe Form der Dimension $-r'$ für das Multiplikatorsystem $\tilde{v}(L)$, die in dem willkürlichen Punkt τ einen Pol erster Ordnung besitzt. Also wäre die in § 4 eingeführte Zahl $h=1$, d. h. $\bar{g}=0$, q. e. d.

Nach Hilfssatz h) gibt es also, falls $\bar{g}>0$, ein L aus Γ und einen ω-Wert, derart, daß $H_L(\tau; v; A, \omega)$ eine ganze in allen Spitzen verschwindende automorphe Form von τ ist, welche nicht identisch verschwindet. Es bezeichne nun $\mathfrak{W}$ die lineare Schar derjenigen ganzen in allen Spitzen verschwindenden automorphen Formen von τ, welche sich als Linearkombination der Funktionen $H_L(\tau; v; A, \omega)$ darstellen lassen. w sei die Dimension der Schar $\mathfrak{W}$ und

$$P_\nu(\tau), \quad 1 \leqq \nu \leqq w$$

ein volles System linear unabhängiger Elemente von $\mathfrak{W}$. Ersichtlich gilt

$$w \leqq \bar{g}.$$

Sind $\tau_1, \ldots, \tau_g$ beliebige Punkte im Innern von $\mathfrak{H}$, so wollen wir das Wertsystem der $\tau_1, \ldots, \tau_g$ ein erlaubtes Wertsystem nennen, wenn alle τ_i von den elliptischen Ecken des Netzes $\mathfrak{N}$ verschieden sind. Den Raum der erlaubten Wertsysteme bezeichnen wir mit $\mathfrak{Q}_g$. Jedem τ_i, $1 \leqq i \leqq g$, sei eine unimodulare reelle Matrix A_i zugeordnet, derart, daß $A_i^{-1}(\infty)$ eine parabolische Spitze von $\mathfrak{N}$ ist. Wir versuchen nun, eine Linearkombination

$$\Lambda(\omega) = \sum_{i=1}^{g} K_i F(\tau_i; v; A_i, \omega)$$

mit von ω unabhängigen K_i so zu bestimmen, daß für alle L aus Γ

$$\frac{\Lambda(L\omega)}{\bar{v}(L)(\gamma\omega+\delta)^{r'}} = \Lambda(\omega) \tag{49}$$

gilt. Nach Hilfssatz g) wäre damit $\Lambda(\omega)$ eine automorphe Form von ω der Dimension $-r'$ für die Gruppe Γ und das Multiplikatorsystem $\bar{v}(L)$. (49) bedeutet nun, daß für alle L aus

$$\sum_{i=1}^{g} K_i H_L(\tau_i; v; A_i, \omega) = 0 \tag{50}$$

sein muß. Diese Gleichungen sind offenbar sämtlich erfüllt, wenn die K_i das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{g} K_i P_\nu(\tau_i) = 0, \qquad 1 \leqq \nu \leqq w \tag{51}$$

befriedigen. Es sei $g \geqq w+1$; dann schreiben wir die Gleichungen (51) in der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{w} K_i P_\nu(\tau_i) = -\sum_{w+1}^{g} K_i P_\nu(\tau_i), \qquad 1 \leqq \nu \leqq w.$$

Man überzeugt sich nun durch Anwendung vollständiger Induktion leicht davon, daß keine der Determinanten

$$D = |P_\nu(\tau_{i_h})|, \qquad \begin{matrix} 1 \leqq \nu \leqq w, \\ 1 \leqq h \leqq w, \end{matrix} \qquad 1 \leqq i_h \leqq g,$$

in einer vollen Umgebung irgendeines erlaubten Wertsystems identisch verschwinden kann. Die Ausnahmemannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}$, auf der mindestens eine der Determinanten D verschwindet, ist analytisch und hat höchstens $g-1$ komplexe Dimensionen. Ist $g = w+1$, so kann man für beliebig fixiertes $K_g \neq 0$ das Gleichungssystem (51) auf $\mathfrak{Q}_g - \mathfrak{Y}$ durch solche Werte K_i, $1 \leqq i \leqq g$, lösen, welche sämtlich nicht verschwinden. Damit ist aber erkannt, daß die Funktion $\Lambda(\omega)$ eine in allen Ecken und Spitzen reguläre automorphe Form in ω von der Dimension $-r'$ für die Gruppe Γ und das Multiplikatorsystem $\bar{v}(L)$ ist, welche in den Punkten τ_i, $1 \leqq i \leqq g$, g auf $\mathfrak{Q}_g - \mathfrak{Y}$ frei bewegliche Pole besitzt.

Die Minimalzahl der im Sinne von § 4 frei beweglichen Pole einer in allen Ecken und Spitzen regulären automorphen Form von der Dimension $-r'$ und dem Multiplikatorsystem $\tilde{v}(L)$ ist also

$$h \leqq g = w + 1.$$

Aus Satz 5 folgt $\bar{g} \leqq w$, daher ist wegen $w \leqq \bar{g}$ $\bar{g} = w$, q. e. d.

Wir formulieren diese Tatsache als

Satz 8. Sei Γ eine Grenzkreisgruppe mit endlich vielen Erzeugenden. Jede automorphe Form einer Dimension $-r < -2$, welche zu einem Multiplikatorsystem $v(L)$ mit der Eigenschaft $|v(L)| = 1$ für alle L aus Γ gehört, läßt sich durch eine Reihe $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$ darstellen, wo $R(t)$ eine rationale Funktion von t bezeichnet, welche auf dem Rande des t-Einheitskreises regulär ist.

Damit ist der Hauptsatz der Theorie bewiesen. Wir stellen im folgenden noch einige Tatsachen zusammen, welche sich aus der bisher entwickelten Theorie ablesen lassen. Zunächst gilt

Satz 9. Bestimmt man nach § 3 die Multiplikatoren $v(L)$ als stetige Funktionen von r für $r > 2$, so ist jede der in § 2 eingeführten Reihen $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; F)$ eine stetige Funktion von r. Das gilt auch für Grenzkreisgruppen mit unendlich vielen Erzeugenden. Es ist indessen zu beachten, daß dabei die Ungleichung $0 \leqq \varkappa < 1$ im allgemeinen nicht erhalten bleibt, wenn man die Funktion $F(t)$ festhält.

Hieraus und aus Satz 8 schließt man

Satz 10. Wenn Γ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, und der Multiplikator $v(L) = v_r(L)$ nach § 3 als stetige Funktion der reellen Variablen $r > 2$ so bestimmt wird, daß $|v_r(L)| = 1$ für alle L aus Γ erfüllt ist, so gibt es eine stetige Funktion $\Psi(r)$ der reellen Variablen r derart, daß $\Psi(r)$ für jedes feste r eine automorphe Form der Dimension $-r$ für das Multiplikatorsystem $v_r(L)$ darstellt. Insbesondere kann man stets eine solche Funktion $\Psi(r)$ angeben, welche für ein bestimmtes $r = r_0 > 2$ eine beliebig gegebene automorphe Form darstellt.

Wir beschäftigen uns ferner mit der Frage nach der Darstellung solcher automorpher Formen, deren Multiplikatorsystem die Gleichung $|v(L)| = 1$ nicht für alle L aus Γ erfüllt. Sei $v_1(L)$ ein beliebiges Multiplikatorsystem und $|v_1(P)| = 1$ für alle parabolischen P aus Γ. Wir setzen

$$v(L) = \frac{v_1(L)}{|v_1(L)|};$$

die Gleichung $|v(L)| = 1$ ist dann für alle L aus Γ erfüllt. Ist $f_1(\tau)$ eine automorphe Form der Dimension $-r$ für das Multiplikatorsystem $v_1(L)$, so gibt es nach Ritter eine automorphe Form $f(\tau)$ derselben Dimension

für das Multiplikatorsystem $v(L)$, deren unverzweigter Teil mit dem unverzweigten Teil von $f_1(\tau)$ sämtliche Nullstellen und Pole gemein hat. Da die Verzweigungsfaktoren nach Voraussetzung übereinstimmen, so ist der Quotient $\frac{f_1(\tau)}{f(\tau)}$ überall endlich, von 0 verschieden und unverzweigt, also die Exponentialfunktion eines Integrals erster Gattung.

Wenn man also Darstellungen für die sämtlichen Integrale erster Gattung des der Gruppe Γ zugeordneten algebraischen Gebildes besitzt, so erhält man durch diese Beziehung Darstellungen aller automorphen Formen einer beliebigen Dimension unterhalb -2, welche zu einem beliebigen Multiplikatorsystem $v(L)$ mit $|v(P)| = 1$ für alle parabolischen P aus Γ gehören.

Es soll zuletzt noch für den Fall, daß Γ mit der Hauptkongruenzgruppe N-ter Stufe $\Gamma(N)$ identisch ist, die Entwicklung der Funktionen

$$G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma(N);\, t^m)$$

nach Potenzen von $e^{2\pi i \frac{\tau}{N}}$ in der Umgebung der Spitze ∞ angegeben werden. Wir können annehmen, daß $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ ganzzahlige Elemente besitzt. Wir setzen zur Abkürzung

$$\varkappa(\infty) = \varkappa,$$

$$\varkappa\left(-\frac{a_2}{a_1}\right) + m = \lambda,$$

$\delta(A) = 1$, wenn für ein ganzes ξ und eines der beiden Vorzeichen

$$\pm U^{\xi} \subset \mathfrak{S}(A),$$

$\delta(A) = 0$ sonst,

$$\sigma_{m_1} = e^{\pi i r \frac{1 - \operatorname{sgn} m_1}{2}} \quad \text{für} \quad m_1 \neq 0,$$

$$v(M) = v(m_1, m_2) \quad \text{falls} \quad M = \{m_1, m_2\},$$

$$W_{m_1}(n) = \sum_{\substack{j \bmod m_1 N \\ j \equiv a_3\,(N),\, (j, m_1) = 1}} \frac{1}{v(m_1, j)}\, e^{2\pi i \frac{(n+\varkappa) j + \lambda k_1}{m_1 N}},$$

wo $k_1 \equiv a_0(N)$ und $j k_1 \equiv 1 + a_3 m_1 \pmod{m_1 N}$. Dann gilt

$$G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma(N);\, t^m) = \delta(A) \frac{e^{2\pi i \lambda \frac{\tau + \xi}{N}}}{v(\pm U^{\xi})(\pm 1)^r} \tag{52}$$

$$+ \frac{(-2\pi i)^r}{N^r \cdot \Gamma(r)} \sum_{n + \varkappa > 0} (n + \varkappa)^{r-1} e^{2\pi i (n+\varkappa) \frac{\tau}{N}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-4\pi^2 \lambda \frac{n+\varkappa}{N^2}\right)^m}{\binom{m+r}{m} (m!)^2} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 (N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n)}{|m_1|^{r+2m}},$$

wo $(-2\pi i)^r = (2\pi)^r e^{-\frac{\pi i r}{2}}$.

§ 6.

1. Ein neues Erzeugungsprinzip für automorphe Formen.

Ich möchte in diesem Zusammenhang noch auf ein anderes Erzeugungsprinzip für automorphe Formen hinweisen, das, wie ich im folgenden am Beispiel der Kongruenzgruppen $\Gamma(N)$ zeigen will, neue Darstellungen automorpher Formen liefert. Dieses Erzeugungsprinzip gründet sich auf die folgende Tatsache, die Herr Hecke in seinen Vorlesungen über Modulfunktionen erwähnt hat: Wenn man in den von Herrn Hecke untersuchten Eisensteinreihen aus der Theorie der Hilbertschen Modulgruppe eines reellen quadratischen Zahlkörpers[16]) zwischen den beiden unabhängigen Variablen τ und τ' eine geeignete lineare Beziehung stiftet, so erhält man Modulformen einer Variablen von geradzahliger Dimension, die zu einer gewissen Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ gehören.

Ich möchte im folgenden zeigen, daß dieser Ansatz einer erheblichen Verallgemeinerung nach zwei Richtungen fähig ist. Erstens kann man auf diesem Wege automorphe Formen einer jeden $\Gamma(N)$ und einer jeden reellen Dimension < -4 für ein beliebiges Multiplikatorsystem $v(L)$ mit $|v(L)| = 1$ erhalten. Zweitens aber kann man sogar die bei den früher untersuchten Poincaréschen Reihen verwendete ortsuniformisierende Variable $t = e^{2\pi i \frac{M\tau}{\vartheta}}$ in sinngemäßer Weise analogisieren; die so entstehenden Reihen besitzen genau wie die Poincaréschen Reihen im Innern von $\mathfrak{H}$ frei bewegliche Pole in beliebiger Anzahl und Vielfachheit. Allerdings müssen sie, der Natur der Sache nach, in allen parabolischen Spitzen verschwinden. Von besonderem Interesse ist die augenfällige Beziehung dieser Reihen zu den Heckeschen ζ-Funktionen mit Größencharakteren eines reellen quadratischen Zahlkörpers.

Es sei N eine natürliche Zahl, $R(\sqrt{D})$ ein reeller quadratischer Zahlkörper, α_1, α_2 zwei Zahlen aus $R(\sqrt{D})$ derart, daß

$$(53) \qquad \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' > 0.$$

Wir setzen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \alpha_2' \end{pmatrix}$$

und allgemein

$$\mathsf{M} = \mathsf{A}L = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1' & \mu_2' \end{pmatrix},$$

---

[16]) E. Hecke, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen II, Hamburger Abhandlungen 3, S. 213.

wenn L aus $\Gamma(N)$. Wir sehen zunächst, daß für kein K aus $\Gamma(1)$

$$\{\mu_1, \mu_2\} K = \{\mu_1, \mu_2\}$$

sein kann; denn dann wäre die Gleichung

$$\mathsf{M} K = U^{\xi} \mathsf{M}$$

für ein reelles ξ erfüllt, $K = \mathsf{M}^{-1} U^{\xi} \mathsf{M}$ hätte den einzigen Fixpunkt $-\frac{\mu_2'}{\mu_1'}$, was der Voraussetzung (53) widerspricht. Wenn ferner für ein $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus $\Gamma(1)$

$$\{\mu_1, \mu_2\} S = \lambda \{\mu_1, \mu_2\}$$

ist, so schließt man hieraus

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Die linke Seite ist $\lambda^2 - \lambda(a + d) + 1$, also ist λ Einheit aus $R(\sqrt{D})$.

Wir wollen nun im folgenden annehmen, daß $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $-\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}$ Fixpunkte einer hyperbolischen Substitution mit der Matrix H aus $\Gamma(N)$ sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß α_1, α_2 teilerfremde ganze Zahlen aus $R(\sqrt{D})$ sind. Ist zunächst $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \Gamma(1)$, $\{\beta_1, \beta_2\} = \{\alpha_1, \alpha_2\} S$, so sind

$$-\frac{\beta_2}{\beta_1} = S^{-1}\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right), \quad -\frac{\beta_2'}{\beta_1'} = S^{-1}\left(-\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}\right)$$

Fixpunkte der hyperbolischen Substitution $S^{-1} H S$ von $\Gamma(N)$. Ferner gibt es dann wirklich eine Substitution, welche $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ in $\lambda\{\alpha_1, \alpha_2\}$ überführt; denn aus $H\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ folgt, wie man leicht feststellt,

$$\{\alpha_1, \alpha_2\} H^{-1} = \lambda \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

mit einem gewissen reellen λ. Dies ist übrigens mit

$$\{\beta_1, \beta_2\} S^{-1} H^{-1} S = \lambda \{\beta_1, \beta_2\}$$

gleichbedeutend. Ersichtlich ist λ eine Einheit aus $R(\sqrt{D})$, für die

$$\eta \eta' = +1, \quad \eta \equiv 1\,(N)$$

gilt.

Wir betrachten nun ein solches Teilsystem $\mathfrak{S}'(\mathsf{A})$ von Matrizen M der Nebengruppe $\mathsf{A}\Gamma(N)$, daß für keine zwei Exemplare M und $\mathsf{M}^* = \begin{pmatrix} \mu_1^* & \mu_2^* \\ \mu_1^{*\prime} & \mu_2^{*\prime} \end{pmatrix}$ aus $\mathfrak{S}'(\mathsf{A})$ eine Beziehung

$$\{\mu_1^*, \mu_2^*\} = \eta \{\mu_1, \mu_2\}$$

besteht, wo η eine Einheit aus $R(\sqrt{D})$ mit

$$\eta\,\eta' = +1 \quad \text{und} \quad \eta \equiv 1\,(N) \tag{54}$$

bezeichnet. $\mathfrak{S}'(\mathsf{A})$ soll ferner ein vollständiges Teilsystem innerhalb $\mathsf{A}\,\Gamma(N)$ von dieser Eigenschaft sein.

Die Gruppe $\mathfrak{E}$ der Einheiten (54), die wir „Einheiten mod N“ nennen wollen, ist zyklisch, falls $N > 2$. Da ferner aus

$$\{\mu_1, \mu_2\}\,K = \lambda\,\{\mu_1, \mu_2\}, \qquad K \subset \Gamma(N), \tag{55}$$

folgt, daß

$$\{\mu_1, \mu_2\}\,K^{-1} = \lambda^{-1}\{\mu_1, \mu_2\},$$

so ist K bei gegebenem λ durch diese Beziehung eindeutig bestimmt. Nun ist die Untergruppe $\mathfrak{E}'$ derjenigen Einheiten η mod N, welche als $\eta = \lambda$ mit irgendeinem K aus $\Gamma(N)$ in einer Beziehung (55) auftreten, auch zyklisch; wegen der soeben konstatierten (bei gegebenem M) eineindeutigen Beziehung zwischen $\eta = \lambda$ und K ist daher die Gruppe $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{\mathsf{M}}$ der K von $\Gamma(N)$, welche den Einheiten von $\mathfrak{E}'$ durch die Gleichung (55) zugeordnet sind, gleichfalls zyklisch.

Sei ε Erzeugende von $\mathfrak{E}'$. Es gibt also genau ein K_0 aus $\Gamma(N)$, so daß

$$\{\alpha_1, \alpha_2\}\,K_0 = \varepsilon\,\{\alpha_1, \alpha_2\},$$

und diese Gleichung ist mit

$$\{\beta_1, \beta_2\}\,S^{-1}K_0 S = \varepsilon\,\{\beta_1, \beta_2\}$$

gleichbedeutend. In den Fällen $N = 1, 2$ kann die Gruppe $\mathfrak{E}'$ zwei Basiselemente besitzen. Das Basiselement endlicher Ordnung ist dann -1, die zugeordnete Matrix $-I$.

Man bestätigt nun für die Systeme $\mathfrak{S}'(\mathsf{A})$ das Bestehen einiger einfacher Regeln, die den Aussagen (26) und (27) über die Systeme $\mathfrak{S}(A;\,\Gamma(N))$ entsprechen. Es gilt

$$\mathfrak{S}'(\mathsf{A})\,S = \mathfrak{S}'(\mathsf{A}S), \qquad S \subset \Gamma(1),$$
$$\mathfrak{S}'(\mathsf{A})\,L_0 = \mathfrak{S}'(\mathsf{A}), \qquad L_0 \subset \Gamma(N).$$

Um jetzt die angekündigten Reihen aufzustellen, verstehen wir unter $\lg \mathsf{M}\tau$ denjenigen Wert dieser vieldeutigen Funktion, für dessen Imaginärteil

$$0 < \arg \mathsf{M}\tau < \pi$$

gilt, sobald τ im Innern von $\mathfrak{H}$ liegt. Offenbar ist

$$\lg \mathsf{M}\tau = \lg(\mu_1\tau + \mu_2) - \lg(\mu_1'\tau + \mu_2') + 2k\pi i,$$

wo die ganze rationale Zahl k nur von $\operatorname{sgn}\mu_1$ und $\operatorname{sgn}\mu_1'$ abhängt, wenn die Zweige der Logarithmen rechts in der üblichen Weise (§ 1) fixiert sind.

Wenn nun K eine Matrix aus $\mathfrak{C}_{\mathsf{M}}$ ist, so daß

$$\mathsf{M}K = \begin{pmatrix} \eta\mu_1 & \eta\mu_2 \\ \eta^{-1}\mu_1' & \eta^{-1}\mu_2' \end{pmatrix}, \qquad \eta \subset \mathfrak{E}',$$

so folgt daher

$$\lg \mathsf{M}K\tau = \lg \mathsf{M}\tau + \lg \eta^2.$$

Die Größe

$$t = t_{\mathsf{M}} = e^{2\pi i \frac{\lg \mathsf{M}\tau}{\lg \varepsilon^2}}$$

bleibt mithin ungeändert, wenn man auf τ die Substitutionen von $\mathfrak{C}_{\mathsf{M}}$ anwendet. t variiert, wenn sich τ im Innern von $\mathfrak{H}$ bewegt, im Innern des Kreisringes

$$e^{-\frac{2\pi^2}{\lg \varepsilon^2}} < |t| < 1,$$

den wir fortan mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen.

Es sei nun $F(t)$ eine im Innern von $\mathfrak{R}$ bis auf endlich viele Pole und auf dem Rande von $\mathfrak{R}$ durchweg reguläre analytische Funktion. Wir setzen

$$Q(\tau) = \sum_{\mathsf{M} \subset \mathfrak{S}'(\mathsf{A})} \frac{e^{2\pi i \varkappa \frac{\lg \mathsf{M}\tau}{\lg \varepsilon^2}} F\left(e^{2\pi i \frac{\lg \mathsf{M}\tau}{\lg \varepsilon^2}}\right)}{\lambda(\mathsf{M})(\mu_1\tau + \mu_2)^r (\mu_1'\tau + \mu_2')^r},$$

wo $0 \leqq \varkappa < 1$, und versuchen, die reelle Zahl $\varkappa$ und das Koeffizientensystem $\lambda(\mathsf{M})$ so zu bestimmen, daß $Q(\tau)$ „formal" die Invarianzeigenschaft einer Modulform von der Stufe N und der Dimension $-2r$ für das Multiplikatorsystem $v(L)$ besitzt. Man hat also erstens dafür zu sorgen, daß das allgemeine Glied der Summe $Q(\tau)$ von der Auswahl der Matrix M aus der Nebengruppe $\mathsf{M}\mathfrak{C}_{\mathsf{M}}$ unabhängig ist, und zweitens zu erreichen, daß die Glieder der Reihe

$$\frac{Q(L_0\tau)}{v(L_0)(\gamma_0\tau + \delta_0)^{2r}}, \qquad L_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \subset \Gamma(N)$$

mit denen der Reihe $Q(\tau)$ bis auf die Anordnung übereinstimmen.

Aus diesen Forderungen ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen für $\varkappa$ und $\lambda(\mathsf{M})$:

$$(56) \qquad \frac{e^{2\pi i n \varkappa}}{\lambda(\mathsf{M}L^{-1}K_0^n L)(\varepsilon^n\mu_1\tau + \varepsilon^n\mu_2)^r(\varepsilon'^n\mu_1'\tau + \varepsilon'^n\mu_2')^r} = \frac{1}{\lambda(\mathsf{M})(\mu_1\tau + \mu_2)^r(\mu_1'\tau + \mu_2')^r}$$

(n ganz rational),

$$(57) \qquad \lambda(\mathsf{M}L_0) = \lambda(\mathsf{M})\,\sigma^{(r)}(\mathsf{M}, L_0)\,\sigma^{(r)}(\mathsf{M}', L_0)\,v(L_0).$$

Um diese Gleichungen zu lösen, bemerke man zunächst, daß für jedes reelle M mit $\underline{M} = \{m_1, m_2\} \neq \{0, 0\}$ und für alle r

$$\sigma^{(2r)}(\bar{M}, S) = (\sigma^{(r)}(M, S))^2$$

gilt, wenn S eine beliebige reelle Matrix bedeutet.

Wir setzen nun mit willkürlichem $\lambda(\mathsf{A})$

$$\lambda(\mathsf{M}) = \lambda(\mathsf{A}L) = \lambda(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A}, L)\,\sigma(\mathsf{A}', L)\,v(L),$$

wo $\sigma = \sigma^{(r)}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda(\mathsf{M}L_0) &= \lambda(\mathsf{A}LL_0) = \lambda(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A}, LL_0)\,\sigma(\mathsf{A}', LL_0)\,v(LL_0)\\ &= \lambda(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{M}, L_0)\,\sigma(\mathsf{M}', L_0)\,\sigma(\mathsf{A}, L)\,\sigma(\mathsf{A}', L)\,v(L)\,v(L_0)\\ &= \lambda(\mathsf{M})\,\sigma(\mathsf{M}, L_0)\,\sigma(\mathsf{M}', L_0)\,v(L_0).\end{aligned}$$

Es wird danach ferner, wenn wir $\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon'\end{pmatrix}$ mit E bezeichnen

$$\begin{aligned}\lambda(\mathsf{M}\cdot L^{-1}K_0^n L) &= \lambda(\mathsf{A}K_0^n L)\\ &= \lambda(\mathsf{A}K_0^n)\,\sigma(\mathsf{A}K_0^n, L)\,\sigma(\mathsf{A}'K_0^n, L)\,v(L)\\ &= \frac{\lambda(\mathsf{A}K_0^n)}{\lambda(\mathsf{A})}\,\lambda(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{E}^n\mathsf{A}, L)\,\sigma(\mathsf{E}'^n\mathsf{A}', L)\,v(L).\end{aligned}$$

Wir bilden nun

$$\begin{aligned}&(\varepsilon'^n\alpha_1' L\tau + \varepsilon'^n\alpha_2')^r(\varepsilon^n\alpha_1 L\tau + \varepsilon^n\alpha_2)^r\\ &= \sigma(\mathsf{E}^n\mathsf{A}, L)\,\sigma(\mathsf{E}'^n\mathsf{A}', L)\,\frac{(\varepsilon'^n\mu_1'\tau + \varepsilon'^n\mu_2')^r(\varepsilon^n\mu_1\tau + \varepsilon^n\mu_2)^r}{(\gamma\tau+\delta)^{2r}}\end{aligned}$$

und erhalten mit Hilfe des Symbols

$$\varphi_{\varepsilon^n}(\mathsf{A}) = \frac{(\varepsilon'^n\alpha_1'\tau + \varepsilon'^n\alpha_2')^r(\varepsilon^n\alpha_1\tau + \varepsilon^n\alpha_2)^r}{(\alpha_1'\tau + \alpha_2')^r(\alpha_1\tau + \alpha_2)^r}:$$

$$\begin{aligned}&\varphi_{\varepsilon^n}(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A}, L)\,\sigma(\mathsf{A}', L)\,(\mu_1'\tau + \mu_2')^r(\mu_1\tau + \mu_2)^r\\ &= \sigma(\mathsf{E}^n\mathsf{A}, L)\,\sigma(\mathsf{E}'^n\mathsf{A}', L)\,(\varepsilon'^n\mu_1'\tau + \varepsilon'^n\mu_2')^r(\varepsilon^n\mu_1\tau + \varepsilon^n\mu_2)^r,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}&\lambda(\mathsf{M}L^{-1}K_0^n L)(\varepsilon^n\mu_1\tau + \varepsilon^n\mu_2)^r(\varepsilon'^n\mu_1'\tau + \varepsilon'^n\mu_2')^r\\ &= \frac{\lambda(\mathsf{A}K_0^n)}{\lambda(\mathsf{A})}\,\varphi_{\varepsilon^n}(\mathsf{A})\,\lambda(\mathsf{M})(\mu_1\tau + \mu_2)^r(\mu_1'\tau + \mu_2')^r.\end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned}q_n &= \frac{\lambda(\mathsf{A}K_0^n)}{\lambda(\mathsf{A})}\,\varphi_{\varepsilon^n}(\mathsf{A})\\ &= \sigma(\mathsf{A}, K_0^n)\,\sigma(\mathsf{A}', K_0^n)\,v(K_0^n)\,\varphi_{\varepsilon^n}(\mathsf{A})\\ &= \sigma(\mathsf{A}, K_0)\,\sigma(\mathsf{A}', K_0)\,v(K_0)\,\sigma(\mathsf{E}\mathsf{A}, K_0^{n-1})\,\sigma(\mathsf{E}'\mathsf{A}', K_0^{n-1})\,v(K_0^{n-1})\,\varphi_{\varepsilon^n}(\mathsf{A})\end{aligned}$$

und ähnlich wie oben

$$\begin{aligned}&(\varepsilon'\alpha_1' K_0^{n-1}\tau + \varepsilon'\alpha_2')^r(\varepsilon\alpha_1 K_0^{n-1}\tau + \varepsilon\alpha_2)^r\\ &= \sigma(\mathsf{E}\mathsf{A}, K_0^{n-1})\,\sigma(\mathsf{E}'\mathsf{A}', K_0^{n-1})\,\frac{(\varepsilon'^n\alpha_1'\tau + \varepsilon'^n\alpha_2')^r(\varepsilon^n\alpha_1\tau + \varepsilon^n\alpha_2)^r}{(k_1^{(n-1)}\tau + k_2^{(n-1)})^{2r}},\end{aligned}$$

wo $\underline{K_0^{n-1}} = \{k_1^{(n-1)}, k_2^{(n-1)}\}$. Nun folgt

$$\varphi_\varepsilon(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A}, K_0^{n-1})\,\sigma(\mathsf{A}', K_0^{n-1})\,\varphi_{\varepsilon^{n-1}}(\mathsf{A}) = \sigma(\mathsf{E}\mathsf{A}, K_0^{n-1})\,\sigma(\mathsf{E}'\mathsf{A}', K_0^{n-1})\,\varphi_{\varepsilon^n}(\mathsf{A}),$$

$$q_n = \frac{\lambda(\mathsf{A}K_0)}{\lambda(\mathsf{A})}\,\varphi_\varepsilon(\mathsf{A})\cdot q_{n-1} = \left(\frac{\lambda(\mathsf{A}K_0)}{\lambda(\mathsf{A})}\,\varphi_\varepsilon(\mathsf{A})\right)^n.$$

Hier ist $\left|\frac{\lambda(\mathsf{A} K_0)}{\lambda(\mathsf{A})}\varphi_\varepsilon(\mathsf{A})\right| = 1$, wenn r reell und $|v(L)| = 1$ für alle L aus $\Gamma(N)$. Damit ist die allgemeinste Lösung der Gleichungen (56) und (57) bestimmt.

Falls die Gruppe $\mathfrak{E}'$ zwei Basiselemente besitzt, ist allerdings noch zu bestätigen, daß

$$\lambda(-\mathsf{M})(-\mu_1\tau-\mu_2)^r(-\mu_1'\tau-\mu_2')^r = \lambda(\mathsf{M})(\mu_1\tau+\mu_2)^r(\mu_1'\tau+\mu_2')^r.$$

Man findet für die linke Seite zunächst

$$\lambda(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A},-I)\,\sigma(\mathsf{A}',-I)\,v(-I)\,\sigma(-\mathsf{A},L)\,\sigma(-\mathsf{A}',L)$$
$$(-\mu_1\tau-\mu_2)^r(-\mu_1'\tau-\mu_2')^r\,v(L)$$

und erhält hierfür in leicht verständlicher Bezeichnung durch ähnliche Betrachtungen wie oben

$$\lambda(\mathsf{M})(\mu_1\tau+\mu_2)^r(\mu_1'\tau+\mu_2')^r\,\varphi_{-1}(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A},-I)\,\sigma(\mathsf{A}',-I)\,v(-I).$$

Aus der Gleichung

$$(\alpha_1'\tau+\alpha_2')^r(\alpha_1\tau+\alpha_2)^r = \sigma(\mathsf{A},-I)\,\sigma(\mathsf{A}',-I)\,\frac{(-\alpha_1'\tau-\alpha_2')^r(-\alpha_1\tau-\alpha_2)^r}{(-1)^{2r}}$$

folgt dann in der Tat

$$1 = \sigma(\mathsf{A},-I)\,\sigma(\mathsf{A}',-I)\,v(-I)\,\varphi_{-1}(\mathsf{A}).$$

Wir wollen schließlich noch das Verhalten der Reihe $Q(\tau)$ untersuchen, wenn man auf τ ein beliebiges Element S von $\Gamma(1)$ anwendet. Man erhält

$$\frac{Q(S\tau)}{v(S)(c\tau+d)^{2r}} = \sum_{\mathsf{M}^*\subset\mathfrak{S}'(\mathsf{A}S)} \frac{e^{2\pi i\varkappa\frac{\lg \mathsf{M}^*\tau}{\lg\varepsilon^2}}\,F\left(e^{2\pi i\frac{\lg \mathsf{M}^*\tau}{\lg\varepsilon^2}}\right)}{\lambda(\mathsf{M})\,\sigma(\mathsf{M},S)\,\sigma(\mathsf{M}',S)\,v(S)\,(\mu_1^*\tau+\mu_2^*)^r(\mu_1^{*\prime}\tau+\mu_2^{*\prime})^r},$$

wo $\mathsf{M}^* = \mathsf{M}S = \mathsf{A}SS^{-1}LS$. Hier führen wir $v_S'(S^{-1}LS)$ durch die Gleichung

$$v_S'(S^{-1}LS) = v(L)\frac{(\sigma(L,S))^2}{(\sigma(S,S^{-1}LS))^2}$$

ein und haben

$$\lambda^*(\mathsf{M}^*) \equiv \lambda(\mathsf{M})\,\sigma(\mathsf{M},S)\,\sigma(\mathsf{M}',S)\,v(S)$$
$$= \lambda(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A},L)\,\sigma(\mathsf{A}',L)\,\sigma(\mathsf{A}L,S)\,\sigma(\mathsf{A}'L,S)\,\frac{(\sigma(S,S^{-1}LS))^2}{(\sigma(L,S))^2}\,v_S'(S^{-1}LS)\,v(S)$$
$$= \lambda(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A},LS)\,\sigma(\mathsf{A}',LS)\,\sigma(S,S^{-1}LS)^2\,v_S'(S^{-1}LS)\,v(S).$$

Nun ist

$$\sigma(\mathsf{A}S,S^{-1}LS)\,\sigma(\mathsf{A}'S,S^{-1}LS) = \frac{\sigma(S,S^{-1}LS)^2\,\sigma(\mathsf{A},LS)\,\sigma(\mathsf{A}',LS)}{\sigma(\mathsf{A},S)\,\sigma(\mathsf{A}',S)},$$

also

$$\lambda^*(\mathsf{M}^*) = \lambda(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A},S)\,\sigma(\mathsf{A}',S)\,v(S)\,\sigma(\mathsf{A}S,S^{-1}LS)\,\sigma(\mathsf{A}'S,S^{-1}LS)\,v_s'(S^{-1}LS)$$
$$= \frac{\lambda(\mathsf{A})\,\sigma(\mathsf{A},S)\,\sigma(\mathsf{A}',S)\,v(S)}{\lambda_1(\mathsf{A}S)}\,\lambda_1(\mathsf{A}S)\,\sigma(\mathsf{A}S,S^{-1}LS)\,\sigma(\mathsf{A}'S,S^{-1}LS)\,v_s'(S^{-1}LS)$$

mit willkürlichem $\lambda_1(\mathsf{A}S) \neq 0$.

Es erweist sich jetzt als zweckmäßig, analog wie § 1 und 2 einige neue Symbole zu benutzen. Sei V eine Matrix mit reellen Koeffizienten und von 0 verschiedener Determinante. Wir setzen

$$\sigma^{*(2r)}(\mathsf{M}, V) = \sigma^*(\mathsf{M}, V) = \sigma(\mathsf{M}, V)\,\sigma(\mathsf{M}', V),\ v(\mathsf{A}) = \lambda(\mathsf{A}),\ v(\mathsf{M}) = \lambda(\mathsf{M}),$$

$$\varrho^*(\mathsf{M}, V; v) = \varrho^*(\mathsf{M}, V) = \frac{\sigma^*(\mathsf{M}, V)\, v(\mathsf{M})\, v(V)}{v(\mathsf{M}\, V)},$$

$$v_S'(\mathsf{A} S) = \lambda_1(\mathsf{A} S) = v(S \mathsf{A}) \frac{\sigma^*(\mathsf{A}, S)}{\sigma^*(S, \mathsf{A})},$$

$$v_S'(\mathsf{M}^*) = v_S'(\mathsf{A} S)\,\sigma^*(\mathsf{A} S, S^{-1} L S)\, v_S'(S^{-1} L S).$$

Danach wird

$$\frac{v(\mathsf{A})\,\sigma^*(\mathsf{A}, S)\, v(S)}{v_S'(\mathsf{A} S)} = \varrho^*(S, \mathsf{A}).$$

Wir setzen ferner

$$E_{-2r}(\tau; v; \mathsf{A}, \Gamma(N); F) = \sum_{\mathsf{M} \subset \mathfrak{S}'(\mathsf{A})} \frac{e^{2\pi i \frac{\lg \mathsf{M}\tau}{\lg \varepsilon^2} \varkappa} F\left(e^{2\pi i \frac{\lg \mathsf{M}\tau}{\lg \varepsilon^2}}\right)}{v(\mathsf{M})(\mu_1 \tau + \mu_2)^r (\mu_1' \tau + \mu_2')^r}.$$

Dann gelten die Transformationsformeln

$$\text{(58)} \qquad \frac{E_{-2r}(L_0 \tau; v; \mathsf{A}, \Gamma(N); F)}{v(L_0)(\gamma_0 \tau + \delta_0)^{2r}} = E_{-2r}(\tau; v; \mathsf{A}, \Gamma(N); F),$$

$$\text{(59)} \qquad \frac{E_{-2r}(S\tau; v; \mathsf{A}, \Gamma(N); F)}{v(S)(c\tau + d)^{2r}} = \frac{1}{\varrho^*(S, \mathsf{A})} E_{-2r}(\tau; v_S'; \mathsf{A} S, \Gamma(N); F).$$

Um absolute Konvergenz zu erzielen, nehmen wir $r > 2$ und $|v(L)| = 1$ an. Dabei können wir uns auf die Fälle beschränken, in denen

$$F(t) = R(t) = \frac{t^m}{(t-q)^g}$$

ist, wo $g \geqq 0$ und m ganze rationale Zahlen und $q = e^{2\pi i \frac{\lg \mathsf{A}\omega}{\lg \varepsilon^2}}$ eine komplexe Zahl im Innern von $\mathfrak{R}$ bezeichnen. Die Betrachtung in § 1 der Heckeschen Arbeit[16]) zeigt, daß $E_{-2r}(\tau; v; \mathsf{A}, \Gamma(N); R)$ in jedem abgeschlossenen Teil des Inneren von $\mathfrak{H}$, welcher die Punkte $L\omega$, $L \subset \Gamma(N)$, nicht enthält, gleichmäßig und absolut konvergiert.

Die Funktion $E_{-2r}(\tau; v; \mathsf{A}, \Gamma(N); R)$ ist im Innern von $\mathfrak{H}$ bis auf die Punkte $L\omega$ regulär, in deren jedem sie einen Pol der Ordnung g aufweist, falls $g > 0$ und falls ω nicht elliptischer Fixpunkt der $\Gamma(N)$ ist ($N = 1$). Anderenfalls ist die Funktion im Innern von $\mathfrak{H}$ durchweg regulär. Ersichtlich strebt E_{-2r} gegen 0, wenn τ in einem Vertikalstreifen beschränkter Breite gegen $+ i\infty$ geht. Zusammen mit der Transformationsformel (59) lehrt dies, daß E_{-2r} im Sinne unserer Terminologie in allen parabolischen Spitzen der $\Gamma(N)$ verschwindet.

Man sieht schließlich noch, daß E_{-2r} für $r > 2$ eine stetige Funktion von r ist, wenn man den Multiplikator $v_{2r}(L) = v(L)$ für veränderliches

$r > 2$ als stetige Funktion von r bestimmt. Es ist dabei auch hier zu beachten, daß die Ungleichung $0 \leqq \varkappa < 1$ für veränderliches r im allgemeinen nicht erhalten bleibt, wenn man die Funktion $F(t)$ festhält.

2. *Ein Kleinsches Prinzip zur Aufstellung von Untergruppen der Modulgruppe.*

Die in § 3 ausführlich niedergelegte Theorie der allgemeinen Multiplikatorsysteme veranlaßt mich, an dieser Stelle auf die Frage der Konstruktion von Untergruppen der Modulgruppe mit Hilfe der Multiplikatoren etwas näher einzugehen. Es handelt sich um folgendes, zuerst wohl von Klein formuliertes Prinzip, das sich unter Benutzung des Begriffs eines Multiplikatorsystems folgendermaßen aussprechen läßt: Es sei $f(\tau)$ eine Modulform der Dimension $-r$ für das Multiplikatorsystem $v(L)$. Wir fragen nach der Untergruppe derjenigen Elemente Q von $\Gamma(1)$, für die $v(Q)$ einen „möglichst einfachen" Wert, nämlich einen Wert $e^{2\pi i \nu r}$ mit ganzem rationalem ν annimmt. In der vorhandenen Literatur ist dieses Prinzip insofern von Bedeutung, als es mit seiner Hilfe zum erstenmal gelungen ist[17]), Untergruppen der $\Gamma(1)$ anzugeben, welche nicht Kongruenzgruppen sind.

Im folgenden wende ich eine naheliegende Verallgemeinerung dieses Prinzips auf die $\Gamma(N)$ mit $N \geqq 2$ an; die so erhaltenen Untergruppen der $\Gamma(N)$ lassen sich gruppentheoretisch in einfachster Weise charakterisieren. Es ist selbstverständlich, daß man dabei von automorphen Formen überhaupt nicht zu reden braucht, sondern daß bereits die Betrachtung der Multiplikatorsysteme ausreichen muß.

Wir bemerken vorab, daß wir im Falle $N = 2$ nicht die volle Gruppe $\Gamma(2)$, sondern die schon erwähnte Untergruppe $\underline{\Gamma(2)}$ innerhalb $\Gamma(2)$ zugrunde legen wollen. $\underline{\Gamma(2)}$ enthält das Element $-I$ von $\Gamma(2)$ nicht und ist zu der durch $\Gamma(2)$ induzierten Substitutionsgruppe $\overline{\Gamma(2)}$ einstufig isomorph. Wir setzen

$$\Gamma = \Gamma(N) \quad \text{für} \quad N > 2 \quad \text{und} \quad \Gamma = \underline{\Gamma(2)} \quad \text{für} \quad N = 2.$$

Es seien nun h Multiplikatoren

$$v_n(L), \qquad 1 \leqq n \leqq h, \qquad L \subset \Gamma,$$

gegeben, die sämtlich zu der Dimension $-r$ gehören mögen. Dann frage ich nach der Untergruppe $\Gamma(r; v_1, \ldots, v_h)$ derjenigen Q von Γ, für welche

[17]) R. Fricke (Math. Annalen 28 (1886), S. 99) und G. Pick (ibid., S. 119) betrachten zu diesem Zwecke die Funktion $\sqrt[q]{\varkappa^2}$ mit $q \neq 1, 2, 4, 8$; entsprechendes gilt für $\sqrt[q]{\Delta\tau}$, wenn $q \nmid 24$.

alle $v_n(Q)$, $1 \leqq n \leqq h$, die Gestalt

$$v_n(Q) = e^{2\pi i \nu_n r},$$

ν_n ganz rational, annehmen.

Nach der allgemeinen Theorie der Multiplikatorsysteme gibt es einen zu der Dimension $-r$ gehörigen Multiplikator $v_0(L)$ der Gruppe Γ, welcher nur der Werte $e^{2\pi i \nu r}$ mit ganzem rationalem ν fähig ist. Wir setzen $\chi_n(L) = \frac{v_n(L)}{v_0(L)}$ und erhalten eine neue Definition der $\Gamma(r; v_1, \ldots, v_h)$ als Gesamtheit der Q von Γ, für die

$$\chi_n(Q) = e^{2\pi i \nu_n r} \quad \text{mit ganzen rationalen } \nu_n, \quad 1 \leqq n \leqq h.$$

Es erhellt nun unmittelbar, daß $\Gamma(r; v_1, \ldots, v_h)$ ein Normalteiler von Γ ist, welcher die Kommutatorgruppe $\mathfrak{k}$ von Γ enthält, d.h. $\Gamma(r; v_1, \ldots, v_h)$ ist Normalteiler von Γ mit Abelscher Faktorgruppe.

Wir wollen jetzt umgekehrt beweisen, daß jeder Normalteiler $\mathfrak{N}_1$ von Γ, dessen Faktorgruppe Abelsch ist, mit einer geeigneten $\Gamma(r; v_1, \ldots, v_h)$ übereinstimmt, wobei man überdies mit einer festen Anzahl, nämlich $h_0 = 2p + \sigma - 1$ Multiplikatoren auskommt.

Beim Beweise benutzen wir, daß Γ eine freie Gruppe mit h_0 Erzeugenden ist, daß also die Faktor-Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}$ von Γ eine reine unendliche Abelsche Gruppe mit h_0 Basiselementen ist. Wir schreiben $\mathfrak{U} = \mathfrak{N}_1/\mathfrak{k}$ und haben folgendes zu beweisen: Es gibt eine reelle Zahl r und h_0 Charaktere χ_n, $1 \leqq n \leqq h_0$, von $\mathfrak{G}$ derart, daß

$$\chi_n(A) = e^{2\pi i \nu_n r}, \quad \nu_n \text{ ganz rational}, \quad 1 \leqq n \leqq h_0,$$

für die Elemente A von $\mathfrak{U}$ und nur für diese zutrifft.

Beweis. Bekanntlich kann man eine solche Basis

$$B_1, \ldots, B_{h_0}$$

der Gruppe $\mathfrak{G}$ angeben, daß die Basis der Untergruppe $\mathfrak{U}$ die nachstehende Gestalt hat:

$$U_1 = B_1^{a_1}, \ldots, U_m = B_m^{a_m}, \quad m \leqq h_0, \quad a_g \geqq 1 \text{ ganz rational}, \quad 1 \leqq g \leqq m.$$

Wir wählen nun r irrational oder auch r rational, dann aber so, daß

$$(60) \qquad r = \frac{j}{k}, \quad k > 0, \quad (j, k) = 1, \quad (j, a_1, \ldots, a_m) = 1.$$

Ferner sei

$$\chi_n(B_i) = 1 \quad \text{für} \quad i \neq n,$$
$$\chi_n(B_n) = e^{2\pi i \frac{r}{a_n}} \quad \text{für} \quad 1 \leqq n \leqq m,$$
$$\chi_n(B_n) = e^{2\pi i s_n} \quad \text{für} \quad m + 1 \leqq n \leqq h_0,$$

wo s_n von allen Zahlen der Form $\varrho_1 r + \varrho_2$ (ϱ_1, ϱ_2 rational) verschieden ist.

Ist $B = B_1^{x_1} B_2^{x_2} \ldots B_{h_0}^{x_{h_0}}$ ein Element von $\mathfrak{G}$, so wird $\chi_n(B) = \chi_n(B_n)^{x_n}$. Aus $\chi_n(B_n)^{x_n} = e^{2\pi i \nu_n r}$ für $m + 1 \leqq n \leqq h_0$ und ganzes rationales ν_n folgt sofort $x_n = 0$.

$$\chi_n(B_n)^{x_n} = e^{2\pi i \nu_n r}, \quad 1 \leqq n \leqq m, \ \nu_n \text{ ganz rational,}$$

besagt, daß

$$\frac{x_n}{a_n} r = \nu_n r + c_n, \quad c_n \text{ ganz rational,}$$

und daraus schließt man mit Hilfe von (60), daß $x_n \equiv 0\,(a_n)$. Damit ist ist die Behauptung bewiesen. Man sieht insbesondere, daß im Falle eines rationalen r keine Voraussetzungen über den Nenner von r gemacht werden.

Wenn man dies Verfahren auf die Modulgruppe selbst anwendet, so erhält man kein interessantes Resultat, denn die Kommutatorgruppe der $\Gamma(1)$ ist eine Untergruppe vom Index 12 innerhalb $\Gamma(1)$.

Dagegen möchte ich noch kurz den Beweis dafür andeuten, daß man im Falle der $\Gamma(2)$ mit einem einzigen Multiplikator auskommt, obgleich $h_0 = 2$ ist. Dies Resultat kann geeignet sein, die Aufstellung eines mit den sämtlichen $\Gamma(N)$ inkommensurablen „numerischen" Beispiels einer solchen Untergruppe der $\Gamma(2)$ zu erleichtern.

1. Fall: $m = 1$, $U_1 = B_1^{a_1}$.

Wir bestimmen r wie oben und setzen

$$\chi(B_1) = e^{2\pi i \frac{r}{a_1}}, \quad \chi(B_2) = e^{2\pi i s_2},$$

wo s_2 von allen Zahlen der Form $\varrho_1 r + \varrho_2$ verschieden ist, wenn ϱ_1, ϱ_2 rational. Aus

$$\chi(B_1^{x_1} B_2^{x_2}) = e^{2\pi i \left(\frac{x_1}{a_1} r + x_2 s_2\right)} = e^{2\pi i \nu r}$$

mit ganzen rationalen x_1, x_2, ν folgt $x_2 = 0$ und dann $x_1 \equiv 0\,(a_1)$, q. e. d.

2. Fall: $m = 2$, $U_1 = B_1^{a_1}$, $U_2 = B_2^{a_2}$.

Wir nehmen r irrational und setzen

$$\chi(B_1) = e^{2\pi i \frac{r}{a_1}}, \quad \chi(B_2) = e^{2\pi i \frac{1}{a_2}}.$$

$\frac{x_1}{a_1} r + \frac{x_2}{a_2} = \nu r + c$ mit ganzen rationalen x_1, x_2, ν, c ergibt $\frac{x_1}{a_1} = \nu$, $\frac{x_2}{a_2} = c$, q. e. d.

Hamburg, August 1929.

(Eingegangen am 23. 10. 1929.)

Über die analytischen Abbildungen von Kreiskörpern und Hartogsschen Bereichen.

Von

H. Welke in Münster (Westf.)*).

Einleitung.

In der Funktionentheorie von zwei komplexen Veränderlichen $w = u + iv$, $z = x + iy$ treten an Stelle der Kreise in der gewöhnlichen Funktionentheorie nicht nur die Hyperkugeln, sondern eine größere Klasse von vierdimensionalen Gebieten mit Kreissymmetrie. Vor allen Dingen sind es die Kreiskörper.

(D_1): Definition des Kreiskörpers. *Kreiskörper nennen wir einen Bereich des (w, z)-Raumes, der durch die Transformationen*

$$T_1: \begin{array}{l} w' - a = (w - a)e^{i\vartheta}, \\ z' - b = (z - b)e^{i\vartheta} \end{array} \quad (\vartheta \textit{ reell})$$

in sich übergeht, wo $w = a$, $z = b$ innerer Punkt ist. Er sei Mittelpunkt des Kreiskörpers genannt.

So sind die Konvergenzgebiete der Potenzreihen[1]) und die Indikatrizen der Carathéodoryschen Metriken[2]) in der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen Kreise, in der zweier Veränderlichen dagegen Kreiskörper.

Seit Poincaré[3]) weiß man:

Ein Bereich des (w, z)-Raumes läßt sich nicht auf jeden anderen durch analytische Transformationen

$$(1) \qquad w' = f_1(w, z), \qquad z' = f_2(w, z)$$

---

*) Seminar von Prof. Behnke.

[1]) Vgl. Behnke, Natürliche Grenzen, Hamburger Abhandl. 5.

[2]) Vgl. Carathéodory, Geometrie bei analytischen Abbildungen, Hamburger Abhandl. 6.

[3]) Vgl. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables, Rendiconti di Palermo 23, S. 185–220.

abbilden. Man hat in einer Reihe von Arbeiten versucht, näheres über die Abbildbarkeit von vierdimensionalen Gebieten auszusagen, ohne das Problem bisher umfassend lösen zu können. Als Beitrag zu diesen laufenden Untersuchungen ist die folgende Arbeit gedacht.

Es werden zunächst die eineindeutigen, analytischen und mittelpunktstreuen Abbildungen der Kreiskörper untersucht. Dabei bediene ich mich eines von Herrn Bergmann angegebenen Verfahrens[4]).

Herr Bergmann faßt alle Bereiche des (w, z)-Raumes, die man normiert (siehe § 1, D_1) aufeinander abbilden kann, zu einer Klasse zusammen. Mittels eines Verfahrens, das analog dem Dirichletschen Prinzip aufgebaut ist, kann Herr Bergmann jedem Bereich $\mathfrak{B}$ ein gegen normierte Abbildungen kovariantes Funktionenpaar zuordnen. Falls das Funktionenpaar eine eineindeutige analytische Abbildung von $\mathfrak{B}$ vermittelt, so ist der Bildbereich $\mathfrak{B}_R$ für jeden Bereich $\mathfrak{B}'$ derselben Abbildungsklasse derselbe. $\mathfrak{B}_R$ ist ein ausgezeichneter Bereich der Abbildungklasse. Herr Bergmann nennt ihn *Repräsentantenbereich.*

In § 1 habe ich die Ergebnisse von Herrn Bergmann angegeben, soweit sie in den folgenden Überlegungen gebraucht werden.

In § 2 zeige ich, daß die Kreiskörper Repräsentantenbereiche sind. (Die Normierung ist auf den Mittelpunkt des Kreisbereichs bezogen.) Daraus folgt unmittelbar, daß die Kreiskörper verschiedenen Abbildungsklassen angehören. Eine nicht normierte Abbildung kann man aber durch Einsetzen einer ganzen linearen Transformation in eine normierte Abbildung überführen. *Also sind Kreiskörper mittelpunktstreu nur affin auf Kreiskörper abzubilden.* Die affinen Transformationen der Kreiskörper sind aber schon eingehend von Herrn Blaschke und Herrn Carathéodory untersucht.

Zu demselben Ergebnis, nämlich daß die Kreiskörper ähnlich wie die Kreise der gewöhnlichen Funktionentheorie mittelpunktstreu nur affin aufeinander abzubilden sind, ist Herr Behnke durch Studium der kontinuierlichen Gruppen von Kreiskörpertransformationen ohne Benutzung der Bergmannschen Theorie gelangt[5]).

In § 3 untersuche ich die Abbildungen einer weiteren Klasse von Bereichen mit Kreissymmetrie. In seiner grundlegenden Arbeit in den Mathe-

---

[4]) Vgl. Bergmann, Über unendliche Hermitesche Formen, die einem Bereiche zugeordnet sind, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 640–677; Über die Existenz von Repräsentantenbereichen, Math. Annalen **102** (1930), S. 430–442; Über Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören, Berliner Sitzungsberichte 1927, S. 178–184.

[5]) Vgl. eine demnächst in den Hamburger Abhandlungen erscheinende Arbeit. Während der Drucklegung dieser Arbeit hat Herr Henri Cartan einen sehr eleganten Beweis desselben Satzes in den Comptes Rendus **190** (1930), S. 718–720 — vgl. auch S. 354–356 — veröffentlicht.

matischen Annalen[6]) hat Herr Hartogs die Konvergenzbereiche der Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu f_\nu(w)$ untersucht. Er gibt diese Bereiche in der Form an:

$$|z| = R(w).$$

Diese Bereiche sind offenbar invariant gegenüber den Transformationen

$$T_2: \begin{array}{l} w' = w, \\ z' - a = (z - a)e^{i\vartheta} \end{array} \quad (\vartheta \text{ reell}).$$

(D_2): Definition eines Hartogsschen Bereichs. *Einen Bereich, der invariant ist gegenüber den Transformationen T_2, nenne ich einen Hartogsschen Bereich. (Die analytische Ebene $z = a$ des (w, z)-Raumes sei Symmetrieebene des Hartogsschen Bereichs genannt.)*

Ich zeige in § 3, daß Hartogssche Bereiche nur durch die Transformationen

$$L: \begin{array}{l} z' = z \cdot g_1(w), \\ w' = g_2(w) \end{array}$$

normiert abgebildet werden können.

(Die Normierung ist bezogen auf einen beliebigen Punkt der Symmetrieebene, den ich als Mittelpunkt meines Koordinatensystems gewählt habe.)

Jeder Hartogssche Bereich, der zu gleicher Zeit ein Kreiskörper ist, ist ein Reinhardtscher Kreiskörper.

(D_3): Definition des Reinhardtschen Kreiskörpers. *Ein Reinhardtscher Kreiskörper ist dadurch charakterisiert, daß er durch die Transformationen*

$$T_3: \begin{array}{l} w' - a = (w - a)e^{i\vartheta}, \\ z' - b = (z - b)e^{i\varphi} \end{array} \quad (\vartheta, \varphi \textit{ reell})$$

in sich übergeht. ($w = a$, $z = b$ *Mittelpunkt.*)

Herr Bergmann hat schon gezeigt, daß die Reinhardtschen Kreisbereiche Repräsentantenbereiche sind[7]). Ich kann zeigen: Nicht in jeder Abbildungsklasse, in der ein Hartogsscher Bereich liegt (Normierung auf einen Punkt der Symmetrieebene bezogen), liegt auch ein Kreisbereich. Es gibt also noch eine weitere Klasse von Repräsentantenbereichen. Nicht jeder Bereich läßt sich auf einen Kreisbereich abbilden.

Es bleibt natürlich offen, welche Abbildungsklassen des (w, z)-Raumes, die wir durch die Repräsentantenbereiche charakterisiert haben, es sonst

---

[6]) Vgl. Hartogs, Über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen, Math. Annalen 62 (1906), S. 1–88.

[7]) Vgl. Anm. [4]).

noch geben mag. Hier liegt eine wesentliche Schwierigkeit des Bergmannschen Ansatzes. Überlegt man sich nämlich das Analoge in der Theorie einer komplexen Veränderlichen, so kann man leicht zeigen, daß der Kreis Repräsentantenbereich ist. Daß er der einzige Repräsentantenbereich ist, ist lediglich im Rahmen dieses Ansatzes bisher noch nicht gezeigt. Erst wenn ein vollständiges System von Repräsentantenbereichen gefunden ist, kann man das Abbildungsproblem des (w, z)-Raumes als gelöst betrachten.

Bezeichnungen. In den folgenden Untersuchungen werden mit Herrn Bergmann nur „ganz im Endlichen gelegene, einfach zusammenhängende, schlichte, von stückweise regulären, doppelpunktslosen, dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten berandete Bereiche $\mathfrak{B}, \mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \ldots$ des (w, z)-Raumes betrachtet".

Unter $\int\limits_{\mathfrak{B}} f(w,z)\,\overline{f(w,z)}\,d\omega_{w,z}$ sei das uneigentliche Integral $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{B}_n} f(w,z)\,\overline{f(w,z)}\,d\omega_{w,z}$ verstanden, wo $\mathfrak{B}_n$ eine Folge ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegener Bereiche, die gegen $\mathfrak{B}$ konvergieren, ist.

$d\omega_{w,z}$ ist eine Abkürzung für $dw\,d\bar{w}\,dz\,d\bar{z}$. $R(w) - w = u + iv -$ bedeute eine reelle Funktion $R(u, v)$ der reellen Veränderlichen u und v. $\Delta_w R(w)$ sei als Abkürzung für $\frac{\partial^2 R(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 R(u,v)}{\partial v^2}$ gesetzt.

Unter Transformationen (Abbildungen) $T, L, \ldots$ wollen wir immer nur analytische Transformationen verstehen, auch wenn es nicht ausdrücklich gesagt ist.

§ 1.

Bericht über die Bergmannschen Arbeiten.

Die Ergebnisse der in der Einleitung erwähnten Arbeiten des Herrn Bergmann, soweit sie in meinen Untersuchungen gebraucht werden, möchte ich zunächst kurz in den folgenden Sätzen und Definitionen zusammenfassen [8]).

Satz 1. *Es gibt jeweils genau eine Funktion $u^1_{\mathfrak{B}}$, $u^2_{\mathfrak{B}}$ oder $u^3_{\mathfrak{B}}$, die das Integral*

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} f(w,z)\,\overline{f(w,z)}\,d\omega_{w,z} \tag{2}$$

zum Minimum macht, wobei zur Konkurrenz alle Funktionen zugelassen sind, die im Innern von $\mathfrak{B}$ regulär sind und normiert sind durch

$$N^1:\quad f(0,0) = 0;\quad f'_w(0,0) = 1;\quad f'_z(0,0) = 0$$

[8]) Siehe auch eine demnächst erscheinende Arbeit des Verfassers, die einen vereinfachten Beweis des Satzes 1 bringt.

oder

$$N^2:\quad f(0,0)=0;\quad f'_w(0,0)=0;\quad f'_z(0,0)=1$$

oder

$$N^3:\quad f(0,0)=1.$$

Wir führen zunächst mit Herrn Bergmann folgenden Begriff ein.

(D_4): Definition der Abbildungsklassen. *Zwei Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ des (w,z)-Raumes gehören zur selben Abbildungsklasse, falls sie normiert aufeinander abzubilden sind. Normiert heißt eine eineindeutige Abbildung eines Bereiches $\mathfrak{B}$ durch ein in $\mathfrak{B}$ analytisches Funktionenpaar*:

$$(3)\qquad \begin{matrix} w'=f_1(w,z) \\ z'=f_2(w,z) \end{matrix}\quad \textit{mit}\quad \begin{matrix} f_1(0,0)=0; & f'_{1w}(0,0)=1; & f'_{1z}(0,0)=0; \\ f_2(0,0)=0; & f'_{2w}(0,0)=0; & f'_{2z}(0,0)=1. \end{matrix}$$

Mit Hilfe der Minimalfunktionen des Satzes 1 können wir jetzt zu jedem Gebiet $\mathfrak{B}$ ein Funktionenpaar angeben, das charakteristisch für die Abbildungsklasse ist, zu der $\mathfrak{B}$ gehört.

Satz 2. *Das Funktionenpaar*

$$(4)\qquad \tilde{w}_{\mathfrak{B}}=\frac{u^1(w,z)}{u^3(w,z)},\qquad \tilde{z}_{\mathfrak{B}}=\frac{u^2(w,z)}{u^3(w,z)}$$

ist kovariant gegen normierte Abbildungen.

(4) definiert eine in der Umgebung des Normierungspunktes eineindeutige analytische Abbildung.

Unter „kovariant" verstehen wir:

$\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ mögen derselben Abbildungsklasse angehören. Die Abbildung sei gegeben durch (3). Dann ist.

$$\tilde{w}_{\mathfrak{B}}(w,z)=\tilde{w}_{\mathfrak{B}^*}(f_1(w,z),f_2(w,z)),$$
$$\tilde{z}_{\mathfrak{B}}(w,z)=\tilde{z}_{\mathfrak{B}^*}(f_1(w,z),f_2(w,z)).$$

Denn aus dem in Satz 1 angegebenen Minimumprinzip folgt direkt

$$u^1_{\mathfrak{B}}(w,z)=u^1_{\mathfrak{B}^*}(f_1(w,z),f_2(w,z))\cdot F(w,z),$$

wo $F(w,z)$ die Funktionaldeterminante von (3) ist.

Die Bedeutung des Kovariantenpaares (4) ergibt sich aus

(D_5): Definition des Bergmannschen Repräsentantenbereichs. *Einen Bereich, bei dem sich das Kovariantenpaar auf*

$$(5)\qquad \tilde{w}\equiv w,\qquad \tilde{z}\equiv z$$

reduziert, nennen wir Repräsentantenbereich.

Aus Satz 2 folgt: Wenn das Kovariantenpaar (4) in ganz $\mathfrak{B}$ regulär ist (u^3 könnte Null werden) und $\mathfrak{B}$ eineindeutig auf einen Bereich $\mathfrak{B}_R$ abbildet, so ist $\mathfrak{B}_R$ ein Repräsentantenbereich. Nicht nur $\mathfrak{B}$, sondern alle

Bereiche $\mathfrak{B}'$ der Abbildungsklasse von $\mathfrak{B}$ werden durch ihr Funktionenpaar $(\tilde{w}, \tilde{z})$ (w, z) auf $\mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ abgebildet. $\mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ ist ein ausgezeichneter Bereich der Abbildungsklasse, der „Repräsentant" dieser Klasse [9]).

Bei den entsprechenden Überlegungen in der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen findet man, daß Repräsentantenbereiche die Kreise um den Nullpunkt sind. (Daß zwei Kreise mit verschiedenem Radius Repräsentantenbereiche sind, liegt an der Normierung: $f'(0) = 1$.)

§ 2.

Über die Abbildungen von Kreiskörpern.

In diesem Paragraphen wollen wir nachweisen, daß Kreiskörper Repräsentantenbereiche sind. Dazu brauchen wir

Satz 3. *Jede Funktion, die in einem Kreiskörper $\mathfrak{K}$ regulär ist, läßt sich darstellen in der Form einer Diagonalenreihe*

$$f(w, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{l} a_{m, l-m} w^m \cdot z^{l-m} \right\}, \tag{6}$$

die in jedem inneren Teilbereich von $\mathfrak{K}$ gleichmäßig konvergiert.

Der Konvergenzbereich einer Diagonalenreihe einer in $(0,0)$ analytischen Funktion $f(w, z)$ ist der Kreiskörper $\mathfrak{K}_f$, der von jeder analytischen Ebene durch $(0,0)$ E: $s = \frac{w}{z} =$ konst. in einem Kreis, der die Entfernung des nächsten singulären Punktes in E als Radius hat, geschnitten wird. Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem inneren Punkte und deshalb nach dem Heine-Borelschen Theorem auch gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{K}_f$ [10]).

Da $f(w, z)$ regulär ist in $\mathfrak{K}$, liegt kein Punkt von $\mathfrak{K}$ außerhalb des dazu konzentrischen $\mathfrak{K}_f$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

---

[9]) Es ist bis jetzt noch nicht gelungen, den Beweis zu führen, daß das Kovariantenpaar (4) $\mathfrak{B}$ immer eineindeutig auf ein schlichtes Gebiet $\mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ abbildet. Dazu müßte gezeigt werden, daß $\frac{\partial(\tilde{w}, \tilde{z})}{\partial(w, z)} \neq 0$ und $u^2(w, z) \neq 0$ in ganz $\mathfrak{B}$ ist. Herr Bergmann bittet mich mitzuteilen, daß man diese Schwierigkeit umgehen könnte, falls man nichtschlichte Bereiche zur Konkurrenz zuläßt. (In der Arbeit Math. Annalen **102**, S. 434 hat Herr Bergmann das durch den Satz angedeutet: Die Repräsentantenbereiche brauchen natürlich im allgemeinen nicht schlicht zu sein.) Doch wird es schwierig sein, eine derartige Betrachtung durchzuführen, da bis jetzt wenig über die Existenz von analytischen Funktionen zweier komplexer Veränderlichen auf nicht-schlichten Gebieten bekannt ist, und weil im Vierdimensionalen die möglichen Verzweigungen topologisch nicht einfach zu behandeln sein werden.

[10]) Vgl. Anm. [1]).

Satz 4. *Die Kreiskörper sind Bergmannsche Repräsentantenbereiche. Die Bergmannschen Minimalfunktionen eines Kreiskörpers $\mathfrak{K}$, bei der die Normierungen auf den Mittelpunkt des Kreiskörpers bezogen sind, lauten*

$$u^1 \equiv w, \quad u^2 \equiv z \quad \text{und} \quad u^3 \equiv 1.$$

Zum Beweise zerlegen wir $\mathfrak{K}$ in drei Teile:

1. Teil. Ein Dizylinder $\mathfrak{D}$: $|w| \leqq d$; $|z| \leqq d$, der ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt.

2. Teil. Der Kreiskörpersektor $\mathfrak{S}$: $\left|\frac{w}{z}\right| \leqq 1$; $|z| \geqq d$. $\mathfrak{S}$ kann man in der Form $|z| \leqq R(s)$ schreiben. $s = \frac{w}{z}$.

3. Teil. Der Kreiskörpersektor $\mathfrak{T}$ darstellbar als $|w| \leqq R'(t)$; $t = \frac{w}{z}$, wo $|t| \leqq 1$ und $|w| \geqq d$ ist[11]).

Wir lösen die drei Bergmannschen Minimumaufgaben, die sich durch die Normierungen N^1, N^2 und N^3 unterscheiden, jeweils für die drei Teilbereiche, wobei zur Konkurrenz nur Funktionen zugelassen sind, die in ganz $\mathfrak{K}$ regulär sind.

Der Dizylinder ist ein Reinhardtscher Kreisbereich. Die Minimumaufgaben ergeben nach Bergmann:

$$u^1 \equiv w; \quad u^2 \equiv z \quad \text{und} \quad u^3 \equiv 1.$$

Da alle drei Funktionen in ganz $\mathfrak{K}$ regulär sind, sind sie auch Lösungen des Minimumproblems im Dizylinder, wenn zur Konkurrenz nur die in $\mathfrak{K}$ regulären Funktionen zugelassen sind.

Zur Lösung der Minimumaufgabe für $\mathfrak{S}$ stellen wir die in $\mathfrak{K}$ regulären und entsprechend den einzelnen Problemen normierten $f(w, z)$ als Diagonalenreihen dar.

$$f(w, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{l} a_{\nu\, l-\nu} w^{\nu} z^{l-\nu} \right\}.$$

Da $|z| \leqq d > 0$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} z^l \left\{ \sum_{\nu=0}^{l} a_{\nu\, l-\nu} s^{\nu} \right\} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l f_l(s).$$

Dabei ist

$$f_0(s) = a_{00}; \quad f_1(s) = a_{10} s + a_{01}.$$

Die Normierungsbedingungen für die drei Probleme lauten:

$$N^1\colon \quad f_0(s) = 0; \quad f_1(s) = s.$$
$$N^2\colon \quad f_0(s) = 0; \quad f_1(s) = 1.$$
$$N^3\colon \quad f_0(s) = 1.$$

---

[11]) Näheres über diese Darstellung der Kreiskörpersektoren in der in Anm. [1]) angeführten Arbeit von Behnke.

Wir setzen nun nach Bergmann das Dirichletsche Integral (2) an.

$$\int_{\mathfrak{S}} f \bar{f} \, d\omega_{w,z} = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{S}_n} f \bar{f} \, d\omega_{w,z}.$$

$\mathfrak{S}_n$ sei das Gebiet:

$$d \leqq |z| \leqq \theta_n R(s) \quad \text{für} \quad |s| \leqq 1.$$

Dabei ist $0 < \theta_n < 1$ und $\lim_{n \to \infty} \theta_n = 1$

$$\int_{\mathfrak{S}} f \bar{f} \, d\omega_{w,z} = \lim_{n \to \infty} \sum_{l l'} \int_{|s| \leqq 1} \int_{d \leqq |z| \leqq \theta_n R(s)} z^{l+1} \bar{z}^{l'+1} dz \, d\bar{z} \, f_l(s) \overline{f_{l'}(s)} \, ds \, d\bar{s}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2l+4} \int_{|s| \leqq 1} \{R(s)^{2l+4} - d^{2l+4}\} f_l(s) \overline{f_l(s)} \, ds \, d\bar{s}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2l+4} \int_{|s| \leqq 1} \{R(s)^{2l+4} - d^{2l+4}\} f_l(s) \overline{f_l(s)} \, ds \, d\bar{s}.$$

Da $R(s) \geqq d$, ist der Integrand immer positiv, also jeder Summand positiv.

Die Summe wird am kleinsten, wenn ich alle $f_l(s) \equiv 0$ setze, soweit es die Normierungsbedingungen erlauben.

So erhalten wir

$$u^1 \equiv zs = w; \quad u^2 \equiv z \quad \text{und} \quad u^3 \equiv 1.$$

Die Minimumaufgabe für $\mathfrak{T}$ lösen wir genau so; wir brauchen nur an Stelle der Variablen s die Variable $t = \frac{z}{w}$ zu wählen. Die Lösungen sind die gleichen.

Die Funktionen

$$u^1 \equiv w, \quad u^2 \equiv z \quad \text{und} \quad u^3 \equiv 1$$

sind auch Lösungen des Minimalproblems für ganz $\mathfrak{K}$.

Denn es ist

$$\int_{\mathfrak{K}} f \bar{f} \, d\omega_{w,z} = \int_{\mathfrak{D}} + \int_{\mathfrak{S}} + \int_{\mathfrak{T}}.$$

Jedes Integral ist positiv und die obigen Funktionen liefern das Minimum für jedes der drei Teilintegrale.

Satz 5. *Die einzigen mittelpunktstreuen Abbildungen eines Kreiskörpers auf einen anderen sind die affinen Transformationen.*

Aus Satz 4 folgt zunächst, daß Kreiskörper nicht normiert aufeinander abbildbar sind (siehe Schluß von § 1).

Nicht normierte Abbildungen kann man aber durch Zwischenschalten von ganzen linearen Transformationen in normierte verwandeln. Selbstverständlich führen die affinen Transformationen einen Kreiskörper in einen Kreiskörper über.

§ 3.

Über die Abbildung von Hartogsschen Bereichen.

Jeder Hartogssche Bereich $\mathfrak{H}$ läßt sich in der Form $|z| = R(w)$ darstellen. Mit $\mathfrak{B}_w$ will ich das einfach zusammenhängende Gebiet der w-Ebene bezeichnen, das durch die Gesamtheit der w-Koordinaten des Hartogsschen Bereichs gegeben wird, d. h. also die Projektion von $\mathfrak{H}$ auf die w-Ebene.

Geben wir zunächst eine geeignete Reihenentwicklung einer in einem gegebenen Hartogsschen Bereich $\mathfrak{H}$ regulären Funktion an.

Satz 5. *Ist $f(w, z)$ in dem gegebenen Hartogsschen Bereich $\mathfrak{H}$ regulär, so läßt es sich durch eine in jedem inneren Teilbereich von $\mathfrak{H}$ gleichmäßig konvergente Reihe*

$$(7) \qquad f(w, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu f_\nu(w)$$

— $f_\nu(w)$ regulär in $\mathfrak{B}_w$ — darstellen[13]).

Mit Hilfe dieser Darstellung können wir jetzt nähere Aussagen über die Minimalfunktionen in Satz 1 machen.

Satz 6. *Die Minimalfunktionen in Satz* 1 *sind bei einem Hartogsschen Bereich von der Form*

$$u^1 = u_1(w); \quad u^2 = u_2(w) \quad \text{und} \quad u^3 = u_3(w).$$

Es ist

$$\int_{\mathfrak{H}} f(w, z)\overline{f(w,z)}\, d\omega_{w,z} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{H}_n} f\cdot\bar{f}\, d\omega_{w,z},$$

wo $\mathfrak{H}_n$ der Bereich: $|z| = \theta_n R(w)$ mit $0 < \theta_n < 1$ und $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 1$ ist. Unter Anwendung von Satz 5 ergibt sich, da man in $\mathfrak{H}_n$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (7) Summation und Integration vertauschen kann,

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{n n'} \int_{\mathfrak{B}_w} \int_{|z|=R(w)} z^n \cdot \bar{z}^{n'} dz\, d\bar{z} \cdot f_n(w)\overline{f_{n'}(w)}\, dw\, d\bar{w},$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2l+2} \int_{\mathfrak{B}_w} R^{2n+2}(w) f_n(w)\overline{f_n(w)}\, dw\, d\bar{w}.$$

Die einzelnen Summanden sind positiv. Wir erhalten den kleinsten Wert für das Integral, falls wir möglichst viele $f_n(w) \equiv 0$ annehmen, soweit es die Normierungen erlauben.

Diese Normierungen lauten ja bei der Darstellung durch

$$N^1: \quad f_0(0) = 0; \quad f_0'(0) = 1; \quad f_1(0) = 0.$$
$$N^2: \quad f_0(0) = 0; \quad f_0'(0) = 0; \quad f_1(0) = 1.$$
$$N^3: \quad f_0(0) = 1.$$

---

[13]) Zum Beweis siehe die in Anm. [9]) angeführte Arbeit von Hartogs, S. 27, § 6.

So finden wir:

u^1 ist eine reine Funktion von w und zwar die Funktion, die

$$\int_{\mathfrak{B}_w} R^2(w) f(w) \overline{f(w)}\, dw\, d\bar{w}$$

zum Minimum macht, wo für $f(w)$ alle die Funktionen zur Konkurrenz zugelassen sind, die in $\mathfrak{B}_w$ regulär sind und den Nebenbedingungen $f(0)=0$ und $f'(0)=1$ genügen.

Ebenso ergibt sich $f(0)=1$, wo u^2 die Lösung von

$$\int_{\mathfrak{B}_w} R^4(w) f \cdot \bar{f}\, dw\, d\bar{w} = \text{Min.}$$

mit der Nebenbedingung $f(0)=1$ ist, und $u^3 = u_3(w)$ als Lösung von

$$\int_{\mathfrak{B}_w} R^2(w) f \bar{f}\, dw\, d\bar{w} = \text{Min.}$$

mit $f(0)=1$.

Aus der speziellen Form der Minimalfunktionen eines Hartogsschen Bereichs folgt jetzt:

Satz 7. *Wenn ein Hartogsscher Bereich $\mathfrak{H}_1$ auf einen anderen $\mathfrak{H}_2$ normiert so abgebildet wird, daß der Nullpunkt innerer Punkt und Punkt der Symmetrieebene von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ ist, so ist die Abbildung von der Form*

$$L\colon\quad \begin{aligned} w' &= g(w), \\ z' &= z \cdot h(w). \end{aligned}$$

Jede eineindeutige Transformation L bildet einen Hartogsschen Bereich auf einen Hartogsschen Bereich ab.

Es sei

$$\begin{aligned} w' &= g_1(w, z), \\ z' &= g_2(w, z) \end{aligned}$$

eine solche normierte Abbildung von $\mathfrak{H}_1$ auf $\mathfrak{H}_2$. Die Funktion $\tilde{w}(w, z)$ in Satz 2, die zum Bereich $\mathfrak{H}_1$ gehört, ist nach Satz 6 unabhängig von z'.

$$\tilde{w}_{\mathfrak{H}_2} = \frac{u^1_{\mathfrak{H}_2}(w')}{u^3_{\mathfrak{H}_2}(w')} = \tilde{w}(w').$$

Entsprechend ist

$$\tilde{w}_{\mathfrak{H}_1} = \frac{u^1_{\mathfrak{H}_1}(w)}{u^3_{\mathfrak{H}_1}(w)} = \tilde{w}(w)$$

unabhängig von z.

Da nach Satz 2 $\tilde{w}$ kovariant gegen normierte Abbildungen ist, folgt

$$\tilde{w}_{\mathfrak{H}_2}(g_1(w, z)) = \tilde{w}_{\mathfrak{H}_1}(w)$$

und daher

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} \equiv 0, \quad \text{d. h.} \quad w' = g(w).$$

Aus der Kovarianz von

$$\tilde{z} = \frac{z \cdot u_2(w)}{u_1(w)} = \tilde{z} \cdot \tilde{h}(w)$$

folgt dann ebenso

$$g_2(w, z) \equiv z \cdot h(w).$$

Die Umkehrung beweist man leicht, wenn man in die Darstellung $|z| = R(w)$ von $\mathfrak{H}$ die Transformation L einsetzt.

Satz 8. *Wenn ein Hartogsscher Bereich $\mathfrak{H}$ normiert auf einen Kreiskörper $\mathfrak{K}$ abbildbar ist, so ist $\mathfrak{K}$ ein Reinhardtscher Kreiskörper.*

$$(8) \qquad \begin{aligned} \tilde{w}_{\mathfrak{H}} &= \tilde{g}(w), \\ \tilde{z}_{\mathfrak{H}} &= z \cdot \tilde{h}(w) \end{aligned}$$

sei das $\mathfrak{H}$ zugeordnete Funktionenpaar $(\tilde{w}, \tilde{z})$, dessen spezielle Form wir ja im vorigen Satze fanden.

Nach Satz 4 ist ein Kreiskörper ein Repräsentantenreich, also

$$(9) \qquad \begin{aligned} \tilde{w}_{\mathfrak{K}} &\equiv w', \\ \tilde{z}_{\mathfrak{K}} &\equiv z'. \end{aligned}$$

Nach § 1 Schluß folgt:

(8) ist die Repräsentantenabbildung von $\mathfrak{H}$, also die Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{K}$.

— Die nötigen Voraussetzungen sind erfüllt, da es in der zu $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ gehörigen Abbildungsklasse ein eineindeutiges Abbildungspaar (w, z) gibt, nämlich (9). —

Die Abbildung (8) ist aber von der Form L, bildet also nach Satz 8 $\mathfrak{H}$ auf einen Hartogsschen Bereich $\mathfrak{H}_1$ ab.

$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{K}$ muß also zugleich Kreiskörper und Hartogsscher Bereich sein. Diese Eigenschaft haben aber nur die Reinhardtschen Kreiskörper.

Satz 9. *Wenn ein Kreiskörper auf einen Hartogsschen Bereich so abgebildet wird, daß der Mittelpunkt in einen Punkt der Symmetrieebene des Hartogsschen Bereichs übergeht, so ist der Kreiskörper ein affines Bild eines Reinhardtschen Kreiskörpers.*

Der Beweis folgt direkt aus Satz 7, wenn man bedenkt, daß man jede Transformation durch Einschalten von ganzen linearen Transformationen in eine normierte Transformation überführen kann.

Man könnte nun annehmen, jeder Hartogssche Bereich sei auf einen Reinhardtschen Kreiskörper auf die angegebene Weise abbildbar. Das ist aber nicht der Fall. Um das einzusehen, wollen wir zunächst die Abbildungen von Hartogsschen Bereichen auf Reinhardtsche Kreiskörper durch normierte Transformationen L näher untersuchen. Durch die Transformationen

$$L_1: \quad \begin{aligned} w' &= g(w), \\ z' &= z \end{aligned}$$

wird der Bereich $\mathfrak{B}_w$ auf einen anderen $\mathfrak{B}_{w'}$ abgebildet. Das Gebiet $\mathfrak{B}_w$ eines Reinhardtschen Kreiskörpers $\mathfrak{R}$ ist ein Kreis. Wenn also $\mathfrak{H}$ auf einen Reinhardtschen Kreiskörper abgebildet werden soll, so muß $\mathfrak{B}_w$ zunächst durch Transformation L_1 in einen Kreis übergeführt werden. In L ist also eine Transformation L_1 enthalten. Die Funktion $g(w)$ von L_1 ist die nach dem Riemannschen Abbildungssatz eindeutig bestimmte Kreisabbildungsfunktion $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$. Sie bildet $\mathfrak{H}$ auf einen Bereich $\mathfrak{H}_{\mathfrak{K}}$ ab, dessen $\mathfrak{B}_w$ ein Kreis $\mathfrak{K}$ ist. Die Transformationen, die $\mathfrak{H}_{\mathfrak{K}}$ normiert auf einen Bereich $\mathfrak{R}$ abbilden, müssen jetzt von der Form

$$L_2: \quad \begin{aligned} w' &= w, \\ z' &= z \cdot h(w) \end{aligned}$$

sein.

Nach dieser Zerlegung der Transformationen L in $L_1 \cdot L_2$ kann ich leicht beweisen:

Satz 10. *Es gibt Hartogssche Bereiche* $\mathfrak{H}^*$: $|z| = R^*(w)$, *die sich normiert nicht auf Reinhardtsche Kreiskörper* $\mathfrak{R}$: $|z| = R(|w|)$ *abbilden lassen.*

Nach den obigen Ausführungen kann ich annehmen, $\mathfrak{B}_w$ ist ein Kreis $\mathfrak{K}$. Dann kann die Abbildung nur die Form L_2 haben.

Ich betrachte nur solche Bereiche $\mathfrak{H}$, deren $R(w)$ in ganz $\mathfrak{K}$ dreimal differentiierbar ist. Dann ist

$$A(w) = \Delta_w \ln R(w)$$

eine in ganz $\mathfrak{K}$ differentiierbare Funktion, die invariant gegen L_2 ist.

Wenn wir Polarkoordinaten $w = re^{i\varphi}$ einführen, so schreibt sich ein Reinhardtscher Kreiskörper in der Form

$$|z| = R(r). \tag{10}$$

Es ist $\frac{\partial}{\partial\varphi} R(w) \equiv 0$. In (r, φ) Koordinaten ist

$$A(w) = \frac{\partial^2 \ln R(w)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\ln R(w) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\ln R(w).$$

Falls $\frac{\partial}{\partial\varphi} A(w) \not\equiv 0$, so ist auch $\frac{\partial}{\partial\varphi} R(w) \not\equiv 0$, also $R(w)$ kein Reinhardtscher Kreiskörper. Da als $R(w)$ jede beliebige in $\mathfrak{K}$ dreimal differentiierbare positive Funktion $R(u, v)$ gewählt werden kann, so kann man leicht Hartogssche Bereiche finden, deren $A(w)$ unabhängig von φ ist. Solche Bereiche seien mit $\mathfrak{H}^*$: $|z| = R^*(w)$ bezeichnet. Die Bereiche $\mathfrak{H}^*$ sind aber sicher nicht durch L_2 auf Reinhardtsche Kreiskörper abbildbar. Denn da $A(w)$ invariant gegen L_2 ist, gilt für jeden durch L_2 abgebildeten Bereich von $\mathfrak{H}^*$, daß $\frac{\partial}{\partial\varphi} A(w) \not\equiv 0$ ist.

Satz 11. *Nicht alle Hartogsschen Bereiche sind so auf Reinhardtsche Kreiskörper abbildbar, daß ein Punkt der Symmetrieebene des Hartogsschen Bereichs in den Mittelpunkt des Kreiskörpers übergeht.*

Gebe ich die Normierung der Abbildungen auf, so könnten die Bereiche $\mathfrak{H}$ nur durch die Transformationen

$$w' = \frac{w - \alpha}{\bar{\alpha} w - 1} \qquad (|\alpha| < 1),$$
$$z' = z$$

auf die im Satz geforderte Weise auf Reinhardtsche Kreiskörper abgebildet werden. (Ich kann jetzt annehmen, $\mathfrak{K}$ sei der Einheitskreis.) Wenn man unter den $R^*(w)$ nur solche auswählt, für die

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta_w \ln R^*\left(\frac{w - \alpha}{\bar{\alpha} w - 1}\right) \not\equiv 0$$

für alle $|\alpha| < 1$ ist, was man sicher erreichen kann, so haben diese Bereiche die im Satz geforderte Eigenschaft.

Satz 12. *Nicht alle Hartogsschen Bereiche sind auf Kreiskörper $\mathfrak{K}$ so abbildbar, daß ein Punkt der Symmetrieebene von $\mathfrak{H}$ in den Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ übergeht.*

Der Beweis folgt direkt aus den Sätzen 9 und 11.

(Eingegangen am 14. 12. 1929.)

Ein Satz über primäre Integritätsbereiche.

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

Vorbemerkungen zur Terminologie.

Unter einem „Ring“ schlechtweg verstehen wir im folgenden stets einen kommutativen Ring mit Einheitselement ε, unter einem „Integritätsbereich“ einen Ring ohne echte Nullteiler. Die Worte „Einheit“, „(echter) Nullteiler“, „(echtes) nilpotentes Element“ gebrauchen wir im üblichen Sinn; unter einem „regulären“ Element verstehen wir einen Nichtnullteiler, unter einem „regulären“ Ideal ein Ideal, das mindestens einen Nichtnullteiler enthält. Im übrigen gebrauchen wir die in der Idealtheorie üblichen Abkürzungen: $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\frown\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{R}|\mathfrak{a}$ bedeutet den größten gemeinschaftlichen Teiler, den Durchschnitt, den Quotienten der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bzw. das Restklassensystem des Ringes $\mathfrak{R}$ nach dem Ideal $\mathfrak{a}$. Das Einheitsideal bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}$, das Nullideal mit $\mathfrak{n}$, unter Ideal schlechtweg verstehen wir stets ein von $\mathfrak{o}$ — und im Falle des Integritätsbereichs auch von $\mathfrak{n}$ — verschiedenes Ideal. Die Bezeichnungen „Basis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des Ideals $\mathfrak{a}$“ und „endliche Modulbasis des Ringes $\mathfrak{R}$ hinsichtlich des Ringes $\mathfrak{S}$“ gebrauchen wir in dem in der allgemeinen Idealtheorie üblichen Sinne[1]).

Zu jedem Ring $\mathfrak{J}$ gehört ein durch $\mathfrak{J}$ (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmter Quotientenring $\mathfrak{K}$, der aus allen formalen Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{K}$ mit regulärem Nenner besteht; $\mathfrak{K}$ ist der kleinste Erweiterungsring von $\mathfrak{J}$, in dem alle regulären Elemente von $\mathfrak{J}$ Einheiten werden. Ist $\mathfrak{J}$ Integritätsbereich, so stellt $\mathfrak{K}$ einen Körper dar, und wir reden vom Quotientenkörper anstatt vom Quotientenring.

[1]) Zu den im folgenden benutzten Definitionen und Sätzen aus der allgemeinen Idealtheorie vgl. vor allem die beiden grundlegenden Arbeiten von E. Noether: Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen 83 (1921), S. 23–67 (in Zukunft kurz „N. I“); Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 96 (1926), S. 23–61 (in Zukunft kurz „N. II“).

Ein Element α aus $\mathfrak{K}$ heißt „von $\mathfrak{J}$ ganz abhängig", wenn es einer Gleichung $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{J}$ genügt. Die Gesamtheit aller Elemente aus $\mathfrak{K}$, die von $\mathfrak{J}$ ganz abhängen, bildet einen Zwischenring $\mathfrak{O}$ zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$, „den zu $\mathfrak{J}$ gehörigen ganz abgeschlossenen Ring".

Einleitung.

Ein Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ soll *primär* heißen, wenn er nur ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ enthält; die primären Integritätsbereiche sind vor allem deshalb wichtig, weil jeder beliebige Integritätsbereich aus algebraischen Zahlen als Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) primären dargestellt werden kann[2]). Für die Untersuchung eines vorgelegten primären Integritätsbereichs $\mathfrak{J}$ ist die Kenntnis der Idealstruktur des zugehörigen ganz abgeschlossenen Integritätsbereichs $\mathfrak{O}$ von entscheidender Bedeutung. In der vorliegenden Arbeit beweisen wir nun folgenden allgemeinen Satz: Gilt in dem primären Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ der Noethersche Teilerkettensatz, so läßt sich in dem zugehörigen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich $\mathfrak{O}$ jedes Ideal als Produkt von Potenzen endlich vieler fester, paarweise teilerfremder Primideale darstellen.

Der Beweis unseres Satzes ist nicht einfach, aber in verschiedener Hinsicht methodisch interessant. Zunächst ist leicht einzusehen, daß die Behauptung richtig ist, wenn in $\mathfrak{O}$ der Teilerkettensatz gilt, und das ist sicher der Fall, wenn $\mathfrak{O}$ hinsichtlich $\mathfrak{J}$ eine endliche Modulbasis besitzt. Die Existenz der endlichen Modulbasis aber kann ohne weiteres nur unter der besonderen Annahme bewiesen werden, daß $\mathfrak{J}$ „$\mathfrak{p}$-adisch abgeschlossen" ist, d. h. daß in $\mathfrak{J}$ jedes „verträgliche" unendliche Kongruenzensystem nach sämtlichen Potenzen des Primideals $\mathfrak{p}$ stets eine Lösung besitzt. Um nun allgemein durchzukommen, konstruieren wir nach Prüfer-v. Neumannschem Vorbild[3]) zu einem beliebigen primären Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ dadurch einen Erweiterungsring $\mathfrak{J}^*$, daß wir zu $\mathfrak{J}$ als neue Elemente „ideale Lösungen" der sämtlichen verträglichen in $\mathfrak{J}$ selbst noch nicht lösbaren Kongruenzensysteme nach den Potenzen von $\mathfrak{p}$ adjungieren. Der so entstehende Ring $\mathfrak{J}^*$ ist im allgemeinen kein Integritätsbereich mehr; dagegen gilt in $\mathfrak{J}^*$ ebenso wie in $\mathfrak{J}$ der Teilerkettensatz, und es gibt in $\mathfrak{J}^*$ ein einziges reguläres Primideal $\mathfrak{p}^*$, hinsichtlich dessen $\mathfrak{J}^*$ $\mathfrak{p}$-adisch abgeschlossen ist. Mit Hilfe dieser Tatsachen kann man nun zeigen, daß in dem zu $\mathfrak{J}^*$ gehörigen ganz

[2]) Vgl. W. Krull, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern, Math. Zeitschr. **29** (1928), S. 42–54, § 1.

[3]) H. Prüfer, Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie, Math. Annalen **94** (1925), S. 138–243; J. v. Neumann, Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen, Szegeder Berichte 1926.

abgeschlossenen Ring $\mathfrak{O}^*$ jedes reguläre Ideal eindeutig als Produkt von Potenzen endlich vieler fester, paarweise teilerfremder Primideale darstellbar ist. Enthält nämlich $\mathfrak{J}^*$ kein echtes nilpotentes Element, so ergibt sich die Behauptung aus der (allerdings nicht ganz einfach zu beweisenden) Existenz einer endlichen Modulbasis von $\mathfrak{O}^*$ hinsichtlich $\mathfrak{J}^*$; im allgemeinen Fall kommt man dann dadurch zum Ziel, daß man von $\mathfrak{J}^*$ zum Restklassensystem $\mathfrak{J}^*|\mathfrak{l}^*$ nach dem Ideal $\mathfrak{l}^*$ aller nilpotenten Elemente aus $\mathfrak{J}^*$ übergeht.

Es handelt sich nun noch darum, den für $\mathfrak{O}^*$ gewonnenen Satz auf den zu dem ursprünglichen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ gehörigen ganz abgeschlossenen Ring $\mathfrak{O}$ zu übertragen. Hier liefern die Begriffsbildungen der „*Bewertungstheorie*" das entscheidende Hilfsmittel. Man kann nämlich auf Grund des für die regulären Ideale von $\mathfrak{O}^*$ gültigen Produktzerlegungssatzes endlich viel „Bewertungen" $B_1, B_2, \ldots, B_n$ des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{J}$ so konstruieren, daß $\mathfrak{O}$ gerade aus allen und nur den Elementen von $\mathfrak{K}$ besteht, die in $B_1, B_2, \ldots, B_n$ gleichzeitig nichtnegative Werte besitzen. Nun gilt aber — und damit schließt sich die Beweiskette — der folgende, auch an und für sich interessante Bewertungssatz:

Sind $B_1, B_2, \ldots, B_n$ endlich viel Bewertungen des Körpers $\mathfrak{K}$ und bedeutet $\mathfrak{O}$ den Integritätsbereich aller der Körperelemente, die in $B_1, B_2, \ldots, B_n$ gleichzeitig nichtnegative Werte besitzen, so läßt sich in $\mathfrak{O}$ jedes Ideal eindeutig als Produkt von Potenzen von n festen, paarweise teilerfremden Primidealen darstellen.

Die oben skizzierte Beweisanordnung unseres Hauptsatzes hat den Vorteil, die leitenden Gedanken klar hervortreten zu lassen. Übersichtlicher im einzelnen und kürzer dürfte dagegen der Beweis bei der Anordnung ausfallen, die für die ausführliche Darstellung des Textes gewählt wurde. In § 1 wird der oben erwähnte Bewertungssatz mit den für unsere Zwecke wichtigen Anwendungen abgeleitet. In § 2 wird dann gleich die Theorie der allgemeinen, $\mathfrak{p}$-adisch abgeschlossenen Ringe $\mathfrak{J}^*$ entwickelt, und in § 3 wird gezeigt, wie man zu einem beliebig vorgegebenen primären Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ den zugehörigen $\mathfrak{p}$-adisch abgeschlossenen Ring $\mathfrak{J}^*$ konstruieren kann, wobei die Hauptschwierigkeit in dem Nachweis liegt, daß $\mathfrak{J}^*$ wirklich die gewünschten Eigenschaften besitzt, insbesondere dem Teilerkettensatz genügt.

Zum Schluß möge noch kurz auf die Bedeutung der vorliegenden Note für die allgemeine Theorie der p-adischen Zahlen hingewiesen werden. Unsere Untersuchungen zeigen, daß die grundlegenden p-adischen Begriffsbildungen in der Fassung, wie sie ihnen z. B. H. Prüfer gegeben hat, über ihr bisheriges Anwendungsgebiet hinaus auch zum Studium von solchen Integritätsbereichen und Ringen herangezogen werden können, die nicht

ganz abgeschlossen sind, und in denen daher sicher nicht jedes reguläre Ideal Primidealpotenz oder Produkt von Primidealpotenzen ist. Besonders beachtenswert ist dabei die Tatsache, daß bei unsern Entwicklungen die Einführung der „$\mathfrak{p}$-adischen Abgeschlossenheit“ eines Ringes nicht nur einen Kunstgriff darstellt, der etwa für einen bereits bewiesenen Satz einen besonders einfachen oder von einem gewissen Standpunkt aus besonders durchsichtigen Beweis liefert. Im Gegenteil, ohne die $\mathfrak{p}$-adischen Hilfsmittel wäre es mir wenigstens heute absolut unmöglich, den meines Wissens noch nicht bekannten Hauptsatz der vorliegenden Note zu beweisen.

§ 1.

Ein allgemeiner Bewertungssatz nebst Anwendung.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Körper. Dann wollen wir von einer (ganzzahligen) „*Bewertung B*“ von $\mathfrak{K}$ sprechen, wenn jedem von 0 verschiedenen Körperelement α eine eindeutig bestimmte ganze rationale Zahl als „Wert“ zugeordnet ist, und wenn dabei die folgenden Bedingungen erfüllt sind[4]):

1. *Der Wert des Produktes ist gleich der Summe der Werte der einzelnen Faktoren.*

2. *Der Wert einer von* 0 *verschiedenen Summe ist nie kleiner als der kleinste der Werte der einzelnen Summanden.*

3. *Es gibt in* $\mathfrak{K}$ *mindestens ein Element, das in der Bewertung den Wert* 1 *besitzt.*

Ist irgendeine Menge M von Bewertungen von $\mathfrak{K}$ vorgelegt, so bildet die Gesamtheit derjenigen Körperelemente, die in den Bewertungen von M nichtnegative Werte besitzen, zusammen mit dem Nullelement einen in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Integritätsbereich $\mathfrak{O}$. Besteht dabei insbesondere die Menge M aus der einzigen Bewertung B, so gilt folgender, leicht zu beweisender Satz[5]):

Es gibt in $\mathfrak{O}$ nur Hauptideale, die sämtlich Potenzen eines einzigen Primideals $\mathfrak{p}$ sind. $\mathfrak{p}^r$ besteht aus allen und nur den Elementen, die in B

---

[4]) Zu der hier gewählten Bewertungsdefinition vgl. W. Krull, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 527—557, § 1, insbesondere Anm. [8]). In der genannten Arbeit ist die Bewertungsdefinition in zwei Hinsichten weiter gefaßt als im Text. Einerseits werden als Werte beliebige reelle, nicht nur ganze rationale Zahlen zugelassen und andererseits wird als Eigenschaft 3 nur die Existenz eines Elementes von von 0 verschiedenem Werte, nicht die Existenz eines Elementes vom Werte 1 gefordert. Die engere Definition des Textes reicht für die Zwecke der vorliegenden Arbeit aus und hat außerdem den Vorteil, daß es keine zwei verschiedenen Bewertungen von $\mathfrak{K}$ im Sinne des Textes gibt, bei denen genau die gleiche Menge von Elementen nichtnegative Werte besitzt.

[5]) Vgl. K. Rychlik, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper, Journ. f. Math. **153** (1923), S. 94—107, § 6, sowie § 3 der in Anm. [4]) zitierten Arbeit.

mindestens den Wert r haben, und es bildet jedes Element vom genauen Werte r in B eine eingliedrige Basis von $\mathfrak{p}^r$. — Wir beweisen jetzt folgende Verallgemeinerung:

Satz 1. *Es seien $B_1, B_2, \ldots, B_n$ endlich viel Bewertungen von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{O}$ sei der Integritätsbereich derjenigen Körperelemente, die in sämtlichen B_i nichtnegative Werte besitzen. Dann sind alle Ideale von $\mathfrak{O}$ Hauptideale und Produkte von Potenzen endlich vieler Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Das Ideal $\mathfrak{p}_1^{r_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n^{r_n}$ besteht aus allen und nur den Elementen, die für $i = 1, 2, \ldots, n$ in B_i jeweils mindestens den Wert r_i haben, und jedes Element von den genauen Werten r_i in den B_i liefert eine eingliedrige Basis von $\mathfrak{p}_1^{r_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n^{r_n}$.*

Satz 1 wird bewiesen sein, sobald die Richtigkeit der folgenden beiden Hilfssätze gezeigt ist:

Hilfssatz 1. *Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ irgendwelche nichtnegative ganze Zahlen, so gibt es in $\mathfrak{K}$ mindestens ein Element a, das für $i = 1, 2, \ldots, n$ in B_i jeweils gerade den Wert r_i hat.*

Hilfssatz 1a. *Enthält das Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{O}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ jeweils ein Element a_i vom Werte r_i in B_i, so gibt es in $\mathfrak{a}$ auch ein Element a, das gleichzeitig in $B_1, B_2, \ldots, B_n$ die bzw. Werte $r_1, r_2, \ldots, r_n$ besitzt.*

Was zunächst Hilfssatz 1a angeht, so ist er eine einfache Folge von Hilfssatz 1 und den Grundeigenschaften der Bewertungen. Verstehen wir nämlich unter b_i ein nach Hilfssatz 1 in $\mathfrak{O}$ stets vorhandenes Element, das für $k \neq i$ in B_k den Wert $r_k + 1$, in B_i dagegen den Wert 0 hat, so ist $a = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$ ein Element der in Hilfssatz 2 geforderten Art. — Es bleibt also nur noch Hilfssatz 1 zu beweisen. Hier führt eine zwar kurze, aber etwas unschöne Rechnung zum Ziel. Vielleicht ist es am besten, diese Rechnung selbst nur anzudeuten, dafür aber die benutzten Gedanken scharf hervorzuheben:

a) Aus den Bewertungseigenschaften 1 und 2 ergibt sich unmittelbar: Bedeutet ϱ ein Element aus $\mathfrak{K}$, das in keiner der Bewertungen B_i den Wert 0 hat, und verstehen wir unter ε (hier wie immer im folgenden) das Einheitselement von $\mathfrak{K}$, so gehört $\sigma = (\varepsilon + \varrho)^{-1}$ zu $\mathfrak{O}$, und zwar ist der Wert von σ in B_i dann und nur dann positiv, wenn der Wert von ϱ dort negativ ist.

b) Für $i \neq k$ gibt es in $\mathfrak{K}$ stets mindestens ein Element ϱ_{ik} von negativem Werte in B_i und positivem Werte in B_k.[6]) Bilden wir nun für festes k das Produkt $\sigma_{ik} = \prod_{l \neq k} \varrho_{lk}^{e_{il}}$, so können wir durch geeignete

[6]) Folgt leicht aus der am Schlusse von Anm. [4]) angegebenen Eindeutigkeitseigenschaft der Bewertungen.

Wahl der Exponenten e_{il} erreichen, daß der Wert von σ_{ik} in B_k positiv, in einem beliebig vorgeschriebenen $B_i \neq B_k$ negativ, in allen übrigen B_l jedenfalls von 0 verschieden ist. Dann aber stellt (nach a)) $\tau_{ik} = (\varepsilon + \sigma_{ik})^{-1}$ ein Element aus $\mathfrak{O}$ vom Werte 0 in B_k und von positivem Werte in B_i dar.

c) Setzen wir $\pi^{(k)} = \prod_{l \neq k} \tau_{lk}$, $\pi_i = \sum_{k \neq i} \pi^{(k)}$, so hat π_i nur in B_i einen von 0 verschiedenen, und zwar positiven Wert. Bedeutet ferner α_i irgendein Element aus $\mathfrak{K}$ vom Werte 1 in B_i, so ist für genügend großes e der Wert von $\pi_i^* = \alpha_i \cdot \prod_{k \neq i} \pi_k^e + \pi_i^e$ in B_i gleich 1, in $B_k \neq B_i$ stets gleich 0. — Aus den Elementen π_k^* kann man schließlich durch Produktbildung ohne weiteres Elemente gewinnen, die in $B_1, B_2, \ldots, B_n$ beliebig vorgeschriebene ganzzahlige Werte haben.

Durch a), b), c) ist der Beweis von Hilfssatz 1 und damit auch der von Satz 1 in vollem Umfange erbracht. Als Anwendung ergibt sich:

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{K}$ der Quotientenkörper des Integritätsbereiches $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{K}^*$ der Quotientenring des Ringes $\mathfrak{O}^*$. Ferner sei $\mathfrak{O}^*$ Obermenge von $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{K}^*$ Obermenge von $\mathfrak{K}$, und es sei $\mathfrak{O}$ gerade gleich dem Durchschnitt von $\mathfrak{O}^*$ und $\mathfrak{K}$. Läßt sich dann jedes reguläre Ideal aus $\mathfrak{O}^*$ eindeutig als Produkt endlich vieler fester, paarweise teilerfremder Primideale $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*, \ldots, \mathfrak{p}_m^*$ darstellen, so gilt das gleiche für die (von $\mathfrak{n}$ verschiedenen) Ideale von $\mathfrak{O}$.*

Es seien $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*, \ldots, \mathfrak{p}_n^*$ $(n \leqq m)$ diejenigen unter den Primidealen $\mathfrak{p}_i^*$, die von 0 verschiedene Elemente aus $\mathfrak{O}$ enthalten. Schließen wir den trivialen Fall $\mathfrak{K} = \mathfrak{O}$ von der Betrachtung aus, so ist sicher $n > 0$. Wir zeigen jetzt, daß $\mathfrak{O}$ gerade aus allen und nur den Elementen besteht, die in n nicht notwendig sämtlich verschiedenen, den Primidealen $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*, \ldots, \mathfrak{p}_n^*$ entsprechenden Bewertungen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ von $\mathfrak{K}$ nichtnegative Werte haben. Damit wird dann angesichts von Satz 1 die Richtigkeit von Satz 2 bewiesen sein.

Die Konstruktion der zu den $\mathfrak{p}_i^*$ gehörigen Bewertungen B_i verläuft folgendermaßen: Es sei $\alpha \neq 0$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{K}$, $\alpha = \frac{z}{n}$ sei eine beliebige Quotientendarstellung von α durch Elemente von $\mathfrak{O}$, e_{i_1} bzw. e_{i_2} bedeute den Exponenten, mit dem das Primideal $\mathfrak{p}_i^*$ im regulären Hauptideal (z) bzw. (n) von $\mathfrak{O}^*$ aufgeht. Dann hängt die Differenz $v_i(\alpha) = e_{i_1} - e_{i_2}$ nur von α, nicht von der speziellen Quotientendarstellung $\alpha = \frac{z}{n}$ ab, und es ist für gewisse α sicher $v_i(\alpha) > 0$.

Als Wert $w_i(\alpha)$ in B_i definieren wir nun den Quotienten von $v_i(\alpha)$ durch den positiv genommenen größten gemeinschaftlichen Teiler j_i aller $v_i(\beta)$ für beliebiges $\beta \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$.

Man überzeugt sich mühelos, daß die so eingeführten Bewertungen B_i tatsächlich den oben aufgestellten drei Bewertungsaxiomen genügen. Daß insbesondere in $\mathfrak{K}$ stets Elemente vom Werte 1 in B_i existieren, folgt aus dem Umstand, daß die Gesamtheit der ganzen rationalen Werte einerseits hinsichtlich der Addition eine Gruppe bildet und andererseits keinen von 1 verschiedenen größten gemeinschaftlichen Teiler besitzt.

Wir untersuchen nun, wann das Element $\alpha = \frac{z}{n}$ aus $\mathfrak{K}$ bereits in $\mathfrak{O}$ vorkommt. Wegen der Gültigkeit der Durchschnittsgleichung $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}^* \wedge \mathfrak{K}$ ist für das Vorkommen von α in $\mathfrak{O}$ notwendig und hinreichend, daß α zu $\mathfrak{O}^*$ gehört, daß also in $\mathfrak{O}^*$ das Hauptideal (z) durch das Hauptideal (n) teilbar ist. Das heißt aber nichts anderes, als daß für $i = 1, 2, \ldots, m$ das Hauptideal (z) niemals durch eine niedrigere Potenz von $\mathfrak{p}_i^*$ teilbar sein darf als das Hauptideal (n), und nach der Art, wie wir die Bewertungen B_i konstruiert haben, ist diese Bedingung wiederum gleichwertig mit der Forderung, daß α in $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nichtnegative Werte besitzen soll. (Man beachte, daß (z) und (n) wegen der Zugehörigkeit von z und n zu $\mathfrak{K}$ sicher durch $\mathfrak{p}_{n+1}^*, \mathfrak{p}_{n+2}^*, \ldots, \mathfrak{p}_m^*$ unteilbar sind!)

Die angestellten Betrachtungen zeigen, daß auf den Integritätsbereich $\mathfrak{O}$ aus $\mathfrak{K}$ tatsächlich Satz 1 angewandt werden kann, und die in Satz 2 über die Idealstruktur von $\mathfrak{O}$ aufgestellte Behauptung ist somit gerechtfertigt.

§ 2.

Der Hauptsatz über $\mathfrak{p}$-adisch abgeschlossene Ringe.

In § 2 verstehen wir unter $\mathfrak{J}$ einen Ring mit dem Quotientenring $\mathfrak{K}$ und dem zugehörigen ganz abgeschlossenen Ring $\mathfrak{O}$, der den folgenden vier Bedingungen genügt:

1. *In $\mathfrak{J}$ gilt der Teilerkettensatz.*

2. *$\mathfrak{J}$ enthält kein echtes nilpotentes Element.*

3. *In $\mathfrak{J}$ gibt es ein einziges reguläres Primideal $\mathfrak{p}$; jedes durch $\mathfrak{p}$ unteilbare Element ist in $\mathfrak{J}$ Einheit.*

4. *Jedes verträgliche unendliche Kongruenzensystem $x \equiv \alpha_i(\mathfrak{p}^i)$ nach sämtlichen Potenzen von $\mathfrak{p}$ besitzt in $\mathfrak{J}$ eine Lösung α.*

Dabei soll in Bedingung 4 ein unendliches Kongruenzensystem $x \equiv \alpha_i(\mathfrak{p}^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ „verträglich" heißen, wenn jedes endliche Untersystem in $\mathfrak{J}$ lösbar ist, d. h. wenn die Kongruenzen $\alpha_{i+1} \equiv \alpha_i(\mathfrak{p}^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sämtlich erfüllt sind. Die Bedingung 2 besagt wegen der Gültigkeit des Teilerkettensatzes nichts anderes, als daß in $\mathfrak{J}$ das Nullideal den Durchschnitt von

endlich vielen (gegenseitig primen) Primidealen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n$ darstellt[7]). Aus Bedingung 3 kann man folgern:

Hilfssatz 2. *Bedeutet p einen beliebigen festen Nichtnullteiler aus $\mathfrak{J}$, so läßt sich jedes Element aus $\mathfrak{K}$ als Quotient eines Elementes aus $\mathfrak{J}$ durch eine Potenz von p darstellen.*

In der Tat, es sei $\alpha = \frac{r}{q}$ eine Quotientendarstellung des beliebigen Elementes α aus $\mathfrak{K}$ durch Elemente aus $\mathfrak{J}$. Dann ist in $\mathfrak{J}$ das Hauptideal (q) entweder gleich dem Einheits- oder gleich einem zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideal[8]); es ist daher auf jeden Fall eine endliche Potenz von p durch q teilbar, $p^e = q \cdot s$, und wir erhalten $\alpha = \frac{r \cdot s}{p^e}$.

Wir denken uns nun für die weiteren Untersuchungen von § 2 das Element p ein für allemal fest gewählt und verstehen für $i = 1, 2, \ldots$ unter $\mathfrak{O}_i$ die Menge derjenigen Elemente aus $\mathfrak{O}$, die sich in der Form $\alpha = \frac{z}{p^i}$ schreiben lassen, unter $\mathfrak{q}_i$ dagegen das Ideal aus $\mathfrak{J}$, das von den Zählern der Elemente von $\mathfrak{O}_i$ bei der angegebenen Darstellung gebildet wird. Dann ist $\mathfrak{O}_{i+1}$ stets Obermenge von $\mathfrak{O}_i$, und es ist $\mathfrak{O}$ nach Hilfssatz 1 gleich der Vereinigungsmenge sämtlicher $\mathfrak{O}_i$. $\mathfrak{q}_{i+1}$ dagegen stellt stets eine Untermenge von $\mathfrak{q}_i$ dar, und es gilt sogar:

Hilfssatz 3. *Der Durchschnitt der sämtlichen Ideale $\mathfrak{q}_i$ ist gleich dem Nullideal $\mathfrak{n}$.*

Wir zeigen, daß die Annahme der Existenz eines von 0 verschiedenen, in sämtlichen Idealen $\mathfrak{q}_i$ vorkommenden Elementes q zu einem Widerspruch führt. — Setzen wir zunächst voraus, daß in $\mathfrak{J}$ das Nullideal Primideal, daß also $\mathfrak{J}$ Integritätsbereich ist, so muß (q) ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, es muß also für hinreichend großes $i-1$ das Element p^{i-1} durch q teilbar sein, $p^{i-1} = q \cdot r$. Es müßte dann weiter wegen der Zugehörigkeit von q zu $\mathfrak{q}_i$ das Element $p^{-1} = q \cdot r \cdot p^{-i}$ von $\mathfrak{J}$ ganz abhängen, und das ist unmöglich, da p zu $\mathfrak{p}$ gehört. — Ist allgemeiner in $\mathfrak{J}$ das Nullideal Durchschnitt von endlich viel Primidealen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n$, so ist q jedenfalls durch ein $\mathfrak{m}_i$, etwa durch $\mathfrak{m}_1$ unteilbar, und wir kommen zu demselben Widerspruch wie oben, wenn wir von $\mathfrak{J}$ zum Restklassenring $\mathfrak{J}\,|\,\mathfrak{m}_1$ übergehen[9]). — Auf Grund von Hilfssatz 3 und der (beim Beweise der

---

[7]) Die Behauptung des Textes folgt z. B. aus den Ergebnissen von N. I § 5.

[8]) Weil jedes Ideal aus $\mathfrak{J}$ nach N. I als Durchschnitt von Primäridealen darstellbar ist und $\mathfrak{q}$ außer $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$ keine Primidealteiler besitzt.

[9]) Man beachte: $\mathfrak{J}\,|\,\mathfrak{m}_1$ ist Integritätsbereich und genügt den Bedingungen 1, 3, 4; bedeuten ferner $\bar{q}$ und $\bar{p}$ die durch q und p in $\mathfrak{J}\,|\,\mathfrak{m}_1$ erzeugten Restklassen, so sind $(\bar{q})$ und $(\bar{p})$ zu dem ausgezeichneten Primideal von $\mathfrak{J}\,|\,\mathfrak{m}_1$ gehörige Primärideale, und es hängt der Quotient der Klassen $\bar{q}$ und $\bar{p}^i$ für jedes i von $\mathfrak{J}\,|\,\mathfrak{m}_1$ ganz ab.

Hilfssätze 2 und 3 nicht benutzten) $\mathfrak{p}$-adischen Abgeschlossenheit von $\mathfrak{J}$ zeigen wir jetzt weiter:

Hilfssatz 4. *Für hinreichend großes i ist $\mathfrak{q}_i$ durch das Hauptideal (p) teilbar.*

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}_i$ den größten gemeinschaftlichen Teiler $\mathfrak{q}_i + (p)$ von $\mathfrak{q}_i$ und (p). Die Kette $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ ist dann eine Vielfachenkette von zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primäridealen, bei der sämtliche Glieder Teiler des festen zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideals (p) sind. Nach einem bekannten Satz müssen daher von einem gewissen i an die Ideale $\mathfrak{r}_i$ sämtlich gleich werden, $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_{i+1} = \mathfrak{r}_{i+2} = \ldots$[10]). Wir wollen zeigen, daß daraus die Teilbarkeit von $\mathfrak{q}_i$ durch (p) folgt, und beweisen zunächst:

Jedes beliebige Element q_k aus $\mathfrak{q}_{i+k}$ genügt der Kongruenz $q_k \equiv 0\,((p^{k+1}) + \mathfrak{q}_{i+k+1})$.

In der Tat, für $k = 0$ ist die Behauptung wegen $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_{i+1}$ trivial. Wir dürfen sie daher beim Beweise für $k > 0$ für $k - 1$ bereits als bewiesen annehmen. Aus $\mathfrak{r}_{i+k} = \mathfrak{r}_{i+k+1}$ folgt eine Kongruenz $q_k \equiv p \cdot a\,(\mathfrak{q}_{i+k+1})$, und wegen der Teilbarkeit von $\mathfrak{q}_{i+k+1}$ durch $\mathfrak{q}_{i+k}$ ist dabei $p \cdot a \equiv 0\,(\mathfrak{q}_{i+k})$ und mithin $a \equiv 0\,(\mathfrak{q}_{i+k-1})$. (Man beachte die Definition von $\mathfrak{q}_{i+k}$!) Auf a läßt sich nun die Induktionsvoraussetzung anwenden, und man erhält $a = p^k \cdot b + c$; $c \equiv 0\,(\mathfrak{q}_{i+k})$, $q_k \equiv p^{k+1} \cdot b + p \cdot c \equiv p^{k+1} \cdot b\,(\mathfrak{q}_{i+k+1})$, womit die Hilfsbehauptung bewiesen ist.

Für ein beliebiges Element q_0 aus $\mathfrak{q}_i$ liefert das gewonnene Ergebnis ein Kongruenzensystem $q_0 \equiv a_0 \cdot p\,(\mathfrak{q}_{i+1})$, $q_0 \equiv a_0 \cdot p + a_1 \cdot p^2\,(\mathfrak{q}_{i+2})$, $q_0 \equiv a_0 \cdot p + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p^3\,(\mathfrak{q}_{i+3})$, ... Bezeichnen wir nun mit r_0 eine wegen der $\mathfrak{p}$-adischen Abgeschlossenheit von $\mathfrak{J}$ sicher vorhandene Lösung des unendlichen Kongruenzensystems $x \equiv a_0\,(\mathfrak{p})$, $x \equiv a_0 + a_1 \cdot p\,(\mathfrak{p}^2)$, $x \equiv a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2\,(\mathfrak{p}^3)$, ..., so ist die Differenz $q_0 - r_0 \cdot p$ durch die sämtlichen Ideale $\mathfrak{q}_k$ teilbar und mithin nach Hilfssatz 3 gleich dem Nullideal, wie unmittelbar aus der Tatsache zu ersehen, daß zu jedem $\mathfrak{q}_k$ stets eine durch $\mathfrak{q}_k$ teilbare Potenz von $\mathfrak{p}$ existiert. — Es ist also jedes beliebige Element q_0 aus $\mathfrak{q}_i$ und damit das Ideal $\mathfrak{q}_i$ selbst durch (p) teilbar. — Wir können nunmehr leicht den folgenden Hauptsatz beweisen:

Satz 3. *In dem zu $\mathfrak{J}$ gehörigen ganz abgeschlossenen Ring $\mathfrak{O}$ läßt sich jedes reguläre Ideal eindeutig als Produkt von Potenzen endlich vieler fester, paarweise teilerfremder Primideale darstellen. Außerdem besitzt $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{J}$ eine endliche Modulbasis.*

Wir erledigen zunächst den zweiten Teil der Behauptung. Wählen wir i so groß, daß die Ideale $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_{i+1}, \mathfrak{q}_{i+2}, \ldots$ sämtlich durch (p) teilbar

[10]) Vgl. W. Krull, Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, Sitz.-Ber. der Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Klasse, 1928, 7. Abhandl., § 1, Hilfssatz e).

sind, so wird $\mathfrak{q}_{i+k} = (p)^k \cdot \mathfrak{q}_i$, weil in der Gleichung $\mathfrak{q}_{i+k} = (p) \cdot \mathfrak{f}_{i+k}$ der wegen der Regularität von (p) eindeutig bestimmte Faktor $\mathfrak{f}_{i+k}$ offenbar gerade aus sämtlichen Elementen von $\mathfrak{q}_{i+k-1}$ besteht, eine Tatsache, von der wir bereits beim Beweise von Hilfssatz 4 gelegentlich Gebrauch gemacht haben. — Aus $\mathfrak{q}_{i+k} = (p)^k \cdot \mathfrak{q}_i$ $(k = 1, 2, \ldots)$ folgt aber $\mathfrak{O}_i = \mathfrak{O}_{i+1} = \mathfrak{O}_{i+2} = \ldots = \mathfrak{O}$. Bezeichnen wir nun mit $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ eine wegen der Gültigkeit des Teilerkettensatzes in $\mathfrak{J}$ sicher vorhandene endliche Basis von $\mathfrak{q}_i$, so bilden die Elemente $\alpha_1 = \frac{z_1}{p^i}$, $\alpha_2 = \frac{z_2}{p^i}$, ..., $\alpha_l = \frac{z_l}{p^i}$ gerade eine endliche Modulbasis von $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_i$ über $\mathfrak{J}$.

Aus der Existenz der endlichen Modulbasis und der Gültigkeit des Teilerkettensatzes in $\mathfrak{J}$ ergibt sich die Gültigkeit des Teilerkettensatzes in $\mathfrak{O}$.[11]) Bedeutet weiter $\bar{\mathfrak{p}}$ irgendein reguläres Primideal aus $\mathfrak{O}$, so ist $\bar{\mathfrak{p}} \wedge \mathfrak{J} = \mathfrak{p}$, die regulären Primideale von $\mathfrak{O}$ entsprechen daher eindeutig umkehrbar den sämtlichen Primidealen des Restklassensystems $\mathfrak{O} | (\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{p})$ von $\mathfrak{O}$ nach dem Erweiterungsideal von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{O}$. Das letztere Restklassensystem läßt sich aber auffassen als eine — wegen der Existenz der endlichen Modulbasis von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{J}$ endliche — algebraische Erweiterung des Restklassenkörpers $\mathfrak{J} | \mathfrak{p}$. $\mathfrak{O} | (\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{p})$ ist mithin ein „kommutatives endliches hyperkomplexes System“ und enthält daher nur endlich viele, paarweise teilerfremde Primideale[12]). Wir können also feststellen, daß in dem ganz abgeschlossenen Ring $\mathfrak{O}$ der Teilerkettensatz gilt, und daß außerdem in $\mathfrak{O}$ nur endlich viele reguläre Primideale existieren, die untereinander paarweise teilerfremd sind. Daraus folgt aber nach bekannten Sätzen die in Satz 3 über die Idealstruktur von $\mathfrak{O}$ aufgestellte Behauptung[13]).

Es ist für unsere weiteren Untersuchungen wesentlich, daß wenigstens der erste Teil von Satz 3 auch dann noch gilt, wenn in $\mathfrak{J}$ echte nilpotente Elemente auftreten:

Satz 4. *Auch wenn $\mathfrak{J}$ nur den Bedingungen 1, 3, 4, nicht aber der Bedingung 2 genügt, läßt sich in $\mathfrak{O}$ jedes reguläre Ideal eindeutig als Produkt von Potenzen endlich vieler fester, paarweise teilerfremder Primideale darstellen.*

In der Tat, verstehen wir unter $\mathfrak{l}$ das Ideal aller nilpotenten Elemente aus dem Quotientenring $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{l}$ auch Ideal in $\mathfrak{O}$, und es ist sogar $\mathfrak{l}$ durch die sämtlichen regulären Ideale von $\mathfrak{O}$ teilbar, weil gleichzeitig mit λ stets auch der Quotient $\lambda : \alpha$ von λ durch ein beliebiges reguläres Element α aus $\mathfrak{O}$ nilpotent ist und damit von $\mathfrak{J}$ ganz abhängt. Der Be-

---

[11]) Vgl. N. II § 2.

[12]) Vgl. Krull, Algebraische Erweiterungen kommutativer hyperkomplexer Systeme, Math. Annalen 97 (1927), S. 473–483, § 1.

[13]) Vgl. N. II § 7.

reich der regulären Ideale von $\mathfrak{O}$ ist daher hinsichtlich der Teilbarkeitsverhältnisse und der Produktbildung dem Bereich der regulären Ideale von $\overline{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}|\mathfrak{l}$ isomorph. $\overline{\mathfrak{O}}$ seinerseits besitzt $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}|\mathfrak{l}$ als Quotientenring, und es bildet die Gesamtheit aller Restklassen aus $\overline{\mathfrak{O}}$, die Elemente aus $\mathfrak{J}$ enthalten, einen zu $\mathfrak{J}|\mathfrak{l}$ isomorphen Ring $\overline{\mathfrak{J}}$. Ferner stellt $\overline{\mathfrak{O}}$ den zu $\overline{\mathfrak{J}}$ gehörigen ganz abgeschlossenen Ring dar, und es genügt $\overline{\mathfrak{J}}$, wie sehr leicht einzusehen, den sämtlichen Bedingungen 1, 2, 3, 4. Man darf daher auf $\overline{\mathfrak{O}}$ den Satz 3 anwenden, und daraus ergibt sich wegen des zwischen $\mathfrak{O}$ und $\overline{\mathfrak{O}}$ bestehenden Zusammenhangs sofort die Richtigkeit von Satz 4. — Wir beweisen schließlich noch die folgende

Ergänzung zu Satz 4. *Enthält $\mathfrak{J}$ ein echtes nilpotentes Element ϱ, so besitzt $\mathfrak{O}$ hinsichtlich $\mathfrak{J}$ sicher keine endliche Modulbasis.* Da nämlich wegen der Gültigkeit der Bedingungen 1 und 3 in $\mathfrak{J}$ der Durchschnitt der sämtlichen Potenzen des Primideals $\mathfrak{p}$ gleich dem Nullideal ist, kann ϱ nicht durch sämtliche Potenzen von $\mathfrak{p}$ teilbar sein, man kann daher einen Nichtnullteiler p aus $\mathfrak{J}$ so bestimmen, daß $\frac{\varrho}{p}$ nicht zu $\mathfrak{J}$ gehört. Aus der Tatsache, daß die Elemente $\varrho_i = \frac{\varrho}{p^i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ als nilpotente Elemente sämtlich von $\mathfrak{J}$ ganz abhängen, ergibt sich dann weiter, daß für kein i alle Elemente aus $\mathfrak{O}$ als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{J}$ mit dem festen Nenner p^i dargestellt werden können, wie es doch nach Hilfssatz 3 der Fall sein müßte, wenn $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{J}$ eine endliche Modulbasis besäße.

§ 3.

Der Hauptsatz für primäre endliche Integritätsbereiche.

Es sei jetzt $\mathfrak{J}$ ein *endlicher primärer Integritätsbereich*, d. h. ein Integritätsbereich, der den Bedingungen 1 und 3 von § 2 genügt, $\mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{K}$ sei wie üblich sein zugehöriger ganz abgeschlossener Integritätsbereich bzw. sein Quotientenkörper. Um zu zeigen, daß für $\mathfrak{O}$ auch in diesem Fall der Satz 4 von § 2 gilt, konstruieren wir zunächt zu $\mathfrak{J}$ einen primären $\mathfrak{p}$-adisch abgeschlossenen Erweiterungsring $\mathfrak{J}^*$ nach dem folgenden, von der Einführung der p-adischen Zahlkörper her bekannten Schema[14]):

Wir wählen als Elemente von $\mathfrak{J}^*$ alle und nur die unendlichen Folgen $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ von Elementen a_i aus $\mathfrak{J}$, die den Kongruenzen $a_{i+1} \equiv a_i (\mathfrak{p}^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ genügen, und definieren Gleichheit, Addition und Multiplikation durch:

(1) $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ dann und nur dann, wenn $a_i \equiv b_i (\mathfrak{p}^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

(2) $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \dotplus \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \{a_1 \dotplus b_1, a_2 \dotplus b_2, a_3 \dotplus b_3, \ldots\}$.

[14]) Vgl. vor allem die in Anm. [8]) zitierte Prüfersche Arbeit.

Daß bei unsern Festsetzungen $\mathfrak{J}^*$ einen Ring darstellt, ist unmittelbar klar. Beachtet man ferner die leicht zu beweisende Tatsache, daß in $\mathfrak{J}$ allein das Nullelement durch sämtliche Potenzen von $\mathfrak{p}$ teilbar ist, so erkennt man weiter, daß die Elemente aus $\mathfrak{J}^*$ von der Form $\{a, a, a, \ldots\}$ einen zu $\mathfrak{J}$ isomorphen Integritätsbereich bilden; identifizieren wir, was erlaubt ist, und in Zukunft geschehen soll, das Element $\{a, a, a, \ldots\}$ aus $\mathfrak{J}^*$ geradezu mit dem Element a aus $\mathfrak{J}$, so erscheint $\mathfrak{J}^*$ als Erweiterungsring von $\mathfrak{J}$. Daß auch (was gleichfalls in Zukunft geschehen soll) der zu $\mathfrak{J}^*$ gehörige Quotientenring $\mathfrak{K}^*$ als Erweiterung des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ aufgefaßt werden kann, ergibt sich aus

Hilfssatz 5. *Ein Nichtnullteiler aus $\mathfrak{J}$ ist auch in $\mathfrak{J}^*$ Nichtnullteiler.*

In der Tat, es sei $a = \{a, a, a, \ldots\} \neq 0$, $a^* = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $a \cdot a^* = 0$, d. h. nach (1) und (2): $a \cdot a_i \equiv 0(\mathfrak{p}^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Da nun in $\mathfrak{J}$ das Hauptideal (a) ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal oder das Einheitsideal darstellt, gilt eine Gleichung $\mathfrak{p}^\varrho = (a) \cdot \mathfrak{q}$, und aus $b \cdot a \equiv 0(\mathfrak{p}^{\varrho+\sigma})$ $(\sigma \geqq 0)$ folgt daher $b \equiv 0(\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}^\sigma)$, also auch $b \equiv 0(\mathfrak{p}^\sigma)$. Es ist mithin insbesondere $a_{\varrho+\sigma} \equiv 0(\mathfrak{p}^\sigma)$ $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$, und das ist wegen der Kongruenzen $a_{\tau+1} \equiv a_\tau(\mathfrak{p}^\tau)$ nur dann möglich, wenn $a_\tau \equiv 0(\mathfrak{p}^\tau)$ $(\tau = 1, 2, \ldots)$, d. h. $a^* = 0$.

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß der Ring $\mathfrak{J}^*$ die Eigenschaften 1, 3 und 4 von § 2 besitzt. Um zunächst die Gültigkeit des Teilerkettensatzes für $\mathfrak{J}^*$ nachzuweisen, verstehen wir unter $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ eine endliche Basis von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$, und zeigen, daß man mit den Elementen von $\mathfrak{J}^*$ im gewissen Sinne so rechnen kann wie mit formalen Potenzreihen in n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus dem Restklassenkörper $\bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{J}|\mathfrak{p}$.

Wir bezeichnen mit $\bar{\varphi}_m(x)$ eine Form m-ten Grades in den Variablen x_i mit Koeffizienten aus $\bar{\mathfrak{K}}$, mit $\varphi_m(p)$ eines der mod $\mathfrak{p}^{m+1}$ eindeutig bestimmten Elemente aus $\mathfrak{J}$, das aus $\bar{\varphi}_m(x)$ dadurch entsteht, daß man die Variablen x_i durch die Elemente p_i, die Koeffizientenrestklassen durch beliebige Repräsentanten ersetzt. Ferner soll $\bar{\varphi}_m(x)$ eine „Anfangsform" von $a^* = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ genannt werden, wenn die Kongruenzen $a_i \equiv 0(\mathfrak{p}^i)$ $(i \leqq m)$, $\varphi_m(p) \equiv a_i(\mathfrak{p}^{m+1})$ $(i > m)$ gelten. Man überzeugt sich dann mühelos von der Richtigkeit der folgenden Tatsachen:

Jedes Element $a^* \neq 0$ besitzt Anfangsformen, und zwar besitzt $a^* = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mindestens eine Anfangsform m-ten, aber keine Anfangsform größeren als m-ten Grades, wenn $a_i \equiv 0(\mathfrak{p}^i)$ $(i \leqq m)$, $a_{m+1} \not\equiv 0(\mathfrak{p}^{m+1})$. Ist $\bar{\varphi}_m(x)$ gemeinsame Anfangsform von $a^* = \{a_1, a_2, \ldots\}$ und $b^* = \{b_1, b_2, \ldots\}$, so gelten die Kongruenzen $a_i \equiv b_i(\mathfrak{p}^{m+1})$ $(i > m)$. — Stellt $\bar{\varphi}_l(x)$ eine Anfangsform von a^*, $\bar{\psi}_m(x)$ eine Anfangsform von b^* dar, so ist $\bar{\varphi}_l(x) \cdot \bar{\psi}_m(x)$ Anfangsform von $a^* \cdot b^*$; für $l = m$ ist außerdem $\bar{\varphi}_l(x) + \bar{\psi}_m(x)$ Anfangsform von $a^* + b^*$.

Bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{K}}[x]$ den Bereich der Formen in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus $\overline{\mathfrak{K}}$, so stellt die Gesamtheit der Anfangsformen der Elemente eines Ideals $\mathfrak{a}^*$ aus $\mathfrak{J}^*$ ein Formenideal $\bar{\mathfrak{a}}_x^*$ aus $\overline{\mathfrak{K}}[x]$ dar[15]), und es gilt:

Hilfssatz 6. *Liefern die Anfangsformen $\bar{\varphi}_{m_1}^{(1)}(x), \bar{\varphi}_{m_2}^{(2)}(x), \ldots, \bar{\varphi}_{m_s}^{(s)}(x)$ der Elemente $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_s^*$ aus $\mathfrak{a}^*$ eine Basis von $\bar{\mathfrak{a}}_x^*$, so ist $\mathfrak{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_s^*)$.*

Es sei $a_\lambda^* = \{a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, a_{\lambda 3}, \ldots\}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, s)$; $a^* = \{a_1, a_2, \ldots\}$ bedeute ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}^*$, $\bar{\varphi}_m(x)$ sei eine Anfangsform von a^*. Dann gilt eine Gleichung

$$\bar{\varphi}_m(x) = \sum_{\lambda=1}^{s} \bar{\varphi}_{m_\lambda}^{(\lambda)}(x) \cdot \bar{\psi}_{m-m_\lambda}^{(\lambda)}(x) \quad (\bar{\psi}_{m-m_\lambda}(x) = 0, \text{ wenn } m - m_\lambda < 0),$$

und daraus ergeben sich angesichts der charakteristischen Eigenschaften der Anfangsformen sofort die Kongruenzen:

$$a_i - \sum_{\lambda=1}^{s} a_{\lambda i} \cdot \psi_{m-m_\lambda}^{(\lambda)}(p) \equiv 0\,(\mathfrak{p}^i) \qquad (i \leqq m),$$

$$a_i - \sum_{\lambda=1}^{s} a_{\lambda i} \cdot \psi_{m-m_\lambda}^{(\lambda)}(p) \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{m+1}) \qquad (i > m).$$

Beachtet man ferner die Kongruenzen $\psi_{m-m_\lambda}^{(\lambda)}(p) \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{m-m_\lambda})$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, s)$, sowie die Tatsache, daß $a^* - \sum_{\lambda=1}^{s} a_\lambda^* \cdot \psi_{m-m_\lambda}^{(\lambda)}(p)$ nach den oben über die Anfangsformen gemachten Bemerkungen mindestens eine Anfangsform $m+1$-ten oder höheren Grades besitzt, so schließt man aus dem gewonnenen Ergebnis leicht weiter: Es lassen sich Elemente $b_{\lambda i}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, s;\ i = 1, 2, \ldots)$ aus $\mathfrak{J}$ so bestimmen, daß in $\mathfrak{J}$ die Kongruenzen $b_{\lambda\, i+1} \equiv b_{\lambda i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; $a_i - \sum_{\lambda=1}^{s} a_{\lambda i} b_{\lambda i} \equiv 0\,(\mathfrak{p}^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ gelten. Das heißt aber nichts anderes, als daß die Elemente $b_\lambda^* = \{b_{\lambda 1}, b_{\lambda 2}, \ldots\}$ aus $\mathfrak{J}^*$ in $\mathfrak{J}^*$ der Gleichung $a^* = \sum_{\lambda=1}^{s} a_\lambda^* b_\lambda^*$ genügen, und da a^* ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}^*$ bedeutete, ist damit Hilfssatz 6 bewiesen.

Aus Hilfssatz 6 ergibt sich angesichts der Tatsache, daß in $\overline{\mathfrak{K}}[x]$ jedes Ideal eine endliche Basis besitzt, sofort *die Gültigkeit des Teilerkettensatzes für $\mathfrak{J}^*$*. Wir zeigen weiter:

---

[15]) Man beachte, daß auch im Formenbereich der Idealbegriff brauchbar ist, obwohl dort die Addition nur für Formen gleicher Dimension definiert ist. Vgl. N. I § 10, S. 53.

Hilfssatz 7. a) *Ein Element* $a^* = \{a_1, a_2, \ldots\}$ *aus* $\mathfrak{J}^*$ *ist dann und nur dann Einheit in* $\mathfrak{J}^*$, *wenn ein und damit jedes* a_i *durch* $\mathfrak{p}$ *unteilbar, also in* $\mathfrak{J}$ *Einheit ist. Die Gesamtheit derjenigen Elemente* $a^* = \{a_1, a_2, \ldots\}$ *aus* $\mathfrak{J}^*$, *die keine Einheiten, und bei denen somit alle* a_i *durch* $\mathfrak{p}$ *teilbar sind, bilden in* $\mathfrak{J}^*$ *ein ausgezeichnetes Primideal* $\mathfrak{p}^*$.

b) $\mathfrak{p}^*$ *ist Erweiterungsideal von* $\mathfrak{p}$, *d. h. es gilt die Gleichung* $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}^*$. *Jedes reguläre Ideal* $\mathfrak{q}$ *aus* $\mathfrak{J}^*$ *stellt ein zu* $\mathfrak{p}^*$ *gehöriges Primärideal dar.*

a) Sind die das Element $a^* = \{a_1, a_2, \ldots\}$ definierenden Elemente a_i in $\mathfrak{J}$ Einheiten, so ist ein von 0 verschiedenes Element aus $\overline{\mathfrak{K}}$ Anfangsform von a^*, und aus Hilfssatz 6 folgt daher $(a^*) = \mathfrak{J}$, a^* ist Einheit. Der zweite Teil der Behauptung a) ergibt sich aus dem Umstand, daß das System $\mathfrak{p}^*$ der Nichteinheiten in $\mathfrak{J}^*$ ersichtlich Idealeigenschaft besitzt.

b) $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}^*$ ist Untermenge von $\mathfrak{p}^*$ und es ist offenbar das Ideal $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sowohl zugeordnetes Formenideal von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}^*$ wie von $\mathfrak{p}^*$. Nach Hilfssatz 6 ist daher $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}^* = \mathfrak{p}^*$. Bedeutet nun $p \neq 0$ irgendeine Nichteinheit aus $\mathfrak{J}$, so gilt in $\mathfrak{J}$ eine Kongruenz $\mathfrak{p}^m \equiv 0\,((p))$, und daraus folgt in $\mathfrak{J}^*$ die Teilbarkeit von $\mathfrak{p}^{*m} = \mathfrak{p}^m \cdot \mathfrak{J}^*$ durch $(p) \cdot \mathfrak{J}^*$; es gibt daher in $\mathfrak{J}^*$ Hauptideale — z. B. $(p) \cdot \mathfrak{J}^*$ —, die zu $\mathfrak{p}^*$ gehörige Primärideale darstellen. Nach einem von mir an anderer Stelle bewiesenen Satze[16]) kann aber unter diesen Umständen in $\mathfrak{J}^*$ kein echtes reguläres Primidealvielfaches von $\mathfrak{p}^*$ existieren; es muß mithin jedes reguläre Ideal $\mathfrak{r}^*$ aus $\mathfrak{J}^*$ das Ideal $\mathfrak{p}^*$ als einzigen Primidealteiler besitzen, also ein zu $\mathfrak{p}^*$ gehöriges Primärideal sein.

Hilfssatz 8. $\mathfrak{J}^*$ *ist hinsichtlich* $\mathfrak{p}^*$ $\mathfrak{p}$*-adisch abgeschlossen.*

Man beachte die Konstruktion von $\mathfrak{J}^*$, sowie die aus Hilfssatz 7 leicht abzuleitende Tatsache, daß ein volles Restsystem von $\mathfrak{J}$ nach $\mathfrak{p}^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ stets auch ein volles Restsystem von $\mathfrak{J}^*$ nach $\mathfrak{p}^{*m}$ darstellt. Das Ergebnis der Hilfssätze 6, 7 und 8 fassen wir nunmehr zusammen in

Satz 5. *Der durch* $\mathfrak{J}$ *eindeutig bestimmte Ring* $\mathfrak{J}^*$, *der als „zu* $\mathfrak{J}$ *gehöriger* $\mathfrak{p}$*-adisch abgeschlossener Ring" bezeichnet werden soll, besitzt die Eigenschaften* 1, 3 *und* 4 *von* § 2.

Nachdem durch Satz 5 der nötige Einblick in die Struktur von $\mathfrak{J}^*$ gewonnen ist, untersuchen wir jetzt den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{J}^*$ und $\mathfrak{K}$.

Hilfssatz 9. *Es ist* $\mathfrak{J}^* \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$, *d. h.* $\mathfrak{J}$ *ist „hinsichtlich* $\mathfrak{J}^*$ *relativganz".*

Es seien nämlich p und q beliebige Elemente aus $\mathfrak{J}$, $q \neq 0$, und es sei $p = q \cdot r^*$ in $\mathfrak{J}^*$ durch q teilbar. Dann gilt für $i = 1, 2, \ldots$ in $\mathfrak{J}$ eine Kongruenz $p \equiv q \cdot r_i\,(\mathfrak{p}^i)$, es ist also in $\mathfrak{J}$ das Element p modulo jeder

[16]) Vgl. § 3 der in Anm. [10]) zitierten Arbeit.

Potenz von $\mathfrak{p}$ durch q teilbar, und da in $\mathfrak{J}$ eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}$ durch das Hauptideal (q) teilbar ist, folgt daraus die Teilbarkeit von p durch q in $\mathfrak{J}$. Gehört also das Element $\frac{p}{q}$ aus $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{J}^*$, so gehört es bereits zu $\mathfrak{J}$.

Hilfssatz 10. *Der zu $\mathfrak{J}^*$ gehörige ganz abgeschlossene Ring $\mathfrak{O}^*$ besitzt mit $\mathfrak{K}$ gerade den Durchschnitt $\mathfrak{O}$.*

Da $\mathfrak{O}^*$ offenbar Obermenge von $\mathfrak{O}$ ist, brauchen wir zum Beweis nur zu zeigen, daß jedes von $\mathfrak{J}^*$ ganz abhängige Element aus $\mathfrak{K}$ bereits von $\mathfrak{J}$ ganz abhängt. Ist aber $\alpha = \frac{p}{q}$ ein von $\mathfrak{J}^*$ ganz abhängiges Element aus $\mathfrak{K}$, so existiert ein von 0 verschiedenes Element r aus $\mathfrak{J}$ (z. B. eine hinreichend hohe Potenz von q), für das alle Produkte $r \cdot \alpha^i$ $(i = 1, 2, \ldots,)$ zu $\mathfrak{J}^*$, also auch zu $\mathfrak{J}^* \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$ gehören; daraus folgt aber wegen der Gültigkeit des Teilerkettensatzes in $\mathfrak{J}$ bekanntlich die Zugehörigkeit von α zu $\mathfrak{O}$ [17]). — Wir gelangen jetzt leicht zum Beweis unseres Hauptsatzes:

Satz 6. *In dem zum primären endlichen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ gehörigen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich $\mathfrak{O}$ läßt sich jedes Ideal eindeutig als Produkt von Potenzen endlich vieler fester, paarweise teilerfremder Primideale darstellen.*

In der Tat, der Quotientenring $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{O}^*$ ist Erweiterungsring von $\mathfrak{K}$ und es stellt $\mathfrak{O}$ gerade den Durchschnitt von $\mathfrak{O}^*$ und $\mathfrak{K}$ dar. Ferner gilt eine Idealzerlegung der in Satz 6 für die Ideale von $\mathfrak{O}$ geforderten Art nach Satz 4 und Satz 5 für die regulären Ideale von $\mathfrak{O}^*$. Wir können daher aus Satz 2 die Richtigkeit des Hauptsatzes erschließen.

Das gewonnene Ergebnis kann noch ergänzt werden durch

Satz 7. *Der zu dem primären endlichen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ gehörige ganz abgeschlossene Integritätsbereich $\mathfrak{O}$ besitzt dann und nur dann über $\mathfrak{J}$ eine endliche Modulbasis, wenn in dem zu $\mathfrak{J}$ gehörigen $\mathfrak{p}$-adisch abgeschlossenen Ring $\mathfrak{J}^*$ kein echtes nilpotentes Element auftritt.*

a) Enthält $\mathfrak{G}^*$ kein echtes nilpotentes Element, so hat nach Satz 3 der Ring $\mathfrak{O}^*$ über $\mathfrak{J}^*$ eine endliche Modulbasis, es gibt daher ein reguläres Element p^* aus $\mathfrak{J}^*$ dessen Produkte mit den Elementen von $\mathfrak{O}^*$ sämtlich zu $\mathfrak{J}^*$ gehören. Verstehen wir nun unter p ein von 0 verschiedenes, durch p^* teilbares Element aus $\mathfrak{J}$ — ein solches Element existiert, da (p^*) eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}^*$ teilt —, so kommen die Produkte von p mit den Elementen von $\mathfrak{O}$ sämtlich in $\mathfrak{J}^* \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$ vor; daraus folgt aber wegen der Gültigkeit des Teilerkettensatzes in $\mathfrak{J}$ die Existenz einer endlichen Modulbasis von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{J}$.

---

[17]) Vgl. N. II § 1 Absatz 4.

b) Es sei $r^* = \{r_1, r_2, \ldots\}$ ein echtes nilpotentes Element aus $\mathfrak{J}^*$, $r^{*\varrho} = 0$. Dann gibt es ein μ derart, daß $r_\mu, r_{\mu+1}, r_{\mu+2}, \ldots$ sämtlich durch $\mathfrak{p}^\mu$ unteilbar sind, während für alle i die Kongruenz $r_i^\varrho \equiv 0\,(\mathfrak{p}^i)$ gilt. Bedeutet nun p ein durch $\mathfrak{p}^\mu$ teilbares Element aus $\mathfrak{J}$, das seinerseits alle Elemente von $\mathfrak{p}^\nu$ $(\nu \geqq \mu)$ teilt, so genügen die Elemente $\alpha_i = \frac{r_{\nu \cdot \varrho \cdot i}}{p^i}$ Gleichungen der Form $\alpha_i^\varrho - a_i = 0$ mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{J}$, sie sind also von $\mathfrak{J}$ ganz abhängig, und es stellt andererseits i jeweils den kleinsten Exponenten k dar, für den $p^k \cdot \alpha_i$ zu $\mathfrak{J}$ gehört. Diese Tatsachen schließen aber, wie bereits am Schlusse von § 2 hervorgehoben wurde, die Existenz einer endlichen Modulbasis von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{J}$ aus.

(Eingegangen am 21. 11. 1929.)

Untersuchungen über allgemeine Metrik.

Vierte Untersuchung. Zur Metrik der Kurven.

Von

Karl Menger in Wien.

Inhaltsübersicht.

I. Zur Theorie der Bogenlänge.

1. Der Bogen als kürzeste Verbindung aller seiner Punkte.

Bei einer der klassischen Definitionen der Bogenlänge geht man folgendermaßen vor: Man setzt, wenn ein Bogen B zwischen den Punkten a und c gegeben ist, auf B einen Richtungssinn fest, etwa von a nach c. Man ordnet sodann, wenn E eine endliche, etwa n Punkte enthaltende Teilmenge von B ist, die Punkte von E in jene Reihenfolge, in welcher sie bei der Durchlaufung von B in der festgesetzten Richtung angetroffen werden, und numeriert sie in dieser Reihenfolge mit $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Man bildet hierauf, wenn $b_i b_{i+1}$ den Abstand der Punkte b_i und b_{i+1} bezeichnet, die Zahl $l(E, B) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1}$ und erklärt als Länge des Bogens B die Zahl $\underset{E \subset B}{\text{o.S.}}\, l(E, B)$, d. h. die obere Schranke aller Zahlen $l(E, B)$, wo E alle endlichen Teilmengen von B durchläuft.

Wir legen allgemein einen *metrischen Raum* zugrunde, d. h. eine Menge von Elementen, *Punkte* genannt, in der für je zwei Elemente p und q ein *Abstand*, d. i. eine Zahl $pq = qp > 0$ für $p \neq q$ und $pq = qp = 0$ für $p = q$ erklärt ist, welche der *Dreiecksungleichung*, d. i. der Beziehung $pq + qr \geqq pr$ für je drei Punkte p, q, r genügt. Wir ordnen, wenn E eine endliche Teilmenge des Raumes ist, der Menge E eine Zahl $\lambda(E)$ zu, welche, anschaulich gesprochen, *die Länge des kürzesten Weges durch die Punkte der Menge E* darstellt; genauer: Sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Punkte der Menge E und ist π die Permutation, welche die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in die Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ überführt, so ordnen wir E und π die Zahl $\lambda_\pi(E) = \sum_{j=1}^{n-1} p_{i_j} p_{i_{j+1}}$ zu und nennen $\lambda(E)$ die kleinste unter den endlichvielen Zahlen $\lambda_\pi(E)$, die zu den verschiedenen Permutationen π der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gehören. Bilden wir nun, wenn ein Bogen B gegeben ist, zu jeder seiner endlichen Teilmengen E die (nur von E, nicht von B abhängige) Zahl $\lambda(E)$, d. i. die Länge der kürzesten Verbindung der Punkte von E, so kann man nach der oberen Schranke aller dieser Zahlen fragen, also gleichsam nach der Länge der kürzesten Verbindung aller Punkte des Bogens B. Es wird sich nun im folgenden u. a. ergeben, daß diese Zahl mit der Länge von B im klassischen Sinn identisch ist, *daß also jeder Bogen gleichsam die kürzeste Verbindung aller seiner Punkte ist.* Diese Aussage wird auch in der Richtung eine Präzisierung finden, daß wir zum Vergleich mit dem Bogen alle ihn als Teilmengen enthaltenden *stetigen Streckenbilder* heranziehen werden. Im Anschluß an diese Tatsachen werden wir einige Verallgemeinerungen des Längenbegriffes behandeln.

2. Gleichverteilte ε-Ketten.

Wir beginnen mit einem Hilfsbegriff. Ist K eine endliche Teilmenge des Bogens B zwischen den Punkten a und c, deren Punkte in jener Ordnung, in welcher sie bei der Durchlaufung des Bogens B von a nach b angetroffen werden, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ heißen mögen, — dann nennen wir K *eine in B gleichverteilte ε-Kette*, wenn

1. $a b_1 < \varepsilon, \quad c b_n < \varepsilon.$
2. $b_i b_j = \varepsilon$ für $|i-j| = 1.$
3. $b_i b_j \geqq \varepsilon$ für $|i-j| > 1.$

Wir behaupten:

In jedem Bogen B existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine in B gleichverteilte ε-Kette.

Wir setzen $b_1 = a$. Ist $b_1 c < \varepsilon$, so ist die aus dem Punkt b_1 allein bestehende Menge G_1 eine in B gleichverteilte ε-Kette. Wenn dies nicht der Fall ist, d. h. wenn $b_1 c \geqq \varepsilon$ ist, so bezeichnen wir mit b_2 den letzten Punkt, welchen wir auf B von b_1 nach c laufend im Abstand ε von b_1 antreffen. Wir machen nun die Annahme A_k: Es liege bereits eine aus k Punkten $b_1, b_2, \ldots, b_k$ bestehende geordnete Menge G_k vor, so daß b_{j+1} für jede der Zahlen $j = 1, 2, \ldots, k-1$ der letzte Punkt ist, den man auf B von b_j nach c laufend im Abstand ε von b_j antrifft, und so daß keiner der Punkte $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ von c einen Abstand $< \varepsilon$ hat. Ist $b_k c < \varepsilon$, dann ist G_k eine in B gleichverteilte ε-Kette. Wenn dies nicht der Fall ist, d. h. wenn $b_k c \geqq \varepsilon$ ist, dann bezeichnen wir mit b_{k+1} den letzten Punkt, den man auf B von b_k nach c laufend im Abstand ε von b_k antrifft, und mit G_{k+1} die geordnete Menge $b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}$. Wir haben also zu der der Annahme A_k genügenden Menge G_k, falls $b_k c \geqq \varepsilon$ gilt, eine der Annahme A_{k+1} genügende Menge $G_{k+1} \supset G_k$ konstruiert.

Wir behaupten: Für je zwei Punkte b_i und b_j von G_{k+1} gilt

1. $b_i b_j = \varepsilon$, wenn $|i-j| = 1$,
2. $b_i b_j \geqq \varepsilon$, wenn $|i-j| > 1$.

Ist nämlich erstens $j = i+1$, so hat b_j [für $i \leqq k-1$ nach Annahme A_k und für $i = k$ wegen der Wahl von b_{k+1}] von b_i den Abstand ε. Sei zweitens $j = i + k$ $(k > 1)$. Der Punkt b_{i+1} ist nach Annahme der letzte, welchen man auf B von b_i nach c laufend im Abstande ε von b_i antrifft. Der Punkt b_{i+k}, welcher auf B zwischen b_{i+1} und c liegt, hat also von b_i einen Abstand $> \varepsilon$.

Wir haben also festgestellt, daß wir für jedes natürliche k, für welches $b_k c \geqq \varepsilon$ ist, zu der die Annahme A_k erfüllenden Menge G_k eine die An-

nahme A_{k+1} erfüllende Menge $G_{k+1} > G_k$ angeben können, welche aus $k+1$ Punkten besteht, die, wie aus dem eben Bewiesenen folgt, paarweise Abstände $\geqq \varepsilon$ haben. Würde für jede natürliche Zahl k die Beziehung $b_k c \geqq \varepsilon$ gelten, so erhielten wir also eine unendliche Folge von Punkten $\{b_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$ ad inf.) mit paarweisen Abständen $\geqq \varepsilon$. Dies ist wegen der Kompaktheit von B unmöglich. Also gibt es eine kleinste natürliche Zahl n, so daß $b_n c < \varepsilon$ gilt. Die Menge G_n bestehend aus den Punkten $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bildet dann offenbar eine in B gleichverteilte ε-Kette.

Damit ist die behauptete Existenz gleichverteilter ε-Ketten bewiesen.

3. δ-Dichte.

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes R heiße in R δ-dicht, wenn jeder Punkt des Raumes von M einen Abstand $< \delta$ hat. Wir bezeichnen ferner eine endliche Menge von Punkten $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des Bogens B zwischen den Punkten a und c in üblicher Weise als eine ε-Kette in B, wenn $a b_1 < \varepsilon$, $b_i b_{i+1} \leqq \varepsilon$, $b_n c < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) gilt. (Insbesondere ist also jede in B gleichverteilte ε-Kette eine ε-Kette.) Es gilt dann bekanntlich:

I. *Ist B ein vorgelegter Bogen und $\delta > 0$ eine gegebene Zahl, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß jede ε-Kette in B δ-dicht ist.*

Zwischen B und der Strecke existiert eine topologische, d. h. beiderseits eindeutige und stetige, demnach wegen der Kompaktheit beiderseits gleichmäßig stetige Abbildung. Zum gegebenen $\delta > 0$ existiert daher ein $\eta > 0$, so daß je zwei Punkte der Strecke, deren Abstand $< \eta$ ist, zwei Punkten von B, deren Abstand $< \delta$ ist, entsprechen. Zu diesem η existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß je zwei Punkte von B, deren Abstand $< \varepsilon$ ist, zwei Punkten der Strecke, deren Abstand $< \eta$ ist, entsprechen. Ist dann irgendeine ε-Kette im Bogen gegeben, so sind ihre Bildpunkte eine η-Kette in der Strecke, daher η-dicht in der Strecke. Demnach ist die ε-Kette δ-dicht im Bogen.

Bekanntlich gilt ferner, wie hier der Vollständigkeit halber bewiesen werden möge, der Satz

II. *Ist B ein Bogen der Länge $l(B)$ und $\eta > 0$ eine vorgelegte Zahl, so existiert ein $\delta > 0$ derart, daß für jede in B δ-dichte Menge E die Beziehung gilt $l(E, B) > l(B) - \eta$. Hat B keine endliche Länge, so existiert für jede reelle Zahl r ein $\delta > 0$, so daß für jede in B δ-dichte Teilmenge E von B die Beziehung gilt $l(E, B) > r$.*

Ist B ein Bogen der (endlichen) Länge $l(B)$ und $\eta > 0$ eine vorgegebene Zahl, so enthält B auf Grund der Definition der Bogenlänge

eine endliche Teilmenge M, so daß $l(M, B) > l(B) - \frac{\eta}{2}$ gilt. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Punkte von M in jener Reihenfolge, in der sie bei der Durchlaufung von B angetroffen werden. Ist nun $\delta > 0$ irgendeine Zahl $< \frac{\eta}{4n}$, so gilt, wie wir beweisen werden, für jede in B δ-dichte Menge E die Beziehung $l(E, B) > l(B) - \eta$.

Sei nämlich E eine in B δ-dichte Menge, deren Punkte in der Reihenfolge, in der sie bei der Durchlaufung von B angetroffen werden, $q_1, q_2, \ldots, q_m$ heißen mögen. Wegen der δ-Dichtheit von E in B gibt es zu jedem der n Punkte p_j von M einen Punkt q_{i_j} von E, der von p_j einen Abstand $< \delta$ hat. Bezeichnen wir mit E_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ die Menge der Punkte $q_{i_j}, q_{i_j+1}, \ldots, q_{i_{j+1}}$, so gilt $l(E, B) \geqq \sum_{j=1}^{n-1} l(E_j, B)$. Nun ist für jedes j $l(E_j, B) \geqq q_{i_j} q_{i_{j+1}}$. Ferner ergibt sich aus $p_j q_{i_j} < \delta$, $p_{j+1} q_{i_{j+1}} < \delta$ auf Grund der Dreiecksgleichung für jedes j die Beziehung $q_{i_j} q_{i_{j+1}} \geqq p_j p_{j+1} - 2\delta$. Also ist $l(E, B) \geqq \sum_{j=1}^{n} p_j p_{j+1} - 2n\delta = l(M, B) - \frac{\eta}{2} > l(B) - \eta$.

Analog verläuft der Beweis, wenn $l(B) = \infty$ gilt.

4. Der Beweis des Hauptsatzes.

Es sei B ein vorgelegter Bogen der Länge $l(B)$ und es bezeichne $\lambda(E)$ für jede endliche Menge E die kleinste der Zahlen $\sum_{j=1}^{n-1} p_{i_j} p_{i_{j+1}}$ für alle Permutationen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Wir beweisen die in Abschnitt 1 formulierte Behauptung:

$$l(B) = \underset{E \subset B}{\text{o. S.}}\, \lambda(E).$$

Es gilt erstens $\underset{E \subset B}{\text{o. S.}}\, \lambda(E) \leqq l(B)$. Denn es ist $l(B) = \underset{E \subset B}{\text{o. S.}}\, l(E, B)$ und für jede Menge E ist $\lambda(E) \leqq l(E, B)$.

Es gilt zweitens $\underset{E \subset B}{\text{o. S.}}\, \lambda(E) \geqq l(B)$. Ist nämlich $\eta > 0$ eine vorgelegte Zahl, so existiert, wie wir zeigen werden, eine endliche Teilmenge E von B, für welche $\lambda(E) > l(B) - \eta$ gilt. Es existiert vor allem nach Satz II des vorigen Abschnittes zum vorgelegten $\eta > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß für jede in B δ-dichte Menge E die Beziehung gilt $l(E, B) > l(B) - \eta$. Es existiert nach Satz I des vorigen Abschnittes zu diesem δ ein $\varepsilon > 0$ derart, daß jede ε-Kette in B δ-dicht ist. Dem Ergebnis von Abschnitt 2 zufolge existiert für dieses ε eine in B gleichverteilte ε-Kette K. Die Punkte dieser Kette K mögen in jener Reihenfolge, in welcher sie bei der Durchlaufung des Bogens angetroffen werden, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ heißen. Weil

diese Punkte mit Rücksicht auf die Wahl von ε in B δ-dicht liegen, gilt mit Rücksicht auf die Wahl von δ *erstens* die Beziehung $l(K, B) > l(B) - \eta$. *Zweitens* gilt, weil K eine gleichverteilte ε-Kette ist, mit Rücksicht auf eine gleich zu beweisende Bemerkung, $l(K, B) = \lambda(K)$. Zusammengenommen ergibt dies die Behauptung $\lambda(K) > l(B) - \eta$.

Bemerkung. *Ist K eine im Bogen B gleichverteilte Kette* (d. h. eine in B für irgendein $\varepsilon > 0$ gleichverteilte ε-Kette), *dann gilt* $l(K, B) = \lambda(K)$.

Sind nämlich $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Punkte der in B gleichverteilten ε-Kette in jener Reihenfolge, in welcher sie bei der Durchlaufung von B angetroffen werden, so gilt, auf Grund der Definition der gleichverteilten ε-Kette,

$$p_i p_j = \varepsilon, \quad \text{wenn } |i - j| = 1, \quad \text{und} \quad p_i p_j \geqq \varepsilon, \quad \text{wenn } |i - j| > 1.$$

Es ist also $l(K, B) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1} = (n-1) \cdot \varepsilon$. Bezeichnet $i_1, i_2, \ldots, i_n$ irgendeine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so ist $\sum_{j=1}^{n-1} p_{i_j} p_{i_{j+1}} \geqq (n-1) \cdot \varepsilon$. Also gilt für jede Permutation $\sum_{j=1}^{n-1} p_{i_j} p_{i_{j+1}} \geqq \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1}$. Daher ist $\lambda(K) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_{i+1} = l(K, B)$, womit die Bemerkung bewiesen ist.

5. Die Durchlaufungslänge stetiger Streckenbilder.

Die Menge S sei stetiges Streckenbild. Es ist also jeder reellen Zahl r eines abgeschlossenen Intervalles J eindeutig ein Punkt $p(r)$ von S zugeordnet, und zwar so, daß erstens jeder Punkt von S mindestens einer Zahl aus J entspricht und daß zweitens für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, daß für je zwei Zahlen r und r' aus J, für welche $|r - r'| < \delta$ gilt, die Punkte $p(r)$ und $p(r')$ einen Abstand $< \varepsilon$ haben.

Ist E irgendeine endliche Teilmenge von J, etwa bestehend aus n Zahlen, welche der Größe nach geordnet $r_1, r_2, \ldots, r_n$ heißen mögen, so setzen wir:

$$l(E, S) = \sum_{i=1}^{n-1} p(r_i)\, p(r_{i+1}),$$

wo $p(r_i)\, p(r_{i+1})$ den Abstand der Punkte $p(r_i)$ und $p(r_{i+1})$ bezeichnet. Und wir bezeichnen als die zur vorgelegten Abbildung von J auf S gehörige *Durchlaufungslänge* von S die Zahl

$$l(S) = \underset{E \subset J}{\text{o. S.}}\, l(E, S),$$

wo E alle endlichen Teilmengen von J durchläuft.

Die so definierte Durchlaufungslänge hängt offenbar nicht bloß von der Menge S, sondern auch von der Abbildung des Intervalles J auf S ab.

Ist z. B. S eine Kreislinie vom Radius ϱ in einem euklidischen Raum, welche derart als stetiges Bild von J dargestellt wird, daß ein Punkt von S dem Anfangs- und Endpunkt von J entspricht und überdies n Punkten von J zugeordnet ist, während jeder andere Punkt von S genau $n+1$ Punkten von J entspricht, wo n irgendeine positive ganze Zahl ist, dann ist die Durchlaufungslänge von S, welche dieser Abbildung entspricht, $= 2(n+1)\varrho\pi$, also von n abhängig.

In Analogie zu Satz II von S. 469 gilt

II'. *Ist S stetiges Bild des Intervalles J mit der Durchlaufungslänge $l(S)$ und ist $\eta > 0$ eine vorgelegte Zahl, so existiert ein $\delta > 0$ derart, daß für jede in J δ-dichte endliche Menge E die Beziehung gilt $l(E, S) > l(S) - \eta$.*

Zum Beweise betrachten wir eine (nach Definition von $l(S)$ sicher existierende) endliche Teilmenge M von J, für welche $l(M, S) > l(S) - \frac{\eta}{2}$ gilt. Die Menge M möge aus n Zahlen bestehen, welche der Größe nach geordnet $r_1, r_2, \ldots, r_n$ heißen mögen. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Abbildung von J auf S existiert eine Zahl η' derart, daß für je zwei Zahlen r und r', für die $|r - r'| < \eta'$ gilt, die Punkte $p(r)$ und $p(r')$ einen Abstand $\frac{\eta}{4n}$ haben. Ist dann δ irgendeine Zahl $< \eta'$, so gilt für jede in J δ-dichte endliche Teilmenge E die Beziehung $l(E, S) > l(S) - \eta$ aus denselben Gründen, welche beim Beweise von Satz II auf S. 469 angeführt wurden.

Es läßt sich auch in S hinsichtlich der vorgegebenen Abbildung von J auf S eine in S gleichverteilte ε-Kette definieren und angeben. Wir bezeichnen mit p_1 den dem Anfangspunkt a_1 von J entsprechenden Punkt von S. Wir bezeichnen, wenn die Punkte p_i von S und a_i von J bereits definiert sind, mit a_{i+1} die größte Zahl von J, welcher ein Punkt im Abstand ε von p_i zugeordnet wird, und nennen p_{i+1} den dem Punkt a_{i+1} zugeordneten Punkt von S. Da man wegen der Kompaktheit von S nach endlichvielen Schritten zu einem Punkt p_n kommen muß, der von jenem Punkt von S, welcher dem Endpunkt von J zugeordnet ist, einen Abstand $< \varepsilon$ hat, so erhält man auf diese Weise eine endliche Teilmenge M von J und eine endliche Menge E der den Punkten von M zugeordneten Punkte von S. Die Menge E nennen wir eine in S *gleichverteilte ε-Kette*, die Menge M eine *ausgezeichnete Urbildmenge* von E.

Man kann nun in Analogie zur Bemerkung von S. 471 beweisen, daß für jede so definierte in S gleichverteilte Kette E und ihre ausgezeichnete Urbildmenge M die Beziehung gilt $\lambda(E) = l(M, S)$. Hingegen gilt nicht die dem Satz I von S. 469 entsprechende Behauptung, daß zu jedem vorgegebenen δ jede in S gleichverteilte ε-Kette, wofern nur ε hinreichend

klein ist, in S δ-dicht sei, oder daß die zugehörigen ausgezeichneten Urbildmengen in J δ-dicht seien.

Aus diesem Grunde kann die Durchlaufungslänge von S größer sein, als die obere Schranke der Zahlen $\lambda(E)$, wo E die endlichen Teilmengen von E durchläuft, so daß der Hauptsatz von Abschnitt 4 auf stetige Streckenbilder nicht verallgemeinert werden kann. Indes ergibt die Betrachtung der $\lambda(E)$ doch auch für die Länge der stetigen Streckenbilder, oder, was bekanntlich dasselbe ist, der im kleinen zusammenhängenden Kontinua, eine einfache, aber bisweilen (vgl. S. 495) verwendbare Aussage, nämlich den folgenden (meines Wissens bisher nirgends erwähnten)

Satz. *Ist S ein im kleinen zusammenhängendes Kontinuum, B ein Teilbogen von S, so ist die Länge von B nicht größer als eine Durchlaufungslänge von S, die zu irgendeiner stetigen Abbildung einer Strecke auf S gehört.*

Sei nämlich S irgendwie als stetiges Bild des Intervalles J dargestellt. Es bezeichne s die Durchlaufungslänge von S, welche zu dieser Abbildung gehört, und l die Länge des Teilbogens B von S. Da l gleich der oberen Schranke der Zahlen $\lambda(E)$ ist, wo E die endlichen Teilmengen von B durchläuft, so würde im Falle der Gültigkeit der Beziehung $l > s$ eine endliche Teilmenge E von B existieren, für welche $\lambda(E) > s$ wäre. Nun ist die Durchlaufungslänge von S die obere Schranke der Zahlen $l(M, S)$, wo M die endlichen Teilmengen von J durchläuft. Wir bezeichnen mit M eine Teilmenge von J, welche zu jedem Punkt von E genau einen Punkt enthält, dem bei der Abbildung von J auf S der betreffende Punkt von E zugeordnet wird. Dann gilt $l(M, S) \geq \lambda(E) > s$. Andererseits gilt der Definition von s gemäß $l(M, S) \leq s$. Aus der Annahme $l > s$ folgt also ein Widerspruch, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

Diese Aussage läßt sich auch dahin aussprechen, daß, wie immer man zu einem Bogen B ein ihn als Teilmenge enthaltendes stetiges Streckenbild S konstruiert und wie immer man S durchläuft, niemals die Durchlaufungslänge von S kleiner als die Länge von B sein kann. Die Aussage: *Ein Bogen ist die kürzeste Verbindung aller seiner Punkte,* gestattet also eine Präzisierung durch den Zusatz: *verglichen mit allen die Punkte des Bogens enthaltenden stetigen Streckenbildern.*

6. Eine Verallgemeinerung des Längenbegriffes.

Während eine Ausdehnung des Hauptsatzes auf stetige Streckenbilder, wie wir im vorigen Abschnitte sahen, unmöglich ist, gibt die im Abschnitt 4 bewiesene Bemerkung zu einer andersartigen Verallgemeinerung des Hauptsatzes und damit zu einer Verallgemeinerung des Längenbegriffes Anlaß.

Es sei in der Menge M eine symmetrische, nichtreflexive Relation ϱ der Elemente definiert, d. h. es möge für je zwei Elemente a und b von M feststehen, ob die Beziehung $a \varrho b$ und die mit ihr äquivalente Beziehung $b \varrho a$ gilt oder nicht, wobei für kein Element a die Beziehung $a \varrho a$ gelten soll. Zwei Elemente a und b, für welche $a \varrho b$ gilt, wollen wir auch hinsichtlich der Relation ϱ *benachbart* nennen.

Die Menge M heiße in bezug auf die Relation ϱ *zusammenhängend*, wenn die Menge zu je zweien ihrer Elemente a und b eine dieselben hinsichtlich der Relation verbindende Kette, d. h. endlichviele Elemente $m_1, m_2, \ldots, m_n$ enthält derart, daß $a = m_1$, $b = m_n$ und $m_i \varrho m_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ gilt.

Es sei beispielsweise ein eindimensionaler Komplex gegeben (d. h. eine Menge, welche Summe von endlichvielen Bogen ist, die zu je zweien höchstens Endpunkte gemein haben). Bezeichnen wir erstens mit M die (endliche) Menge der Punkte, zwischen denen der Komplex aufgespannt ist (d. h. die Menge aller Punkte, die Endpunkt von mindestens einem Bogen des Komplexes sind) und erklären wir zweitens die Relation ϱ durch die Festsetzung, daß für zwei Punkte a und b von M die Beziehung $a \varrho b$ dann und nur dann gelten soll, wenn a und b durch einen Bogen des Komplexes verbunden sind, dann ist M in bezug auf diese Relation zusammenhängend dann und nur dann, wenn der eindimensionale Komplex im üblichen Sinne zusammenhängend ist.

Ist je zwei Punkten a und b von M ein Abstand $ab = ba > 0$ für $a \neq b$ und $= 0$ für $a = b$ zugeordnet, dann entspricht jeder in M erklärten symmetrischen nichtreflexiven Relation ϱ eine Zahl, nämlich die Summe der Abstände aller Paare von hinsichtlich der Relation ϱ benachbarten Punkten von M. Wir wollen diese Zahl als *den Längeninhalt von M hinsichtlich der Relation ϱ* bezeichnen. Einige Beispiele mögen diese Begriffsbildung erläutern.

1. Es sei M eine endliche Teilmenge des Bogens B, deren Punkte in jener Reihenfolge, in welcher sie bei der Durchlaufung von B angetroffen werden, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ heißen mögen. Erklären wir die Relation ϱ durch die Festsetzung, daß $p_i \varrho p_j$ dann und nur dann gilt, wenn $|i - j| = 1$ ist, dann ist der zu dieser Relation gehörige Längeninhalt von M offenbar $= l(M, B)$. Die Menge M ist hinsichtlich dieser Relation zusammenhängend.

2. Ist M eine aus den Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bestehende Menge und bezeichnet $i_1, i_2, \ldots, i_n$ jene Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, für welche der Ausdruck $\sum_{j=1}^{n-1} p_{i_j} p_{i_{j+1}}$ den kleinsten Wert annimmt, dann ist, wenn wir $p_{i_j} \varrho p_{i_k}$ dann und nur dann festsetzen, falls $|j - k| = 1$ gilt, der zu dieser

Relation gehörige Längeninhalt von M offenbar $= \lambda(M)$. Die Menge M ist hinsichtlich dieser Relation zusammenhängend.

3. Bezeichnet B das Einheitsintervall $[0, 1]$ und M die Teilmenge von B bestehend aus den Punkten $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ und setzen wir über die Relation ϱ fest, daß nur die Punkte 0 und $\frac{1}{4}$, sowie $\frac{3}{4}$ und 1 hinsichtlich ϱ benachbart sein sollen, dann ist die Menge M hinsichtlich dieser Relation nicht zusammenhängend und der zugehörige Längeninhalt $= \frac{1}{2}$.

4. Wird die Relation ϱ für die Menge M so erklärt, daß für keine zwei Punkte a und b von M die Beziehung $a \varrho b$ gilt, dann ist die Menge M hinsichtlich dieser Relation ϱ, falls sie mehr als einen Punkt enthält, nicht zusammenhängend, und ihr zugehöriger Längeninhalt $= 0$.

Ist M eine gegebene endliche Menge, so gibt es offenbar nur endlichviele Möglichkeiten, eine symmetrische nichtreflexive Relation in M zu erklären. Jeder dieser Relationen entspricht ein zugehöriger Längeninhalt von M. Die kleinste der endlichvielen Zahlen, welche auftreten als Längeninhalt von M hinsichtlich einer Relation, für welche M zusammenhängend ist, wollen wir den *Längeninhalt von M* schlechthin nennen und mit $\mu(M)$ bezeichnen. Die Beschränkung auf Relationen, hinsichtlich welcher M *zusammenhängend* ist, ist dabei wesentlich, weil unter den Relationen, hinsichtlich welcher M nicht zusammenhängend ist, dem Beispiel 4 gemäß stets auch eine mit dem zugehörigen Längeninhalt 0 vorkommt, demnach der kleinste unter allen möglichen Längeninhalten auftretende Wert für jede Menge $= 0$ ist.

Anschaulich läßt sich diese Definition so aussprechen: Ist eine endliche Menge mit einer Abstandsdefinition gegeben, so spannen wir in M auf alle möglichen Arten zusammenhängende eindimensionale Komplexe ein, wobei wir als Länge jedes Bogens eines Komplexes den Abstand seiner Endpunkte festsetzen. Wir bilden sodann zu jedem dieser zusammenhängenden Komplexe den Längeninhalt (d. i. die Summe der Längen aller Bogen des Komplexes) und nennen Längeninhalt von M schlechthin die kleinste dieser Zahlen, also den Längeninhalt des kürzesten in M einspannbaren Komplexes.

Da dem obigen Beispiel 2 zufolge für jede endliche Menge M die Zahl $\lambda(M)$ unter den Längeninhalten auftritt, die zu Relationen gehören, hinsichtlich welcher M zusammenhängend ist, so gilt für jede endliche Menge M die Beziehung

$$\mu(M) \leqq \lambda(M).$$

In dieser Beziehung kann das $<$-Zeichen gelten. Betrachten wir etwa die aus vier Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 bestehende Menge M mit den Abständen $p_1 p_2 = p_1 p_3 = p_1 p_4 = 1$, $p_2 p_3 = p_3 p_4 = p_4 p_2 = \sqrt{3}$, so gilt offenbar $\lambda(M) = 2 + \sqrt{3}$, $\mu(M) = 3$.

Während, wenn M eine endliche Menge und M' eine Teilmenge von M ist, offenbar stets $\lambda(M') \leqq \lambda(M)$ gilt, kann $\mu(M') > \mu(M)$ sein. Besteht M' aus den vier Eckpunkten eines Quadrates der Ebene, M aus den vier Punkten von M' und dem Quadratmittelpunkt, so ist $\mu(M') = 3$, $\mu(M) = 2 \cdot \sqrt{2}$.

7. Verschärfung des Hauptsatzes.

Da für eine endliche Menge M, wie wir sahen, die Beziehung $\mu(M) < \lambda(M)$ gelten kann, so ist der folgende Satz eine Verschärfung des im Abschnitt 4 bewiesenen Hauptsatzes:

Für jeden Bogen B gilt $l(B) = \underset{E \subset B}{\text{o. S.}}\, \mu(E)$.

Mit Rücksicht auf das Beispiel 1 des vorigen Abschnittes gilt für jede endliche Teilmenge E eines Bogens B die Beziehung $\mu(E) \leqq l(E, B)$. Also ist $\underset{E \subset B}{\text{o. S.}}\, \mu(E) \leqq \underset{E \subset B}{\text{o. S.}}\, l(E, B) = l(B)$.

Um zu zeigen, daß umgekehrt $\underset{E \subset B}{\text{o. S.}}\, \mu(E) \geqq l(B)$ gilt, genügt auf Grund der am Ende von Abschnitt 4 angewendeten Schlußweise offenbar der Beweis von folgender

Verschärfung der Bemerkung von S. 471. *Ist K eine in B gleichverteilte Kette, so gilt* $\mu(K) = l(K, B)$.

Besteht die in B gleichverteilte ε-Kette etwa aus m Punkten, dann gilt, wie oben (S. 471) festgestellt, $l(K, B) = (m - 1) \cdot \varepsilon$. Unsere Behauptung ist daher bewiesen, wenn wir zeigen: Für jede in K definierte Relation ϱ, hinsichtlich welcher K zusammenhängend ist, ist der zugehörige Längeninhalt $\geqq (m - 1) \cdot \varepsilon$. Da für je zwei Punkte von K der Abstand $\geqq \varepsilon$ ist, so ist die zu beweisende Behauptung enthalten in der folgenden:

Ist die aus m Punkten bestehende Menge M hinsichtlich der Relation ϱ zusammenhängend, dann existieren in M mindestens $m - 1$ zu je zweien nichtidentische Paare von Elementen, die hinsichtlich der Relation ϱ benachbart sind.

Wir geben für diese Behauptung, welche im wesentlichen mit dem bekannten Satz äquivalent ist, daß ein zusammenhängender zwischen m Punkten aufgespannter eindimensionaler Komplex mindestens $m - 1$ Bogen enthält, der Vollständigkeit halber einen Beweis an. Die Behauptung ist trivial für $m = 1$ und $m = 2$. Angenommen, sie sei bewiesen für alle Mengen einer Mächtigkeit $\leqq m - 1$. Sei dann eine Menge M der Mächtigkeit m $(m > 1)$ gegeben. Sei a irgendein festes Element von M. Die Menge $M - (a)$ ist Summe von endlichvielen, etwa von k, Komponenten hinsichtlich der Relation ϱ, d. h. von paarweise fremden Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_k$, von denen jede hinsichtlich der Relation ϱ zusammenhängend ist, aber

nach Hinzufügung irgendeines nicht zu ihr gehörigen Punktes von $M-(a)$ nicht zusammenhängend ist. Ist m_i die Mächtigkeit von M_i, so gilt $m_i \leq m-1$ $(i=1,2,\ldots,k)$. Daher existieren in der Menge M_i mindestens m_i-1 Paare von hinsichtlich der Relation ϱ benachbarten Elementen. Es sind also in $M-(a)$ insgesamt mindestens $\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)=m-1-k$ solcher Elementenpaare vorhanden. Nun ist $M-(a)$ nach Hinzufügung von a mit M identisch, also hinsichtlich der Relation ϱ zusammenhängend. Daher muß zum Element a in jeder der Mengen M_i mindestens ein Element a_i existieren, das mit a hinsichtlich der Relation ϱ benachbart ist. Es kommen also zu den $m-1-k$ Paaren benachbarter Elemente von $M-(a)$ mindestens k weitere Paare in ganz M hinzu, so daß in M minstens $m-1$ solcher Paare vorhanden sind, wie der Satz behauptet.

8. Der Längeninhalt beliebiger Kontinua und seine Halbstetigkeit. Weitere Verallgemeinerungen.

Der im vorigen Abschnitt dargelegte Sachverhalt legt folgende Definition nahe. Wir bezeichnen als *Längeninhalt* des Kontinuums K die Zahl $\underset{E\subset K}{\text{o. S.}}\,\mu(E)$. Ist K speziell ein Bogen, dann stimmt auf Grund des im vorigen Abschnitt bewiesenen Satzes der Längeninhalt von B im eben definierten Sinne mit der Länge des Bogens B im klassischen Sinne überein.

Um die Stetigkeitseigenschaften des so erklärten Längeninhaltes, als Funktion der Kontinua eines Raumes behandeln zu können, erinnern wir vor allem an folgende von Hausdorff stammende Abstands- bzw. Konvergenzdefinition für abgeschlossene Mengen: Sind M und M' zwei gegebene abgeschlossene Mengen eines Raumes, so bilden wir die obere Schranke der Abstände zwischen M und m' für alle Punkte m' von M' und die obere Schranke der Abstände von M' und m für alle Punkte m von M. Die größere dieser beiden Zahlen nennen wir den *Abstand* von M und M'. Wir sagen ferner, die Mengenfolge $\{M_n\}$ $(n=1,2,\ldots$ ad inf.) *konvergiere* gegen die Menge M, wenn die Abstände von M_n und M mit wachsendem n gegen Null konvergieren.

Wir legen nun einen metrischen Raum zugrunde und behaupten:

Der Längeninhalt ist eine unterhalb stetige Funktion der Teilkontinua des Raumes, d. h. ist K ein Kontinuum und $\{K_n\}$ $(n=1,2,\ldots$ ad inf.) *eine gegen K konvergente Folge von Kontinua, so gilt* $\mu(K) \leq \underline{\lim}_{n=\infty}\, \mu(K_n)$.

Zum Beweise ist offenbar zu zeigen: Ist K ein vorgelegtes Kontinuum und $\varepsilon>0$ eine gegebene Zahl, so existiert ein $\delta>0$ derart, daß für jedes Kontinuum K', das von K einen Abstand $<\delta$ hat, die Beziehung gilt $\mu(K')>\mu(K)-\varepsilon$. Um dies einzusehen, betrachten wir für das vor-

gelegte ε eine nach Definition von $\mu(K)$ existierende endliche Teilmenge E von K, für welche $\mu(E) > \mu(K) - \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Die betrachtete Menge E bestehe etwa aus k Punkten. Wir werden zeigen, daß dann $\delta = \frac{\varepsilon}{2k(k-1)}$ unserer Behauptung genügt. Sei nämlich K' irgendein Kontinuum, dessen Abstand von K kleiner als die eben angegebene Zahl δ ist. Wir wollen zeigen, daß $\mu(K') > \mu(K) - \varepsilon$ gilt.

Nach Definition des Abstandes existiert zu jedem der k Punkte von K ein Punkt von K' in einem Abstand $< \delta$ vom betreffenden Punkt von K. Die Menge dieser k (nicht notwendig paarweise verschiedenen) Punkte von K' heiße E'. Wir bilden $\mu(E')$. Es sei ϱ' die Relation in E', zu welcher die Zahl $\mu(E')$ als Längeninhalt gehört. Nach der Definition des Längeninhaltes ist E' hinsichtlich dieser Relation ϱ' zusammenhängend. Wir erklären nun eine Relation ϱ' in der Menge E durch die Festsetzung, daß für zwei verschiedene Punkte a und b von E die Beziehung $a\varrho' b$ dann und nur dann gilt, wenn für die beiden entsprechenden Punkte a' und b' von E' entweder $a'\varrho' b'$ oder $a' = b'$ gilt. Da E' hinsichtlich der Relation ϱ' zusammenhängend ist, ist E hinsichtlich ϱ' zusammenhängend. Wir bezeichnen mit $\mu'(E)$ den zu dieser Relation ϱ' gehörigen Längeninhalt von E. Sind a und b zwei Punkte von E und a' und b' die entsprechenden Punkte von E', so folgt aus $aa' < \delta$, $bb' < \delta$ durch zweimalige Anwendung der Dreiecksungleichung $|a'b' - ab| < 2\delta$. Nun enthält die Menge E k Punkte, also $\frac{k(k-1)}{2}$ Punktepaare und daher höchstens $\frac{k(k-1)}{2}$ Paare von Punkten, die hinsichtlich der Relation ϱ' benachbart sind. Für jedes solche Punktepaar unterscheidet sich der Abstand um höchstens $2\delta = \frac{\varepsilon}{k(k-1)}$ vom Abstand des entsprechenden Punktepaares von E'. Es ist also $\mu'(E)$ um höchstens $\frac{k(k-1)}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{k(k-1)} = \frac{\varepsilon}{2}$ größer als $\mu(E')$, d. h. es gilt $\mu(E') > \mu'(E) - \frac{\varepsilon}{2}$. Nach Definition von $\mu(E)$ gilt, da E hinsichtlich ϱ' zusammenhängend ist, $\mu'(E) \geqq \mu(E)$, also $\mu(E') > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}$. Folglich gilt, wegen $\mu(E) > \mu(K) - \frac{\varepsilon}{2}$, die Beziehung $\mu(E') > \mu(K) - \varepsilon$, wie behauptet.

Um die Definition des Längeninhaltes von Kontinua endlich noch auf beliebige (auch nicht zusammenhängende) eindimensionale kompakte Räume zu verallgemeinern, führen wir folgenden Hilfsbegriff ein: Ist M eine Teilmenge eines Raumes und E eine endliche Teilmenge von M, so sagen wir, daß E hinsichtlich der Relation ϱ *von demselben Zusammenhang* sei wie M, wenn zwei Punkte von E dann und nur dann einer hinsichtlich ϱ zusammenhängenden Teilmenge von E angehören, falls die beiden Punkte in der-

selben Komponente von M liegen. Wir bezeichnen nun, wenn eine Menge M und eine endliche Teilmenge E von M vorgegeben sind, mit $\mu(E, M)$ die kleinste Zahl, welche auftritt unter den Längeninhalten von E, die zu jenen Relationen gehören, hinsichtlich welcher E denselben Zusammenhang hat wie M. Da eine Teilmenge E einer zusammenhängenden Menge M dann und nur dann hinsichtlich der Relation ϱ denselben Zusammenhang wie M hat, wenn E hinsichtlich ϱ zusammenhängend ist, so gilt, falls M speziell ein Kontinuum ist, für jede endliche Teilmenge E von M die Beziehung $\mu(E, M) = \mu(E)$ im Sinne der Definition von S. 475.

Wir erklären nunmehr als *Längeninhalt* einer kompakten Menge M die Zahl $\underset{E \subset M}{\text{o. S.}}\, \mu(E, M)$ und bezeichnen dieselbe mit $\mu(M)$. Für Kontinua stimmt auf Grund der ebenerwähnten Tatsache der so definierte Längeninhalt mit dem im vorigen Abschnitt eingeführten überein.

Während der Längeninhalt im Bereiche der Kontinua, wie wir sahen, unterhalb stetig ist, gilt das Entsprechende im Bereiche der kompakten Mengen nicht.

Wenn wir beispielsweise in der Ebene die Strecke M $0 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$ betrachten, so gibt es in jedem noch so kleinen Abstand von dieser Strecke abgeschlossene Mengen (und sogar abgeschlossene eindimensionale Mengen, wenngleich natürlich nicht Kontinua), deren Längeninhalte $< \frac{3}{4}$ sind. Bezeichnen wir mit M_n die Summe der Strecken $\frac{2i}{2^n} \leqq x \leqq \frac{2i+1}{2^n}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1)$, $y = \frac{1}{n}$, so hat jede Menge der Folge $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) den Längeninhalt $\frac{1}{2}$ und die Folge enthält zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge in einem Abstand $< \varepsilon$ von der Menge M, deren Längeninhalt 1 ist.

Die wichtigste Verallgemeinerung dieser Untersuchungen über den Längenbegriff ist natürlich die auf höhere Dimensionen. Ist E eine endliche Menge, so kann E auf endlichviele verschiedene Arten „trianguliert" werden, d. h. zur Menge der Eckpunkte eines unberandeten Polyeders vom Zusammenhang der Kugeloberfläche gemacht werden. Ist E speziell als Teilmenge eines euklidischen Raumes oder allgemeiner eines Raumes mit zweidimensionaler Metrik (im Sinne der dritten metrischen Untersuchung, Math. Annalen **100**) gegeben, so entspricht jeder dieser Triangulierungen ein Flächeninhalt. Mit $\varphi(E)$ wollen wir die kleinste dieser endlichvielen Zahlen bezeichnen. Ich vermute dann in Verallgemeinerung der Ergebnisse dieses Aufsatzes folgenden Sachverhalt: Ist F eine konvexe geschlossene Fläche des R_3, so ist ihr Flächeninhalt gleich der oberen Schranke der Zahlen $\varphi(E)$ für alle endlichen Teilmengen E von F. Ist F irgendeine geschlossene Fläche, so ist ihr Flächeninhalt die obere Schranke

der Zahlen $\underline{\lim}\, \varphi(E_n)$ für alle F immer dichter erfüllenden Folgen $\{E_n\}$ von endlichen Mengen. Damit ist eine Definition des Flächeninhaltes gewonnen, welche 1. *intrinsek* ist, indem sie lediglich Punkte der zu messenden Fläche selbst in Betracht zieht, welche 2. *rein metrisch* ist, indem sie lediglich die den Punktetripeln der Fläche zugeordneten Flächeninhalte, nicht aber Koordinatendarstellungen, Projektionen od. dgl. in Betracht zieht, und welche 3. *verallgemeinerbar auf beliebige Dimensionen ist*. Wie durch den Gedanken der $\varphi(E)$ definierenden Minimaltriangulierung von E die Schwierigkeiten überwunden werden, welche die bekannte Entdeckung von H. A. Schwarz für die Theorie des Flächeninhaltes mit sich brachte, ist klar.

II. Zur Theorie der Bogenkrümmung.

1. Krümmung dreier Punkte.

Es liege ein *metrischer Raum* vor, d. h. eine Menge von Elementen (*Punkte* genannt), in der jedem Punktepaar p, q eine Zahl

$$pq = qp \begin{array}{l} > 0, \text{ wenn } p \neq q \\ = 0, \text{ wenn } p = q \end{array}$$

(der *Abstand* der Punkte p und q) zugeordnet ist, die für je drei Punkte p, q, r der Beziehung $pq + qr \geqq pr$ (*Dreiecksungleichung*) genügt.

Wir ordnen je drei paarweise verschiedenen Punkten p, q, r des Raumes die Zahl

$$\varkappa(p, q, r) = \frac{\sqrt{(pq+qr+rp)\,(pq+qr-rp)\,(pq-qr+rp)\,(-pq+qr+rp)}}{pq \cdot qr \cdot rp}$$

zu und nennen diese Zahl die *Krümmung* der drei Punkte p, q, r. Ihren reziproken Wert, die Zahl $\frac{1}{\varkappa(p,q,r)}$, bezeichnen wir mit $\varrho(p, q, r)$ und nennen diese Zahl den *Krümmungsradius* der drei Punkte p, q, r.

Für je drei paarweise verschiedene Punkte p, q, r ist die so definierte Zahl $\varkappa(p, q, r)$ reell und nichtnegativ. Denn der Nenner ist Produkt dreier positiver reeller Faktoren, von denen wegen der paarweisen Verschiedenheit der drei Punkte keiner verschwindet, und der Radikand im Zähler ist Produkt von vier nichtnegativen reellen Faktoren (die Nichtnegativität der drei letzten Faktoren für je drei Punkte p, q, r ist offenbar mit der vorausgesetzten Gültigkeit der Dreiecksungleichung für je drei Punkte des Raumes äquivalent und die des ersten Faktors ist evident).

Es gilt für drei paarweise verschiedene Punkte p, q, r die Beziehung $\varkappa(p, q, r) = 0$ dann und nur dann, wenn einer der drei letzten Faktoren des Radikanden im Zähler verschwindet; dies ist aber in der Ausdrucksweise der Konvexitätstheorie dann und nur dann der Fall, wenn einer der drei Punkte Zwischenpunkt der beiden anderen ist.

Ist der zugrunde liegende metrische Raum *euklidisch*, dann ist für je drei paarweise verschiedene Punkte p, q, r die Zahl $\varrho(p, q, r)$ gleich der Länge des Radius des den drei Punkten umgeschriebenen Kreises. Und es ist in diesem Falle die Zahl $\varkappa(p, q, r)$ dann und nur dann $= 0$, wenn die drei Punkte p, q, r auf einer Geraden liegen.

2. Krümmung eines Bogens.

Die Krümmung $\varkappa(p, q, r)$ ist eine auf der Menge der Punktetripel definierte reelle Funktion (dabei verstehen wir unter Punktetripel hier und im folgenden stets Tripel von *paarweise verschiedenen* Punkten). Ist nun M eine Teilmenge, p ein Punkt eines metrischen Raumes und n eine natürliche Zahl, so bezeichnen wir die obere bzw. untere Schranke der Krümmungen aller Punktetripel der Menge M, die in $U\left(p; \frac{1}{n}\right)$ liegen, mit $\overline{\varkappa}\left(p; M; \frac{1}{n}\right)$ bzw. mit $\underline{\varkappa}\left(p; M; \frac{1}{n}\right)$. Wir setzen ferner

$$\limsup_{n=\infty} \overline{\varkappa}\left(p; M; \frac{1}{n}\right) = \overline{\varkappa}(p; M), \qquad \liminf_{n=\infty} \underline{\varkappa}\left(p; M; \frac{1}{n}\right) = \underline{\varkappa}(p; M)$$

und nennen diese Zahlen die *obere* bzw. *untere Krümmung* der Menge M im Punkt p. Wenn für einen Punkt p die Beziehung $\overline{\varkappa}(p; M) = \underline{\varkappa}(p; M)$ gilt, dann bezeichnen wir diesen gemeinsamen Wert mit $\varkappa(p; M)$ und nennen ihn die *Krümmung* der Menge M im Punkte p.

Wir sagen also (dieser Definition zufolge), die Menge M besitze im Punkte m die Krümmung $\varkappa$, wo $\varkappa$ eine nichtnegative endliche Zahl ist, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für je drei paarweise verschiedene Punkte p, q, r der Menge M, die von m einen Abstand $< \delta$ haben, die Beziehung $|\varkappa(p, q, r) - \varkappa| < \varepsilon$ gilt. Und wir sagen, die Menge M besitze im Punkte m die Krümmung ∞, wenn zu jeder noch so großen positiven Zahl ϱ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für je drei Punkte p, q, r der Menge M, die von m einen Abstand $< \delta$ haben, die Beziehung gilt $\varkappa(p, q, r) > \varrho$.

Wenn M ein Bogen ist, so ist klar, wie die Begriffe *rechtsseitige* (bzw. linksseitige) obere und untere Krümmung zu definieren sind. Ist B ein (durch zweimal differenzierbare Parameterfunktionen gegebener) Teilbogen eines euklidischen Raumes, der in seinem Punkte p eine Krümmung im klassischen Sinne der Differentialgeometrie besitzt, dann besitzt, wie die Analyse der klassischen Krümmungsdefinition unmittelbar ergibt, der Bogen in diesem Punkte offenbar auch eine Krümmung im Sinne der obigen Definition, und zwar stimmt dieselbe mit der Krümmung im klassischen Sinne überein.

Betrachten wir beispielsweise einen Bogen B eines euklidischen Raumes, welcher Summe zweier Strecken ist, ohne selbst mit einer Strecke kongruent zu sein (welcher also Summe zweier eine Ecke bildenden Strecken ist), dann ist die Krümmung in jedem von der Ecke verschiedenen Punkte des Bogens $= 0$. In der Ecke besitzt B eine verschwindende rechtsseitige und linksseitige Krümmung, denn für je drei auf einer Seite der Ecke gelegene Punkte des Bogens verschwindet die Krümmung. Die untere Krümmung des Bogens in der Ecke ist also $= 0$. Die obere Krümmung in der Ecke ist aber $= \infty$. Denn es gibt in beliebig kleiner Nachbarschaft der Ecke Punktetripel, deren Krümmung eine beliebig vorgelegte Zahl übersteigt. Eine Krümmung besitzt also B in der Ecke nicht.

3. Ungekrümmte, aber nicht gerade Bogen.

In der zweiten Untersuchung über allgemeine Metrik wurde (in metrischer Präzisierung eines topologischen Satzes von Biedermann) bewiesen: Damit ein Bogen *gerade* (d. h. kongruent mit einer Strecke) sei, ist notwendig und hinreichend, daß für je drei Punkte p, q, r von B die Beziehung gilt

$$D(p, q, r) = 0,$$

wobei

$$D(p,q,r) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (pq)^2 & (pr)^2 \\ 1 & (pq)^2 & 0 & (qr)^2 \\ 1 & (pr)^2 & (qr)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (pq + qr + rp)\cdot(pq + qr - rp)\cdot(pq - qr + rp)\cdot(-pq + qr + rp)$$

bedeutet. Da in dieser Schreibweise für jedes Punktetripel

$$\varkappa(p, q, r) = \frac{\sqrt{D(p, q, r)}}{pq\cdot qr\cdot rp}$$

gilt, wobei der Nenner sicherlich nicht verschwindet, so kann dieses Ergebnis offenbar auch dahin ausgesprochen werden, *daß ein Teilbogen eines beliebigen metrischen Raumes dann und nur dann gerade ist, wenn für je drei seiner Punkte die Krümmung verschwindet*, d. h. $\varkappa(p, q, r) = 0$ gilt.

Dieser Umstand drängt die Frage auf, ob nicht die mit der Strecke kongruenten Bogen neben dieser Kennzeichnung *„im großen"* auch eine entsprechende Kennzeichnung *„im kleinen"* gestatten durch den Satz: *Damit ein Bogen gerade sei, ist notwendig und hinreichend, daß er in jedem seiner Punkte die Krümmung Null besitze?* Unter den Teilbogen *euklidischer* Räume sind ja die Strecken tatsächlich dadurch gekennzeichnet, daß ihre Krümmung im klassischen Sinne für jeden Punkt $= 0$ ist.

Für Teilbogen beliebiger (nicht notwendig euklidischer) metrischer Räume ist indes die eben aufgeworfene Frage zu verneinen. Wir geben im folgenden einen metrischen Raum an, welcher *ein Bogen ist, der in jedem seiner Punkte die Krümmung Null besitzt und dennoch nicht mit einer Strecke kongruent ist.*

Der betrachtete Bogen B sei topologisch auf das abgeschlossene Intervall $[-1; 1]$ abgebildet, so daß also jeder Punkt von B durch eine Zahl dieses Intervalles gekennzeichnet ist. Als Abstand der Punkte x und y sei erklärt die Zahl

$$r(x, y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{wenn } \operatorname{sign} x = \operatorname{sign} y, \quad (^*) \\ |x| + |y| - x^2 \cdot y^2, & \text{wenn } \operatorname{sign} x \neq \operatorname{sign} y. \quad (^{**}) \end{cases}$$

Dabei ordnen wir der Zahl 0 sowohl das Signum $+$ als auch das Signum $-$ zu, so daß also vermöge jeder der Vorschriften $(^*)$ und $(^{**})$ $r(x, 0) = |x|$ für jedes x gilt.

Wir behaupten vor allem: Vermöge dieser Abstandsdefinition ist B ein *metrischer Raum.*

In der Tat gilt offenbar für je zwei Punkte x und y von B die Beziehung $r(x, y) = r(y, x)$. Sind x und y zwei verschiedene Punkte, so gilt $r(x, y) > 0$, während für jeden Punkt x die Beziehung $r(x, x) = 0$ gilt. Es bleibt also noch die Gültigkeit der Dreiecksungleichung

$$r(x, y) + r(y, z) \geqq r(x, z)$$

für je drei Punkte x, y, z zu erweisen.

Wenn $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} y = \operatorname{sign} z$ gilt, so ist diese Beziehung offenbar erfüllt, denn die beiden Teilbogen von B, bestehend aus den Strecken $[-1, 0]$ und $[0, 1]$, sind vermöge $(^*)$ mit einer Strecke kongruent. Es ist also die Dreiecksungleichung noch zu erweisen für den Fall, daß zwei von den drei Punkten x, y, z dasselbe und der dritte ein verschiedenes Vorzeichen besitzen. Da x und z symmetrisch in die zu beweisende Beziehung eingehen so genügt es, die Fälle zu untersuchen:

1. $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} y \neq \operatorname{sign} z$;
2. $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} z \neq \operatorname{sign} y$.

Im Falle 1 lautet die zu beweisende Beziehung

$$(\dagger) \qquad |x-y| + |y| + |z| - y^2 z^2 \geqq |x| + |z| - x^2 z^2$$

oder

$$|x-y| \geqq |x| - |y| + z^2 (y^2 - x^2).$$

Wenn a) $|x| \leqq |y|$ gilt, dann ist $|y| - |x| = |x-y|$. Also lautet die zu beweisende Beziehung $2(|y| - |x|) \geqq z^2 (y^2 - x^2)$. Nun gilt, weil x, y und z dem Intervall $[-1, 1]$ entnommen sind,

$$2 \geqq z^2 (|y| + |x|),$$

woraus durch Multiplikation mit der positiven Zahl $|y|-|x|$ die zu beweisende Beziehung folgt.

Wenn b) $|x| \geqq |y|$ gilt, dann ist $|x-y| = |x|-|y|$; also lautet die zu beweisende Beziehung

$$|x|-|y| \geqq |x|-|y|+z^2(y^2-x^2)$$

und dies ist richtig, da wegen Annahme b) $y^2-x^2<0$ ist.

Im Falle 2 lautet die zu beweisende Beziehung

$$(\dagger\dagger) \qquad |x|+|y|-x^2y^2+|y|+|z|-y^2z^2 \geqq |x-z|,$$

und da $|x-z| \leqq |x|+|z|$ ist, so ist $(\dagger\dagger)$ erfüllt, falls $2|y|-y^2(x^2+z^2) \geqq 0$ gilt. Dies ist aber wegen $x^2+z^2 \leqq 2$ und $y^2 \leqq |y|$ tatsächlich richtig.

Der Bogen B ist also ein metrischer Raum.

Wir behaupten weiter: *B hat in jedem Punkt die Krümmung* 0. Für jeden vom Punkte 0 verschiedenen Punkt ist dies evident, denn wenn $x \neq 0$, so ist die Umgebung des Punktes x, bestehend aus allen Punkten von B, die vom Punkte x einen Abstand $< \frac{|x|}{2}$ haben, mit einer Strecke kongruent. Es ist also nur nachzuweisen, daß B im Punkte 0 die Krümmung 0 besitzt, m. a. W. es ist zu zeigen: *Ist $\varepsilon > 0$ eine vorgelegte Zahl, so gilt für je drei Punkte x, y, z, für die $|x|, |y|, |z|$ hinlänglich klein sind, die Beziehung $\varkappa(x, y, z) < \varepsilon$.*

Da für den Fall, daß $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} y = \operatorname{sign} z$ gilt, sicherlich $\varkappa(x, y, z) = 0$ ist (weil dann x, y, z kongruent mit drei Punkten einer Strecke sind), so genügt es, etwa jene Tripel von Punkten zu untersuchen, für die $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} y \neq \operatorname{sign} z$ gilt, wobei noch $|x| < |y|$ angenommen werden kann. Es ist dann

$$\varkappa(x, y, z) =$$

$$= \frac{\sqrt{[2|y|+2|z|-z^2(x^2+y^2)]\cdot[2|y|-2|x|+z^2(x^2-y^2)]\cdot[z^2(y^2-x^2)]\cdot[2|x|+2|z|-z^2(x^2+y^2)]}}{(|y|-|x|)\cdot(|y|+|z|-y^2z^2)\cdot(|x|+|z|-x^2z^2)}$$

Mit Rücksicht auf $|x| \leqq |y|$ vergrößern wir den Zähler dieses Bruches, indem wir den ersten Faktor unter dem Wurzelzeichen durch $2(|y|+|z|)$, den zweiten durch $2(|y|-|x|)$ und den letzten durch $2(|x|+|z|-x^2z^2)$ ersetzen. Wir erhalten hierdurch

$$\varkappa(x, y, z) \leqq \frac{\sqrt{8(|y|+|z|)\cdot(|y|-|x|)\cdot z^2\cdot(y^2-x^2)\cdot(|x|+|z|-x^2z^2)}}{(|y|-|x|)\cdot(|y|+|z|-y^2z^2)\cdot(|x|+|z|-x^2z^2)}.$$

Indem wir im Zähler y^2-x^2 durch $(|y|+|x|)\cdot(|y|-|x|)$ ersetzen und Zähler und Nenner durch $|y|-|x|$ und den letzten Faktor des Zählers dividieren, erhalten wir

$$\varkappa(x, y, z) \leqq \frac{\sqrt{8(|y|+|z|)\cdot z^2\cdot(|x|+|y|)}}{\sqrt{|x|+|z|-x^2z^2}\cdot(|y|+|z|-y^2z^2)}.$$

Wir vergrößern diesen Ausdruck, indem wir den letzten Faktor des Zählers durch $2|y|$ ersetzen. Da ferner $|x| \geqq x^2z^2$, $|y| \geqq y^2z^2$, $|z| \geqq y^2z^2$ gilt, so verkleinern wir den Nenner, indem wir den ersten Faktor durch $\sqrt{|z|}$ ersetzen, und den zweiten Faktor, welcher $= \sqrt{(|y|+|z|-y^2z^2)\cdot(|y|+|z|-y^2z^2)}$ geschrieben werden kann, durch $\sqrt{|y|\cdot|z|}$ ersetzen. Wir erhalten, wenn wir nach diesen Vergrößerungen des Bruches Zähler und Nenner durch $\sqrt{z^2\cdot|y|}$ dividieren, die Beziehung

$$\varkappa(x, y, z) \leqq 4\sqrt{|y|+|z|}.$$

Aus diesem Ergebnis folgt: Ist ε irgendeine Zahl >0 und <1 und sind y und z ihrem Betrage nach so klein, daß $|y|+|z| \leqq \frac{\varepsilon^2}{16}$ ist, dann gilt $\varkappa(x, y, z) \leqq \varepsilon$. Insbesondere folgt hieraus: Ist ε irgendeine gegebene Zahl >0 und <1, so ist für je drei Punkte x, y, z von B, deren drei Beträge sämtlich $<\frac{\varepsilon^2}{32}$ sind, die Krümmung $\leqq \varepsilon$. Damit ist bewiesen, daß B im Punkte 0, also in jedem Punkte, die Krümmung 0 besitzt.

Wir behaupten schließlich, *daß B nicht mit einer Strecke kongruent ist*. In der Tat, B enthält drei Punkte, nämlich die Punkte $-1, 0, 1$, die zu je zwei voneinander den Abstand 1 haben. Diese drei Punkte sind aber nicht mit drei Punkten einer Geraden kongruent.

Der konstruierte Bogen B ist also ungekrümmt, aber nicht gerade, wie behauptet.

4. Ein Lemma über euklidische Räume.

Wenn unter den Teilbogen euklidischer Räume die Strecken durch überall verschwindende Krümmung gekennzeichnet sind, so muß dies den vorangehenden Ausführungen zufolge eine Konsequenz *besonderer metrischer Eigenschaften euklidischer Räume* sein. Der klassische differentialgeometrische Beweis für die Charakterisierung der Geraden durch Ungekrümmtheit, welcher darauf beruht, daß die zum Vergleich zugelassenen Bogen mit Hilfe eines Koordinatensystems arithmetisch-analytisch gegeben werden, die Krümmung durch einen Differentialausdruck dargestellt wird und die gesuchten Kurven verschwindender Krümmung durch Integration einer Differentialgleichung gewonnen werden, — dieser Beweis läßt infolge seiner Basierung auf den Koordinatenbegriff die erwähnten metrischen Eigenschaften euklidischer Räume nicht erkennen. Es ist daher vielleicht nicht überflüssig, für die hinsichtlich euklidischer Räume altbekannte Tatsache der Kennzeichnung der Geraden durch Ungekrümmtheit einen den Koordinatenbegriff nicht verwendenden rein metrischen Beweis zu erbringen.

Wir beginnen mit folgendem

Lemma. Voraussetzungen: *Es seien n Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ eines euklidischen Raumes R gegeben und ebenso viele Punkte $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ in der Ebene, welche folgenden Bedingungen genügen:*

1. $p'_i p'_{i+1} = p_i p_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$.
2. $p'_i p'_{i+2} \leqq p_i p_{i+2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$.
3. *Der Streckenzug $p'_1 p'_2 \cdots p'_{n-1} p'_n p'_1$ ist ein geschlossenes konvexes Polygon.*

Behauptung: *Es gilt $p'_1 p'_n \leqq p_1 p_n$.*

Ich bringe im folgenden einen im wesentlichen von Gustav Bergmann stammenden Beweis dieses Lemmas.

Die Behauptung ist trivial für $n = 3$. Denn die Behauptung $p'_1 p'_3 \leqq p_1 p_3$ ist in diesem Fall schon durch die Voraussetzung 2 erfüllt.

Wir machen also für irgendeine natürliche Zahl k die (für $n = 3$ eben bewiesene) Annahme

A_k. Sind k Punkte eines euklidischen Raumes und ebenso viele Punkte der Ebene gegeben, welche den Bedingungen 1, 2, 3 genügen, so gilt

$$p'_1 p'_k \leqq p_1 p_k.$$

Das Lemma ist durch vollständige Induktion bewiesen, wenn wir auf Grund der Annahme A_k die Gültigkeit der Annahme A_{k+1} herleiten.

Es seien zu diesem Zwecke $k+1$ Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}$ eines euklidischen Raumes und $k+1$ entsprechende Punkte $p'_1, p'_2, \ldots, p'_k, p'_{k+1}$ gegeben, welche den Bedingungen 1, 2, 3 genügen. Wir haben nachzuweisen

$$p'_1 p'_{k+1} \leqq p_1 p_{k+1}.$$

Wir drehen die Strecke $p'_1 p'_2$ um den Punkt p'_2 so lange, bis p'_1 zum ersten Male in einen Punkt gelangt (derselbe heiße p''_1), dessen Abstand von p'_3 gleich dem Abstand $p_1 p_3 (\geqq p'_1 p'_3)$ ist. Dann gilt

$$p''_1 p'_2 = p'_1 p'_2 = p_1 p_2, \qquad p''_1 p'_3 = p_1 p_3, \qquad p''_1 p'_{k+1} \geqq p'_1 p'_{k+1}.$$

Die letztere Beziehung entnimmt man einem Vergleich der beiden Dreiecke p'_1, p'_2, p'_{k+1} und p''_1, p'_2, p'_{k+1}. (Die in p'_2 zusammenstoßenden Seiten sind in beiden Dreiecken gleich. Der Winkel bei p'_2 ist im zweiten Dreieck größer.) Da $\sphericalangle p''_1 p'_2 p'_3 \leqq 180^\circ$, ist der Streckenzug $p''_1 p'_2 p'_3 \cdots p'_{k+1} p''_1$ ein geschlossenes konvexes Polygon.

Nun drehen wir das Dreieck $p''_1 p'_3 p'_2$ um den Punkt p'_3 so lange, bis der Punkt p'_2 zum erstenmal in einen Punkt gelangt (derselbe heiße p''_2), dessen Abstand von p'_4 gleich dem Abstand $p_2 p_4 (\geqq p'_2 p'_4)$ ist. Der Punkt, in den p''_1 bei dieser Drehung übergeht, möge p'''_1 heißen. Da $p''_2 p'_3 p'_4 \leqq 180^\circ$,

ist der Streckenzug $p_1''' p_2'' p_3' p_4' \ldots p_{k+1}' p_1'''$ ein geschlossenes konvexes Polygon. Es gilt ferner

$$p_1''' p_2'' = p_1'' p_2' = p_1 p_2, \quad p_1''' p_3' = p_1'' p_3' = p_1 p_3, \quad p_2'' p_3' = p_2' p_3' = p_2 p_3,$$
$$p_2'' p_4' = p_2 p_4, \quad p_3' p_4' = p_3 p_4, \quad p_1''' p_{k+1}' \geqq p_1'' p_{k+1}'.$$

Die letzte dieser Beziehungen entnimmt man einem Vergleich der beiden Dreiecke p_1'', p_3', p_{k+1}' und p_1''', p_3', p_{k+1}'. Aus den fünf ersten Beziehungen folgt, daß das räumliche Tetraeder p_1, p_2, p_3, p_4 und das ebene $p_1''', p_2'', p_3', p_4'$ alle Kanten, ausgenommen höchstens $p_1 p_4$, gleich haben. Wegen der Konvexität des Viereckes $p_1''', p_2'', p_3', p_4'$ folgt daraus $p_1''' p_4' \leqq p_1 p_4$. Für die k Punkte $p_1, p_3, p_4, \ldots, p_{k+1}$ des Raumes und die k Punkte $p_1''', p_3', p_4', \ldots, p_{k+1}'$ der Ebene sind also die drei Bedingungen des Lemmas erfüllt, so daß aus der Annahme A_k die Ungleichung $p_1''' p_{k+1}' \leqq p_1 p_{k+1}$ folgt. Wegen $p_1''' p_{k+1}' \geqq p_1'' p_{k+1}' \geqq p_1' p_{k+1}'$ folgt hieraus die Behauptung $p_1' p_{k+1}' \leqq p_1 p_{k+1}$.

Damit ist das Lemma bewiesen.

5. Über n-Gitter.

Wir werden noch von folgender Begriffsbildung Gebrauch machen: Eine aus $n+1$ Punkten bestehende Teilmenge G des Bogens B zwischen den Punkten a und c heiße ein *n-Gitter von B*, wenn folgendes gilt: Die Punkte von G lassen sich derart anordnen und mit $b_0, b_1, \ldots, b_n$ bezeichnen, daß $a = b_0$, $c = b_n$ gilt und je zwei konsekutive Punkte b_i und b_{i+1} für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ einen und denselben Abstand haben. Offenbar gilt der

Satz. *Ist B ein vorgelegter Bogen und n eine natürliche Zahl, so existiert ein n-Gitter von B.*

Sei nämlich ein Bogen B und eine natürliche Zahl n vorgelegt und überdies eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $b_0(\varepsilon) = a$ und bezeichnen, wenn für eine natürliche Zahl k $(0 \leqq k < n)$ der Punkt $b_k(\varepsilon)$ bereits definiert ist, mit $b_{k+1}(\varepsilon)$ den ersten Punkt, welchen man auf B von $b_k(\varepsilon)$ nach c laufend im Abstand ε von $b_k(\varepsilon)$ antrifft. Es sind dann zwei Fälle möglich: entweder ein Punkt $b_n(\varepsilon)$ von B existiert oder dies ist nicht der Fall. Der zweite Fall liegt offenbar dann vor, wenn für ein $k < n$ auf B zwischen dem Punkt $b_k(\varepsilon)$ und c kein Punkt im Abstand ε von $b_k(\varepsilon)$ existiert, d. h. wenn für ein $k < n$ der Abstand von $b_k(\varepsilon)$ und c kleiner als ε ist.

Wir nehmen nun eine Einteilung der reellen Zahlen in zwei Klassen vor, indem wir eine reelle Zahl ε in die Unterklasse bzw. in die Oberklasse werfen, je nachdem für sie der erste bzw. der zweite angeführte Fall vorliegt. Man bestätigt mühelos, daß die so definierte Einteilung der reellen

Zahlen ein Dedekindscher Schnitt ist, und daß, wenn $l(n)$ die den Schnitt erzeugende reelle Zahl bezeichnet, der Punkt $b_n(l(n)) = c$ ist. Daraus folgt unmittelbar, daß zu jedem n für die solcherart definierte Zahl $l(n)$ die $n+1$ Punkte $b_i(l(n))$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ein n-Gitter in B bilden, womit die behauptete Existenz von n-Gittern erwiesen ist.

6. Die Strecke unter den euklidischen Bogen von endlicher Länge.

Damit ein Bogen B eines euklidischen Raumes eine Strecke sei, ist notwendig und hinreichend, daß B in jedem seiner Punkte die Krümmung 0 *besitze.*

Die Notwendigkeit der Bedingung ist evident. Daß sie auch hinreichend sei, beweisen wir zunächst für den Fall der Bogen mit endlicher Länge.

Es sei irgendein Bogen B zwischen zwei Punkten a und c vorgelegt, dessen Länge endlich, etwa $= l$, ist. Wir geben eine natürliche Zahl n vor und bilden ein n-Gitter von B, bestehend aus den Punkten $b_0^n, b_1^n, \ldots, b_n^n$, wobei also (der Definition eines n-Gitters zufolge) $b_0^n = a$, $b_n^n = c$ gilt und je zwei aufeinanderfolgende Punkte des Gitters einen und denselben Abstand voneinander haben. Derselbe möge etwa $l(n)$ heißen, d. h. es gelte $b_i^n b_{i+1}^n = l(n)$, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Wir bilden nun für je drei aufeinanderfolgende Punkte des n-Gitters den Krümmungsradius und bezeichnen mit $\varrho(n)$ die kleinste dieser endlichvielen Zahlen, setzen also

$$\varrho(n) = \operatorname{Min} \varrho(b_i^n, b_{i+1}^n, b_{i+2}^n) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2).$$

Wir betrachten sodann in der Ebene eine Kreislinie K mit dem Radius $\varrho(n)$, deren Zentrum p heißen möge. Wir tragen auf K $n+1$ Punkte $p_0^n, p_1^n, \ldots, p_n^n$ auf, so daß $p_i^n p_{i+1}^n = l(n)$ gilt.

Es liegen dann also $n+1$ Punkte $b_0^n, b_1^n, \ldots, b_n^n$ eines euklidischen Raumes und ebenso viele Punkte $p_0^n, p_1^n, \ldots, p_n^n$ vor, so daß die Beziehung gilt

$$(1) \qquad p_i^n p_{i+1}^n = b_i^n b_{i+1}^n \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ferner gilt für je drei aufeinanderfolgende Punkte $p_i^n, p_{i+1}^n, p_{i+2}^n$ mit Rücksicht auf die Definition von $\varrho(n)$

$$\varrho\left(p_i^n, p_{i+1}^n, p_{i+2}^n\right) \leqq \varrho\left(b_i^n, b_{i+1}^n, b_{i+2}^n\right),$$

also gilt wegen (1)

$$(2) \qquad p_i^n p_{i+2}^n \leqq b_i^n b_{i+2}^n \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2).$$

Als Abstand der Punkte p_0^n und p_n^n ergibt sich ferner offenbar

$$(*) \qquad p_0^n p_n^n = 2\varrho(n) \cdot \sin\left[n \cdot \arcsin \frac{l(n)}{2\varrho(n)}\right].$$

Wir machen nun über den Bogen B die Voraussetzung, *daß er in jedem seiner Punkte die Krümmung* 0 (*also den Krümmungsradius* ∞) *besitze*, und behaupten unter dieser Voraussetzung: Wenn wir ein n-Gitter von B für jede der Zahlen $n = 1, 2, \ldots$ ad inf. und für jedes natürliche n die Zahl $\varrho(n)$ bilden, so gilt

(**) $$\lim_{n=\infty} \varrho(n) = \infty .$$

Wäre nämlich diese Behauptung unrichtig, so existierte eine reelle Zahl R und eine Zahlenfolge $\{k_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.), so daß $\varrho(k_n) \leqq R$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) wäre. Auf Grund der Definition von $\varrho(n)$ gäbe es also im k_n-Gitter von B ein Tripel T_{k_n} von aufeinanderfolgenden Punkten, für welche der Krümmungsradius $\leqq R$ wäre. Nun haben je zwei aufeinanderfolgende Punkte des k_n-Gitters den Abstand $l(k_n)$, und es besitzt daher jedes Tripel von aufeinanderfolgenden Punkten des k_n-Gitters einen Durchmesser $\leqq 2 \cdot l(k_n)$. Der Durchmesser von T_{k_n} ist demnach $\leqq 2 \cdot l(k_n)$. Da für jedes n das n-Gitter G_n eine endliche Teilmenge des Bogens B ist, für welche in der Symbolik von Abschnitt 1 des ersten Kapitels dieser Arbeit die Beziehung $l(G_n, B) = n \cdot l(n)$ gilt, so gilt für jedes n

(***) $$n \cdot l(n) \leqq l,$$

demnach $\lim\limits_{n=\infty} l(n) = 0$. Also konvergieren die Durchmesser der Tripel T_{k_n} mit wachsendem n gegen Null. Wegen der Kompaktheit von B existiert daher ein Punkt p von B, für welchen sich in jeder Umgebung ein Tripel der Folge $\{T_{k_n}\}$ befindet; d. h. es existiert ein Punkt p von B, für welchen in jeder Umgebung Punktetripel mit Krümmungsradien $\leqq R$ sich befinden. Dann kann aber B in diesem Punkte p nicht die Krümmung 0 (d. h. den Krümmungsradius ∞) besitzen, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß B in jedem Punkte verschwindende Krümmung besitzt. Die Annahme von der Ungültigkeit der Beziehung (**) führt somit zu einem Widerspruch, womit (**) bewiesen ist.

Mit Rücksicht auf (*) und (**) gilt

$$\lim_{n=\infty} n \cdot \arcsin \frac{l(n)}{2\varrho(n)} = 0 .$$

Für jedes hinreichend große n ist also

$$n \cdot \arcsin \frac{l(n)}{2\varrho(n)} \leqq \pi ,$$

d. h. für jedes hinreichend große n liegen die Punkte $p_0^n, p_1^n, \ldots, p_n^n$ auf einer Halbkreislinie und bestimmen daher einen geschlossenen konvexen Streckenzug. Damit ist, wenn n hinreichend groß ist, für die Punkte $b_0^n, b_1^n, \ldots, b_n^n$ und die entsprechenden Punkte der Ebene $p_0^n, p_1^n, \ldots, p_n^n$ neben den Voraussetzungen 1 und 2 auch die Voraussetzung 3 des Lemmas

von S. 486 erfüllt. Die Anwendung dieses Lemmas ergibt daher für alle hinreichend großen n die Beziehung $b_0^n b_n^n \geqq p_0^n p_n^n$, also, da für jedes n die Beziehungen $b_0^n = a$, $b_n^n = c$ bestehen, $ac \geqq p_0^n p_n^n$, und daher wegen (*)

$$ac \geqq 2\varrho(n) \cdot \sin\left[n \cdot \arcsin \frac{l(n)}{2\varrho(n)}\right].$$

Nun gilt mit Rücksicht auf (**) und auf die aus (***) sich ergebende Beziehung $\lim\limits_{n=\infty} n \cdot l(n) = l$

$$\lim_{n=\infty} 2\varrho(n) \cdot \sin\left[n \cdot \arcsin \frac{l(n)}{2\varrho(n)}\right] = l,$$

also ist $ac \geqq l$. Da der Abstand der Endpunkte eines Bogens unmöglich größer sein kann als die Länge des betreffenden Bogens, so muß in der letzteren Beziehung das Gleichheitszeichen gelten, und wir haben also festgestellt:

Für einen Bogen von endlicher Länge, der in jedem Punkte die Krümmung 0 besitzt, ist der Abstand der Endpunkte gleich der Länge. Ein solcher Bogen ist also, da die Strecke der einzige Bogen ist, für welchen Länge und Abstand der Endpunkte übereinstimmen, eine Strecke. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

7. Die Strecken unter den euklidischen Bogen überhaupt.

Die Beschränkung auf Bogen endlicher Länge kann bei der Kennzeichnung der Strecken unter den Bogen durch überall verschwindende Krümmung fallen gelassen werden, da, wie wir nun zeigen werden, *euklidische Bogen von unendlicher Länge mit überall verschwindender Krümmung nicht existieren*, mithin jeder euklidische Bogen überall verschwindender Krümmung von selbst eine endliche Länge hat und mit einer Strecke kongruent ist.

Sei B ein euklidischer Bogen von unendlicher Länge. Wir machen die Annahme, daß die Krümmung von B in jedem Punkt verschwinde, und leiten aus dieser Annahme einen Widerspruch her. Wir geben wieder eine natürliche Zahl n vor, bilden ein n-Gitter $b_0^n, b_1^n, \ldots, b_n^n$ von B, dessen konsekutive Punkte den Abstand $l(n)$ haben mögen. Wir setzen wieder $\varrho(n)$ gleich dem kleinsten Krümmungsradius von drei aufeinanderfolgenden Punkten des n-Gitters, betrachten eine Kreislinie der Ebene mit dem Radius $\varrho(n)$ und tragen auf ihr $n+1$ Punkte $p_0^n, p_1^n, \ldots, p_n^n$ auf, von denen je zwei aufeinanderfolgende den Abstand $l(n)$ haben. Der Abstand des ersten und letzten dieser Punkte ist $2\varrho(n) \cdot \sin\left[n \cdot \arcsin \frac{l(n)}{2\varrho(n)}\right]$. Wir setzen nun, falls $n \cdot \arcsin \frac{l(n)}{2\varrho(n)} \leqq \pi$ gilt, $m_n = n$, und falls $\nu \cdot \arcsin \frac{l(n)}{2\varrho(n)} < \pi \leqq (\nu+1) \cdot \arcsin \frac{l(n)}{2\varrho(n)}$ gilt, wo $\nu < n$ ist, $m_n = \nu$. Wir

betrachten sodann für jedes n den Punkt $p^n_{m_n}$ auf der Kreislinie und den entsprechenden Punkt $b^n_{m_n}$ des n-Gitters von B. Die Anwendung des Lemmas von S. 486, welche möglich ist wegen der Wahl von m_n, der zufolge die Punkte $p^n_0, \ldots, p^n_{m_n}$ sicherlich einen konvexen Streckenzug bilden, ergibt

$$(*) \qquad b^n_0 b^n_{m_n} \geqq p^n_0 p^n_{m_n}.$$

Nun ist, wie man leicht bestätigt, $\lim_{n=\infty} p^n_0 p^n_{m_n} = \infty$, woraus wegen (*) folgt, daß der Bogen B Punktepaare von beliebig großem Abstand enthält. Dies ist wegen der Kompaktheit von B unmöglich. Die Annahme hat also zu einem Widerspruch geführt, womit die eingangs erwähnte Behauptung bewiesen ist.

8. Ausblicke.

Nachdem wir in den vorangehenden Abschnitten einen rein metrischen Beweis für die Kennzeichnung der Strecken unter den euklidischen Bogen durch Ungekrümmtheit gegeben haben, wenden wir uns der im Abschnitt 4 formulierten Frage nach den diese Kennzeichnung gewährleistenden metrischen Eigenschaften euklidischer Räume zu. Eine Analyse der durchgeführten Überlegungen ergibt vor allem, daß die Euklidizität des Raumes lediglich durch die Verwendung des Lemmas von Abschnitt 4 in den Beweis eingeht. In einem metrischen Raum, für welchen (so wie für euklidische Räume) dieses Lemma gültig ist, sind also die mit Strecken kongruenten Bogen durch Ungekrümmtheit gekennzeichnet.

Welche Eigenschaften euklidischer Räume wurden nun zum Beweise dieses Lemmas herangezogen? Es geht in den Beweis der Begriff des *Winkels* ein, welcher in metrischen Räumen im allgemeinen nicht definiert ist. Die rein metrische Begründung der Lehre von den Winkeln wird Gegenstand einer der folgenden Untersuchungen über allgemeine Metrik sein. Hier sei bloß als Ergebnis einer Analyse des Beweises des Lemmas erwähnt, daß zu seiner Gültigkeit lediglich Beziehungen zwischen den euklidischen Punkte*quadrupeln* erforderlich sind. Ist in einer Menge ein Abstand definiert, d. h. je zwei Punkten p und q eine Zahl $pq = qp < 0$ für $p \neq q$ und $= 0$ für $p = q$ zugeordnet, so ist, damit durch die Formel von Abschnitt 1 dieses Kapitels *eine* (reelle) *Krümmung erklärt* werden könne, die Gültigkeit der Dreiecksungleichung maßgebend, welche die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß *je drei Punkte* der Menge mit drei Punkten eines euklidischen Raumes kongruent seien. Damit unter den Bogen des Raumes die mit einer *Strecke* kongruenten *durch verschwindende Krümmung gekennzeichnet* seien, ist die Gültigkeit des

Lemmas hinreichend, welches dadurch gewährleistet wird, daß *je vier Punkte des Raumes kongruent* mit vier Punkten eines euklidischen Raumes sind. Bereichnen wir für k Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_k$ mit $D(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (p_i p_j)^2 \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

so sind drei Punkte p_1, p_2, p_3 mit drei Punkten eines euklidischen Raumes (und zwar einer Ebene) dann und nur dann kongruent, wenn $D(p_1, p_2, p_3) = 0$ gilt, und es sind vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 eines metrischen Raumes dann und nur dann mit vier Punkten eines euklidischen Raumes (und zwar eines R_3) kongruent, wenn $D(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$ gilt. (Vgl. die zweite Untersuchung über allgemeine Metrik, Math. Annalen **100**.)

Es sei endlich zum Abschluß darauf hingewiesen, daß auch zahlreiche andere Probleme der Differentialgeometrie der Kurven mit Hilfe der im Vorangehenden entwickelten Methoden eine allgemeine, von Differenzierbarkeitsvoraussetzungen freie metrische Behandlung gestatten, insbesondere jene Fragen, welche sich auf Kurven konstanter Krümmung beziehen.

III. Zur Theorie der geodätischen Bogen.

1. Die Existenz geodätischer Bogen in metrischen Räumen.

Es seien zwei Punkte a und c eines metrischen Raumes vorgelegt, welche durch mindestens einen Bogen von endlicher Länge verbunden sind. Wir bezeichnen mit $\gamma(a, c)$ die untere Schranke der Längen aller a und c verbindenden Bogen des Raumes, nennen diese Zahl den *geodätischen Abstand der Punkte a und c* und bezeichnen jeden a und c verbindenden Bogen, dessen Länge $= \gamma(ac)$ ist, als einen *geodätischen Bogen* zwischen a und c. Wir behaupten:

Zu je zwei Punkten eines kompakten metrischen Raumes, welche durch einen Bogen endlicher Länge verbunden sind, existiert ein sie verbindender geodätischer Bogen, mit andern Worten in einem kompakten Raum wird die untere Schranke der Längen aller zwei Punkte verbindender Bogen von einem Bogen tatsächlich erreicht.

Zu dem im wesentlichen nach Hilberts Methode erfolgenden Beweise geben wir zwei Punkte a und c eines kompakten Raumes R vor und setzen der Kürze halber $\gamma(a, c) = \gamma$. Um einen a und c verbindenden Bogen der Länge γ zu konstruieren, wählen wir vor allem eine Folge $\{B_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) von a und c verbindenden Bogen, deren Längen gegen γ konvergieren. Dabei können wir annehmen, daß die Länge von B_n für jedes natürliche n der Beziehung genügt $\gamma \leqq l(B_n) \leqq \gamma + \frac{1}{n}$.

Es sei b_n ein Punkt von B_n. Wenn das Verhältnis der Länge des durch b_n bestimmten Bogenabschnittes zwischen a und b_n zur Länge von B_n gleich der reellen Zahl r ist $(0 < r < 1)$, und folglich das Verhältnis der Länge des Bogenabschnittes zwischen b_n und c zur Länge von B_n gleich $1 - r$ ist, — dann bezeichnen wir den Punkt b_n mit $b_n(r)$.

Wir betrachten nun die Punkte $b_n(\frac{1}{2})$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.). Wegen der Kompaktheit des Raumes existiert ein Punkt $b(\frac{1}{2})$ des Raumes, für welchen in jeder Umgebung für unendlichviele natürliche Zahlen n ein Punkt $b_n(\frac{1}{2})$ liegt. Es existiert also eine Teilfolge der Folge $\{B_n\}$, die wir mit $\{B_n^1\}$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) bezeichnen wollen, so daß die Mittelpunkte $b_n^1(\frac{1}{2})$ von B_n^1 gegen $b(\frac{1}{2})$ konvergieren.

Angenommen, es seien bereits den Zahlen $\frac{k}{2^m}$ $(1 \leqq k \leqq 2^m - 1)$ Punkte $b\left(\frac{k}{2^m}\right)$ zugeordnet und eine Teilfolge $\{B_n^m\}$ $(n = 1, 2, \ldots,$ ad inf.) von $\{B_n\}$ bestimmt derart, daß in jeder Umgebung jedes der Punkte $b\left(\frac{k}{2^m}\right)$ $(1 \leqq k \leqq 2^m - 1)$ für unendlichviele n die Punkte $b_n^m\left(\frac{k}{2^m}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) liegen, wo $b_n^m(r)$ jenen Punkt von B_n^m bezeichnet, für welchen die Länge des zwischen ihm und a eingeschlossenen Abschnittes von B_n^m zur Länge des ganzen Bogens B_n^m sich verhält, wie r zu 1. Wir sondern sodann aus der Folge $\{B_n^m\}$ eine Teilfolge $\{B_n^{m+1}\}$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) aus, für welche die Punkte $b_n^{m+1}\left(\frac{k}{2^{m+1}}\right)$ gegen Punkte $b\left(\frac{k}{2^{m+1}}\right)$ des Raumes konvergieren $(1 \leqq k \leqq 2^{m+1} - 1)$. Indem wir durch vollständige Induktion dieses Verfahren für jedes natürliche m fortsetzen, erhalten wir insgesamt für jede dyadisch rationale Zahl d zwischen 0 und 1 einen Punkt $b(d)$ des Raumes, für welchen in jeder Umgebung für unendlichviele natürliche Zahlen die Punkte $b_n(d)$ von B_n liegen.

Es ist damit eine Abbildung der Menge aller dyadisch rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 auf eine Menge des Raumes gegeben. Wir behaupten, daß diese Abbildung *gleichmäßig stetig* ist. Sei nämlich eine Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben und seien d und d' irgendzwei dyadisch rationale Zahlen, für welche $|d - d'| < \delta$ gilt, wo δ eine noch zu bestimmende Zahl > 0 ist. Wir wählen n^* so groß, daß $\frac{1}{n^*} < \frac{\varepsilon}{8}$ ist. Dann hat für jeden Bogen B_n, für den $n > n^*$ gilt, weil seine Länge $< \gamma + \frac{1}{n}$ ist, der Abschnitt zwischen den Punkten $b_n(d)$ und $b_n(d')$ offenbar eine Länge $\leqq |d - d'| \cdot \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{8}\right)$. Wir wählen n überdies so groß, daß die Punkte $b_n(d)$ und $b(d)$, sowie die Punkte $b_n(d')$ und $b(d')$ Abstände $< \frac{\varepsilon}{8}$ haben. Dann ergibt sich unter Berücksichtigung des Umstandes, daß der Abstand der

Punkte $b_n(d)$ und $b_n(d')$ sicherlich nicht größer ist, als die Länge eines sie verbindenden Bogens, durch Anwendung der Dreiecksungleichung, daß die Punkte $b(d)$ und $b(d')$ einen Abstand

$$\leqq |d-d'|\cdot\left(\gamma+\frac{\varepsilon}{8}\right)+\frac{\varepsilon}{4}\leqq|d-d'|\cdot\gamma+\frac{3}{8}\varepsilon$$

haben. Der letztere Ausdruck wird aber $<\varepsilon$, wenn $\delta<\frac{5\varepsilon}{8\gamma}$ gewählt wird. Wir sehen daher: Für je zwei dyadisch rationale Zahlen d uud d', für welche $|d-d'|<\frac{5\varepsilon}{8\gamma}$ gilt, haben die zugeordneten Punkte $b(d)$ und $b(d')$ einen Abstand $<\varepsilon$.

Da die Abbildung der Menge der dyadisch rationalen Zahlen des Einheitsintervalles J auf eine Teilmenge des kompakten Raumes R gleichmäßig stetig ist, läßt sie sich zu einer stetigen Abbildung von J auf eine Teilmenge S von R erweitern. Bei derselben werden offenbar die Zahlen 0 und 1 auf die Punkte a und c abgebildet.

Wir bestimmen nun die zu dieser Abbildung von J auf S gehörige Durchlaufungslänge des stetigen Streckenbildes S und behaupten, wenn wir dieselbe mit $l(S)$ bezeichnen, die Beziehung $l(S)\leqq\gamma$. Wir machen also die Annahme, es gelte $l(S)=\gamma+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ und leiten aus dieser Annahme einen Widerspruch her.

Wenden wir Satz II' von S. 472 an, indem wir die dort auftretende Zahl η durch $\frac{\varepsilon}{2}$ ersetzen, so ergibt sich aus der Annahme: Es existiert ein $\delta>0$ derart, daß für jede in J δ-dichte Menge E die Beziehung gilt $l(E,S)>\gamma+\frac{\varepsilon}{2}$. Ein Widerspruch aus unserer Annahme ist also hergeleitet, wenn wir beweisen: Für jedes $\delta>0$ existiert eine in J δ-dichte Menge E, für welche $l(E,S)\leqq\gamma+\frac{\varepsilon}{2}$ gilt.

Sei irgendeine Zahl $\delta>0$ gegeben. Wir wählen n^* so groß, daß $\frac{\gamma}{2^{n^*}}<\frac{\delta}{2}$ gilt. Dann ist die Menge E, bestehend aus den Zahlen $\frac{k}{2^{n^*}}$ $(1\leqq k\leqq 2^{n^*}-1)$, in J δ-dicht. Wir behaupten ferner: Es gilt $l(E,S)<\gamma+\frac{\varepsilon}{2}$. Zu diesem Zweck bestimmen wir die ganze Zahl n so groß, daß erstens $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{4}$ gilt (so daß also jeder Bogen B_m, für den $m>n$ gilt, eine Länge $<\gamma+\frac{\varepsilon}{4}$ besitzt) und zweitens so groß, daß jeder der Punkte $b\left(\frac{k}{2^{n^*}}\right)$ vom entsprechenden Punkte $b_n\left(\frac{k}{2^{n^*}}\right)$ einen Abstand $<\frac{\varepsilon}{2^{n^*+3}}$ hat $(1\leqq k\leqq 2^{n^*}-1)$. Berücksichtigen wir, daß der Abstand der Punkte $b_n\left(\frac{k}{2^{n^*}}\right)$ und $b_n\left(\frac{k+1}{2^{n^*}}\right)$ nicht größer ist, als die Länge des sie verbindenden Abschnittes des

Bogens B_n, so ergibt sich durch Verwendung der Dreiecksungleichung, daß die Punkte $b\left(\frac{k}{2^{n^*}}\right)$ und $b\left(\frac{k+1}{2^{n^*}}\right)$ einen Abstand

$$\leqq \frac{1}{2^{n^*}}\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{4}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2^{n^*+3}} = \frac{1}{2^{n^*}}\gamma + \frac{\varepsilon}{2^{n^*-1}} \quad (1 \leqq k \leqq 2^{n^*} - 1)$$

haben. Demnach ist

$$l(E, S) = \sum_{k=1}^{2^{n^*}-2} b\left(\frac{k}{2^{n^*}}\right) b\left(\frac{k+1}{2^{n^*}}\right) \leqq \gamma + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit ist aus der Annahme $l(S) = \gamma + \varepsilon$ ein Widerspruch hergeleitet, d. h. bewiesen, daß $l(S) \leqq \gamma$ ist.

Die Menge S enthält als ein die Punkte a und c enthaltendes stetiges Streckenbild einen diese beiden Punkte verbindenden Bogen B. Da S eine Durchlaufungslänge γ besitzt, hat B als Teilbogen von S nach dem Satz von S. 473 eine Länge $\leqq \gamma$. Andererseits kann die Länge von B nicht $< \gamma$ sein, weil γ nach Definition die untere Schranke der Längen aller a und c verbindenden Bogen ist. Daher ist B ein a und c verbindender Bogen der Länge γ, also ein geodätischer Bogen, womit das Existenztheorem bewiesen ist.

Man kann übrigens auf Grund der Tatsache, daß eine Durchlaufungslänge des stetigen Streckenbildes S gleich γ ist, beweisen, daß S *selbst* ein Bogen, also ein geodätischer Bogen ist, daß demnach der erhaltene geodätische Bogen Limes der Minimalfolge $\{B_n\}$ ist.

2. Ein geodätischer Zwischenbegriff. Geodätische Metrisierung.

Sind a, b, c drei paarweise verschiedene Punkte eines metrischen Raumes derart, daß b auf einem a und c verbindenden geodätischen Bogen liegt, dann nennen wir b einen *geodätischen Zwischenpunkt* von a und c und schreiben hierfür kurz abc. Es gilt abc offenbar dann und nur dann, wenn die Beziehung $\gamma(ab) + \gamma(bc) = \gamma(ac)$ besteht.

Offenbar ist abc *erstens* gleichbedeutend mit cba, dagegen *zweitens* unverträglich mit jeder der Beziehungen acb, bca, bac, cab. Nehmen wir nämlich etwa an, es liege b auf einem geodätischen Bogen B zwischen a und c, dessen Länge β sei, und es liege gleichzeitig c auf einem geodätischen Bogen B' zwischen a und b, dessen Länge γ sei. Dann betrachten wir den Abschnitt zwischen a und c auf B. Seine Länge sei β'. Da β die Länge eines geodätischen Bogens zwischen a und c sein soll, gilt $\beta' \leqq \beta$, also $\beta \leqq \beta' < \gamma$. Es bezeichne ferner γ' die Länge des Abschnittes zwischen a und b auf B'. Dann gilt $\gamma \leqq \gamma' < \beta$, womit der Widerspruch hergestellt ist.

Drittens folgen aus abc und acd die Beziehungen abd und bcd. Setzen wir nämlich voraus, es gelte abc und abd. Wegen abc existiert ein Bogen D zwischen a und c, der den Punkt b enthält. Es sei A' der Abschnitt von D zwischen a und b, C' der Abschnitt von D zwischen b und c. Dann gilt $l(A') + l(C') = l(D)$. Wegen acd existiert ein geodätischer Bogen B zwischen a und d, der den Punkt c enthält. Es sei A'' der Abschnitt von B zwischen a und c, D'' der Abschnitt von B zwischen c und d. Dann gilt $l(A'') + l(D'') = l(B)$ und $l(A'') = l(D)$. Um etwa die Beziehung bcd zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß die Menge $C' + D''$ ein geodätischer Bogen zwischen b und d ist. Um dies zu zeigen, genügt der Nachweis, daß für jeden Bogen A zwischen b und d die Beziehung gilt $l(A) \geqq l(C') + l(D'')$. Angenommen nun, für einen Bogen A zwischen b und d würde $l(A) < l(C') + l(D'')$ gelten, so betrachten wir die Menge $A + A'$. Sie enthält einen Bogen B' zwischen a und d, für welchen

$$l(B') \leqq l(A) + l(A') < l(C') + l(D'') + l(A') = l(D) + l(D'')$$
$$= l(A'') + l(D'') = l(B),$$

also $l(B') < l(B)$ gilt, im Widerspruch zur Annahme, daß B ein geodätischer Bogen zwischen a und d sei.

Wir haben damit einen geodätischen Zwischenbegriff für Punktetripel beliebiger metrischer Räume definiert, welcher dieselben formalen Eigenschaften besitzt, wie der in der ersten metrischen Untersuchung auf Grund der Dreiecksungleichung eingeführte Zwischenbegriff, demzufolge der Punkt b Zwischenpunkt von a und c heißt, wenn $ab + bc = ac$ gilt. In einem konvexen vollständigen metrischen Raum stimmen Zwischenbegriff und geodätischer Zwischenbegriff offenbar überein, da in einem solchen Raum je zwei Punkte durch einen Bogen verbunden sind, dessen Länge gleich dem Abstand der beiden Punkte ist, so daß Abstand und geodätischer Abstand für je zwei Punkte eines konvexen metrischen Raumes identisch sind.

Ist R ein metrischer Raum, in dem je zwei Punkte durch einen Bogen endlicher Länge verbunden sind, dann entsteht, wenn wir je zwei Punkten des Raumes die Länge eines sie verbindenden geodätischen Bogens als geodätischen Abstand zuordnen, ein neuer metrischer Raum R_γ, der, wie wir sagen wollen, *aus R durch geodätische Metrisierung hervorgeht*. In der Tat, je zwei Punkten von R ist eine reelle Zahl als geodätischer Abstand zugeordnet, da nach Voraussetzung je zwei Punkte von R durch einen Bogen endlicher Länge und daher auch durch einen geodätischen Bogen verbunden sind. Der geodätische Abstand zweier Punkte p und q ist dann und nur dann 0, wenn $p = q$ gilt, andernfalls ist er positiv; denn für je zwei Punkte ist der geodätische Abstand mindestens so groß, wie der Abstand. Der geodätische Abstand genügt der Dreiecksungleichung;

sind p, q, r drei Punkte von R, so ist die Länge eines geodätischen Bogens zwischen p und r höchstens so groß, wie die Summe der Längen eines geodätischen Bogens zwischen p und q und eines zwischen q und r; wäre sie nämlich größer, so enthielte die Summe der genannten Bogen einen kürzeren Bogen zwischen p und r, im Widerspruch zur Definition eines geodätischen Bogens.

Ist R ein metrischer Raum, in dem je zwei Punkte durch einen Bogen endlicher Länge verbunden sind, so ist der aus R durch geodätische Metrisierung hervorgehende Raum *konvex*. Sind nämlich p und q irgend zwei Punkte von R_γ, die in R_γ den Abstand d haben, so enthält R einen Bogen B zwischen p und q, dessen Länge d ist. In R_γ ist B ein p und q verbindender Bogen, der mit einer Strecke der Länge d kongruent ist, und jeder Punkt von B ist Zwischenpunkt von p und q im Sinne der ersten metrischen Untersuchung (und überdies auch geodätischer Zwischenpunkt von p und q). Für einen konvexen vollständigen Raum R ist R_γ mit R identisch. Ist R ein Raum, in dem je zwei Punkte durch einen Bogen endlicher Länge verbunden sind, so läßt sich zeigen, daß $(R_\gamma)_\gamma = R_\gamma$ gilt.

Der Raum R_γ muß nicht mit R homöomorph sein. Zwar folgt daraus, daß der Abstand zweier Punkte in R_γ niemals kleiner ist als ihr Abstand in R, der Satz: Für jede gegen einen Punkt p konvergente Punktefolge $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots \text{ad inf.})$ in R_γ konvergiert die entsprechende Punktefolge in R gegen den p entsprechenden Punkt. Aber das Umgekehrte ist nicht notwendig richtig. Betrachten wir beispielsweise in der Ebene eine Menge M bestehend aus den Punkten von abzählbarvielen Bogen, die sämtlich die Länge 1 haben und einen Punkt p enthalten, sonst aber fremd sind und p mit den Punkten einer gegen p konvergenten Punktefolge $\{p_n\}$ verbinden. Diese Menge ist kompakt. Der aus ihr durch geodätische Metrisierung hervorgehende Raum aber ist nicht kompakt, weil die Punktefolge $\{p_n\}$ in ihm keinen Häufungspunkt besitzt, also mit der Menge M nicht homöomorph.

3. Verbiegungsgleichheit metrischer Räume.

Es sei ein Bogen B eines metrischen Raumes vorgelegt. E sei eine endliche Teilmenge von B, bestehend etwa aus n Punkten, welche in jener Reihenfolge, in der sie bei der Durchlaufung von B angetroffen werden, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ heißen mögen. Es bezeichne $\gamma(p_i p_k)$ den geodätischen Abstand der Punkte p_i und p_k. Wir setzen dann $\gamma(E, B) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(p_i p_{i+1})$ und bezeichnen als *geodätische Länge* von B die Zahl $\gamma(B) = \underset{E \subset B}{\text{o.S.}}\, \gamma(E, B)$, wo E alle endlichen Teilmengen von B durchläuft. Es gilt dann der

Satz. *Für jeden Bogen eines metrischen Raumes sind die Bogenlänge und die geodätische Bogenlänge identisch.*

Erstens gilt $l(B) \leqq \gamma(B)$. Denn da der Abstand zweier Punkte nicht größer sein kann als ihr geodätischer Abstand, so gilt für jede endliche Teilmenge E von B die Beziehung $l(E, B) \leqq \gamma(E, B)$, woraus durch Übergang zur oberen Schranke der erste Teil der Behauptung folgt.

Zweitens gilt $\gamma(B) \leqq l(B)$. Da $\gamma(B)$ die obere Schranke der Zahlen $\gamma(E, B)$ für alle endlichen Teilmengen von B ist, genügt es zu zeigen, daß für jede endliche Teilmenge E von B die Beziehung gilt $\gamma(E, B) \leqq l(B)$. Sei nun E eine endliche Teilmenge von B, etwa bestehend aus n Punkten, welche in jener Reihenfolge, in der sie bei der Durchlaufung von B angetroffen werden, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ heißen mögen. Es sei B_i der zwischen den Punkten p_i und p_{i+1} gelegene Abschnitt von B $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Die Länge von B_i sei $l(B_i)$. Dann gilt auf Grund der Definition des geodätischen Abstandes $\gamma(p_i p_{i+1}) \leqq l(B_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, also $\gamma(E, B) \leqq \sum_{i=1}^{n-1} l(B_i) = l(B)$, womit der zweite Teil der Behauptung und damit der Satz bewiesen ist.

Wir nennen zwei metrische Räume R und R' *verbiegungsgleich*, wenn zwischen ihnen eine längentreue Abbildung existiert, d. h. wenn es möglich ist, die Punkte der beiden Räume derart einander zuzuordnen, daß jedem Bogen von R (bzw. von R') ein gleichlanger Bogen von R' (bzw. von R) entspricht. Beispielsweise ist jeder Bogen von endlicher Länge l verbiegungsgleich mit einer Strecke der Länge l.

Wir nennen zwei metrische Räume R und R' *geodätisch kongruent*, wenn zwischen ihnen eine bogentreue, den geodätischen Abstand erhaltende Abbildung existiert, d. h. wenn es möglich ist, die Punkte der beiden Räume derart einander zuzuordnen, daß jedem Bogen von R (bzw. von R') ein Bogen von R' (bzw. von R) und je zwei Punkten von R (bzw. von R') zwei Punkte von R' (bzw. von R) mit gleichem geodätischen Abstand entsprechen.

Es gilt dann der

Satz. *Damit zwei metrische Räume, in denen je zwei Punkte durch einen Bogen von endlicher Länge verbunden sind, verbiegungsgleich seien, ist notwendig und hinreichend, daß sie geodätisch kongruent sind.*

Seien R und R' *erstens* verbiegungsgleich. Sind p und q irgend zwei Punkte eines der beiden Räume, etwa von R. Sie sind nach Annahme durch einen Bogen von endlicher Länge, also auch durch einen geodätischen Bogen endlicher Länge verbunden. Diesem geodätischen Bogen entspricht ein gleichlanger Bogen zwischen den Bildpunkten p' und q' von p und q in R'. Dieser Bogen muß auch in R' geodätisch sein. Also haben p' und q' denselben geodätischen Abstand wie p und q. Die beiden Räume sind also geodätisch kongruent.

Seien R und R' *zweitens* geodätisch kongruent und sei B irgendein Bogen endlicher Länge von einem der beiden Räume, etwa von R. Wegen der Identität von Länge und geodätischer Länge bleibt die Länge von B bei der den geodätischen Abstand erhaltenden Abbildung von R auf R' dem Bild von B erhalten. Also sind R und R' verbiegungsgleich, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

4. Beziehungen zu den klassischen Problemen.

Der Begriff des n-dimensionalen euklidischen Raumes in der Form, in der er der analytischen Geometrie zugrunde liegt (d. h. der Begriff der Menge aller geordneten n-Tupel von reellen Zahlen, für welche durch die pythagoreische Maßbestimmung ein Abstand definiert ist), dieser Begriff bietet zwei Ansatzpunkte für Abstraktionen dar, welche auch historisch in verschiedenen Etappen vollzogen worden sind.

Die erste Verallgemeinerung behält die Tatsache der arithmetischen Gegebenheit der Punkte als geordnete n-Tupel reeller Zahlen bei und abstrahiert bloß von der pythagoreischen Maßbestimmung, d. h. von der speziellen Art, in der der Abstand zweier Punkte mit den Koordinaten derselben zusammenhängt. Der Begriff des Riemannschen Raumes, die nichteuklidischen Maßbestimmungen usw. sind Ergebnisse dieser Abstraktion.

Die zweite radikalere Verallgemeinerung, welche auf Fréchet zurückgeht, abstrahiert auch von der arithmetischen Gegebenheit der Punkte. Die Punkte des Raumes auf dieser Abstraktionsstufe (die Punkte des „metrischen Raumes“) sind nicht mehr als n-Tupel reeller Zahlen gegeben, sondern als Elemente einer abstrakten Menge, in welcher je zwei Elementen p und q eine nichtnegative Zahl, der Abstand $pq = qp > 0$ für $p \neq q$ und $= 0$ für $p = q$ als Abstand zugeordnet ist. Da schon die Punkte nicht durch Koordinaten gegeben sind, kommt eine Erklärung des Abstandes mit Hilfe von Koordinaten natürlich überhaupt nicht in Frage.

Nach Durchführung einer jeden Abstraktion handelt es sich um eine Kennzeichnung des Ausgangsgegenstandes im erweiterten Bereich, in unserem Falle also um eine Charakterisierung der euklidischen Räume unter den Räumen im verallgemeinerten Sinne. Hinsichtlich der ersten Abstraktion wurde dieses Problem von Riemann gelöst. In einem Riemannschen Raum ist der Abstand nicht eine je zwei Punkten zugeordnete Zahl, vielmehr wird jedem Punkt des Raumes (d. h. jedem Koordinaten n-Tupel $x_1, x_2, \ldots, x_n$) eine symmetrische Zahlenmatrix $\|g_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ zugeordnet. Insgesamt ist also der Riemannsche Raum eine Menge von Zahlen n-Tupeln und eine symmetrische Matrix von n^2 Funktionen von n Variablen. Es sind ferner Rechenvorschriften gegeben, welche die Bestimmung des Abstandes von Punkten, von Winkelgrößen usw. aus dieser Matrix festlegen. Riemann

gab nun die für die euklidischen Räume charakteristischen Eigenschaften der Funktionenmatrix $\|g_{ik}\|$ an.

Die Kennzeichnung der euklidischen Räume auf der zweiten Abstraktionsstufe, d. h. unter den allgemeinen metrischen Räumen, bildete den Gegenstand der zweiten Untersuchung über allgemeine Metrik (Math. Annalen **100**). Bezeichnen wir, wenn k Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_k$ eines metrischen Raumes gegeben sind, mit $p_i p_j$ den Abstand der Punkte p_i und p_j und setzen wir

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (p_i p_j)^2 \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

wo die rechte Seite eine geränderte symmetrische $(k+1)$-reihige Determinante symbolisiert, so gilt das folgende Theorem: Damit ein vollständiger und (im Sinne der Konvexitätstheorie) konvexer metrischer Raum mit einem konvexen Körper des n-dimensionalen euklidischen Raumes kongruent sei, ist notwendig und hinreichend, daß für je $n+2$ Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}$ von R die Beziehung $D(p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}) = 0$ und für je k Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_k$, wo $2 \leqq k \leqq n+1$ ist, die Beziehung $\operatorname{sign} D(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \operatorname{sign}(-1)^k$ oder $= 0$ gilt.

Diese Kennzeichnung der euklidischen Räume unterscheidet sich von der Riemannschen in dreierlei Hinsicht: *Einerseits* ist sie allgemeiner, indem sie über die Natur der Punkte keinerlei Voraussetzungen macht, während die Riemannsche Kennzeichnung die Punkte als n-Tupel reeller Zahlen voraussetzt und durch ihre Formulierung diese Koordinatendarstellung der Punkte wesentlich verwendet. *Andererseits* ist sie spezieller als die Riemannsche Kennzeichnung, indem sich die zur allgemeinen Charakterisierung verwendeten Bedingungen auf den Abstand beliebiger Punktepaare beziehen, während Riemann lediglich Voraussetzungen über die Funktionenmatrix in den einzelnen Punkten (also *„lokale"* Voraussetzungen) macht. *Drittens* endlich liefert die neue Kennzeichnung Bedingungen für die *Kongruenz* mit euklidischen Räumen, die Riemannsche Kennzeichnung Bedingungen für die *Verbiegungsgleichheit* mit euklidischen Räumen.

Was den letztgenannten Unterschied betrifft, so läßt er sich auf Grund der im vorigen Abschnitt bewiesenen Identität von Verbiegungsgleichheit und geodätischer Kongruenz formal beheben, indem man je k Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ eines metrischen Raumes die Größe

$$D_\gamma(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \gamma^2(p_i p_j) \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

zuordnet, wo $\gamma(p_i p_j)$ den geodätischen Abstand von p_i und p_j bezeichnet. Für die Verbiegungsgleichheit eines metrischen Raumes mit einem euklidischen Raum sind dann nämlich jene Bedingungen charakteristisch, welche

aus den für die Kongruenz charakteristischen Bedingungen hervorgehen, wenn man in ihnen stets D durch D_γ ersetzt.

Der zweite Unterschied zwischen der neuen und der Riemannschen Kennzeichnung hingegen weist auf noch ungelöste schwierige Probleme hin. Es wäre diesbezüglich vor allem ein dem Begriff des Riemannschen Raumes analoger Begriff unter Abstraktion von der Koordinatendarstellung der Punkte aufzustellen. Die den Abstand auf Grund von Rechenvorschriften (Integrationen) definierende Matrix von n^2 Funktionen n Veränderlicher dürfte, sobald die Punkte nicht durch Koordinaten gegeben sind, also kein Variablenfeld vorliegt, keine direkte Verallgemeinerung zulassen, doch ließe sich eine Verallgemeinerung vielleicht auf die Tatsache stützen, daß im Riemannschen Raum je zwei Elementen gleichsam ein *ungefährer Abstand* zugeordnet ist. Innerhalb der zu erklärenden verallgemeinerten Riemannschen Räume wären dann die mit den euklidischen Räumen verbiegungsgleichen durch lokale Eigenschaften zu kennzeichnen.

Es sei zum Abschluß bemerkt, daß die in der vorliegenden Untersuchung behandelten Fragen der Differential- und Integralmetrik der Bogen naturgemäß Verallgemeinerungen für höhere Dimensionen besitzen, zumal über Inhalt und Krümmung von Flächen, welche in späteren Aufsätzen behandelt werden sollen.

(Eingegangen am 16. 11. 1929.)

Herrn Dr. G. Bergmann bin ich für mehrere in den Korrekturen dieser Arbeit vorgenommene Verbesserungen zu Dank verpflichtet.

Über die ebenen reduziblen Kurven gegebener Klasse vom Maximalklassenindex mit der Maximalanzahl ineinander liegender Ovale.

Von

Julius v. Sz. Nagy in Szeged (Ungarn).

1. Einleitung.

In einer vorigen Annalenarbeit[1]) habe ich unter anderem bewiesen, daß eine ebene Kurve $3k-1$-ter, $3k$-ter oder $3k+1$-ter Ordnung vom Maximalindex höchstens k im Endlichen liegende Ovale haben kann, und ich habe die Existenz solcher Kurven vom Maximalindex für jede positive ganze Zahl bewiesen. Mit der Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Arten von diesen Kurven habe ich mich dort nicht beschäftigt.

Herr H. Mohrmann hat sich in einer Annalenarbeit[2]) die Aufgabe gestellt, die möglichen Arten der Kurven vom Maximalindex mit der Maximalanzahl der im Endlichen liegenden Ovale zu bestimmen. Die Anzahl der möglichen Arten dieser Kurven $3k+1$-ter Ordnung ist nach Herrn Mohrmann $2k^2+1$. Die Klassifikation von Herrn Mohrmann ist aber nicht vollständig. Die genaue Anzahl der verschiedenen Arten dieser Kurven $3k+1$-ter Ordnung vom Maximalindex mit k im Endlichen liegenden Ovalen ist $2k^2+k$ (wenn jeder Zug der Kurven von Geraden abweicht).

Das duale Problem ist: die wesentlich verschiedenen ebenen Kurven $3k-1$-ter, $3k$-ter und $3k+1$-ter Klasse vom Maximalklassenindex mit k ineinander liegenden Ovalen darzustellen. Dieses Problem läßt sich auf viel übersichtlichere Weise erledigen als das entsprechende Problem für die Kurven vom Maximalindex.

---

[1]) „Über Kurven vom Maximal-Klassenindex. Über Kurven vom Maximalindex", Math. Annalen **89** (1923), S. 32–75; **90** (1923), S. 152–153. Diese Arbeit wird im folgenden mit A zitiert.

[2]) „Reduzible Kurven vom Maximalindex", Math. Annalen **92** (1924), S. 58–68.

Wir fassen dabei zwei ebene Kurven derselben Klasse vom Maximalklassenindex ohne Wendetangente als äquivalent (nicht wesentlich verschieden) auf, wenn sich ihre Züge so aufeinander beziehen lassen, daß die Klassen und ähnlicherweise die Anzahlen der Spitzen für je zwei entsprechende Züge der zwei Kurven dieselben sind und daß die gegenseitige Lage je zweier Züge der einen Kurve mit der gegenseitigen Lage der entsprechenden zwei Züge der anderen Kurve übereinstimmt.

Da sich zwei Züge einer ebenen Kurve vom Maximalklassenindex ohne Wendepunkt nicht durchsetzen können, bestehen für die gegenseitige Lage zweier Züge Z_1 und Z_2 einer solchen Kurve drei Möglichkeiten: Die Züge Z_1 und Z_2 können entweder außerhalb voneinander liegen, d. h. die von ihnen begrenzten einfach zusammenhängenden ebenen Gebiete T_1 und T_2 keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Oder der Zug Z_1 liegt innerhalb des Zuges Z_2, d. h. das Gebiet T_1 ist ein Teil des Gebietes T_2. Oder der Zug Z_2 liegt innerhalb des Zuges Z_1.

(Es ist leicht einzusehen, daß zwei äquivalente ebene Kurven derselben Klasse vom Maximalklassenindex ohne Wendepunkt sich durch zentrale Projektion und durch solche stetige Deformationen in der Ebene, wodurch die Klasse, die Klassenindizes und die Anzahlen der Spitzen der Züge unverändert bleiben, ohne Selbstdurchdringung ineinander überführen lassen.)

Ich habe das Geschlecht einer Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex mit dem Zusammenhange des zugehörigen (negativen) Gebietes T der Ebene definiert[3]), aus dessen Punkten $n-2$ Tangenten an die Kurve gezogen werden können. Zerfällt das Gebiet T in die zusammenhängenden Gebiete $T_1, T_2, \ldots, T_s$ mit den Zusammenhangszahlen $p_1+1, p_2+1, \ldots, p_s+1$, so ist $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_s - s + 1$ das Geschlecht der Kurve. Die Züge der Kurve C n-ter Klasse, von denen das Gebiet T_h $(h = 1, 2, \ldots, s)$ begrenzt wird, bilden eine irreduzible Kurve C_h n_h-ter Klasse vom Maximalklassenindex. Die Kurve C zerfällt in die irreduziblen Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_h$, weil $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h$ ist[4]).

Bedeutet n eine der Zahlen $3k-1$, $3k$ und $3k+1$, und bezeichnet Γ_n eine Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex mit der Maximalanzahl (k) der ineinander liegenden Ovale, so ist das Geschlecht der Kurven Γ_{3k-1} 0. Die Geschlechter der Kurven Γ_{3k} bzw. Γ_{3k+1} sind 1 oder 0 bzw. 2, 1, 0 oder -1.

Hinsichtlich der Geschlechter bilden also die Kurven Γ_{3k-1} eine Gattung, die Kurven Γ_{3k} bzw. Γ_{3k-1} bilden aber zwei bzw. vier Gattungen.

[3]) Vgl. A, S. 69–70.

[4]) A, S. 65.

Zwei Kurven Γ_n (derselben Klasse) von demselben Geschlechte können voneinander wesentlich abweichen, sie haben aber dieselbe Anzahl der Spitzen und dieselbe Anzahl der Doppeltangenten. Haben zwei Kurven Γ_n (derselben Klasse) verschiedene Geschlechter, so weichen auch die Anzahlen der Spitzen bzw. die Anzahlen der Doppeltangenten für die zwei Kurven voneinander ab, so daß die Klassifikation der Kurven Γ_n nach der Anzahl der Spitzen bzw. der Doppeltangenten mit der Klassifikation nach den Geschlechtern übereinstimmt.

2. Die Kurven Γ_{3k-1}.

Eine im Endlichen liegende einzügige ebene Kurve vom Maximalklassenindex wird im folgenden eine konkave bzw. konvexe Kurve genannt werden, je nachdem ihr Geschlecht 1 bzw. 0 ist, weil man aus den unendlich fernen Punkten der Ebene die konkave Seite einer konkaven Kurve und die konvexe Seite einer konvexen Kurve erreichen kann. Die zentralen Projektionen einer konkaven bzw. konvexen Kurve werden ebenfalls konkave bzw. konvexe Kurven genannt werden.

Jede Kurve Γ_{3k-1} ($3k-1$-ter Klasse vom Maximalklassenindex mit k ineinander liegenden Ovalen) läßt sich dann auf folgende Weise erzeugen[5]):

Man legt in das Innere eines Ovales eine konkave Kurve dritter Klasse, in das Innere dieser konkaven Kurve ein Oval, in das Innere dieses Ovales eine konkave Kurve dritter Klasse usw. und endlich in das Innere der innersten ($k-1$-ten) konkaven Kurve dritter Klasse das letzte (k-te) Oval. In einem zwischen zwei Ovalen liegenden Gebiete der Ebene muß es wenigstens eine konkave Kurve geben, durch welche die Ovale voneinander getrennt werden. Andernfalls könnte man die Kurve Γ_{3k-1} nacheinander zweimal von der konkaven Seite nach der konvexen überschreiten und die Kurve Γ_{3k-1} wäre also nicht vom Maximalklassenindex.

Aus dieser Konstruktion folgt, daß es nur *eine* Art von Kurven Γ_{3k-1} gibt.

Die Anzahl der negativen Gebiete der Ebene (d. h. der Gebiete, aus deren Punkten $3k-3$ Tangenten an die Kurve Γ_{3k-1} gelegt werden können) ist k. Das innerhalb des innersten Ovales liegende Gebiet T_k ist einfach zusammenhängend, die übrigen $k-1$ negativen Gebiete $T_1, T_2, \dots, T_{k-1}$ sind von einem Ovale und von einer konkaven Kurve dritter Klasse begrenzt, sie sind zweifach zusammenhängend. Die Kurve Γ_{3k-1} ist also vom Geschlechte 0, sie zerfällt in ein Oval und in $k-1$ zweizügige Kurven dritter Klasse.

[5]) A, S. 61.

Es gilt also der folgende Satz:

I. *Es gibt nur eine Art von Kurven* Γ_{3k-1} $3k-1$*-ter Klasse vom Maximalklassenindex mit* k *ineinander liegenden Ovalen. Jede Kurve* Γ_{3k-1} *ist vom Geschlechte* 0 *und zerfällt in ein Oval und in* $k-1$ *zweizügige Kurven dritter Klasse.*

3. Die Kurven Γ_{3k}.

1. Legt man in das eine negative Gebiet T_h $(h=1,2,\ldots,k)$, das zu einer Kurve Γ_{3k-1} gehört, eine k-te konkave Kurve dritter Klasse (von der kein Zug von Γ_{3k-1} umschlossen wird), so erhält man eine Kurve Γ_{3k}^1 vom Geschlechte 1. Durch diese k-te konkave Kurve dritter Klasse wird nämlich die Klasse der Kurve Γ_{3k-1} und zugleich der Zusammenhang des Gebietes T_h um 1 vermehrt, die Anzahl der negativen Gebiete bleibt aber unverändert.

Man erhält k verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k}^1 (vom Geschlechte 1), je nachdem $h=1,2,\ldots,k$ ist. Nimmt man die k-te konkave Kurve dritter Klasse innerhalb des innersten Ovales $(h=k)$ an, so ist jedes der k negativen Gebiete, die der betreffenden Kurve Γ_{3k-1} angehören, zweifach zusammenhängend. Ist aber $h \neq k$, so ist eines der k negativen Gebiete einfach zusammenhängend, ein anderes, das von einem Ovale und von zwei konkaven Kurven begrenzt wird, ist dreifach und die übrigen $k-2$ negativen Gebiete sind zweifach zusammenhängend.

2. Ersetzt man eine der $k-1$ konkaven Kurven dritter Klasse einer Kurve Γ_{3k-1} durch eine konkave Kurve vierter Klasse, so erhält man eine Kurve Γ_{3k}^0 vom Geschlechte 0. Die Anzahl der Arten dieser Kurven Γ_{3k}^0 (vom Geschlechte 0) ist also $k-1$.

Es ist leicht zu beweisen, daß die so erhaltenen $2k-1$ Arten der Kurven Γ_{3k} die möglichen Arten der Kurven Γ_{3k} erschöpfen.

Eine Kurve Γ_{3k} hat wenigstens $k-1$ konkave Kurven, von denen die k ineinander liegenden Ovale in der Ebene getrennt werden. Aus einem Punkte P, der an der konvexen Seite des äußersten der k Ovale liegt, gehen $3k$ Tangenten an die Kurve, und zwar $2k$ an die ineinander liegenden k Ovale, $k-1+m$ $(0 \leqq m \leqq 1)$ an die $k-1$ konkaven Kurven, von denen die ineinander liegenden k Ovale abgetrennt werden und $1-m$ an die übrigen Züge der Kurve gehen.

Es gibt also zwei Fälle, je nachdem m 0 oder 1 ist.

Ist $m=0$, so bilden die k ineinander liegenden Ovale und die $k-1$ konkaven Kurven, die alle vom Klassenindex 1, also von dritter Klasse sind, eine Kurve Γ_{3k-1}. Die übrigen Züge der Kurve Γ_{3k} bilden eine Kurve K vom Klassenindex 1.

Die Kurve K kann kein Oval haben. Hätte sie nämlich ein Oval Z, so müßte das äußerste der ersten k Ovale innerhalb des Ovales Z liegen, weil man aus dem Punkte P (an der konvexen Seite des äußersten Ovales) an Z keine Tangenten ziehen kann. Man könnte also aus einem Punkte, der außerhalb der $k+1$ Ovale liegt, an die $k+1$ Ovale $2k+2$, an die $k-1$ konkaven Kurven wenigstens $k-1$, an die Kurve Γ_{3k} $3k$-ter Klasse also wenigstens $3k+1$ Tangenten ziehen. Dies ist aber unmöglich. Die Kurve K besteht also aus einem einzigen Zuge dritter Klasse. Sie kann in keinem der k positiven Gebiete S_h $(h=1,2,\ldots,k)$ liegen, aus deren Punkten man an die betreffende Kurve Γ_{3k-1} $3k-1$ Tangenten ziehen kann. Läge nämlich die Kurve K in einem positiven Gebiete der Kurve Γ_{3k-1}, so könnte man aus einem Punkte der Kurve K an die Kurve Γ_{3k} $3k-1+3=3k+2$ Tangenten ziehen. Daraus folgt, daß die Kurve K eine konkave Kurve dritter Klasse ist, die in einem der k negativen Gebiete T_h der betreffenden Kurve Γ_{3k-1} liegt.

Innerhalb der Kurve K kann kein Zug der Kurve Γ_{3k-1} liegen. In dem entgegengesetzten Falle wäre das negative Gebiet T_h der Kurve Γ_{3k-1}, in dem die Kurve K enthalten ist, durch die Kurve K in zwei Gebiete geteilt, von denen das eine von der konvexen Seite der Kurve K und von den konkaven Seiten ihrer anderen (wirklich existierenden) Ränder begrenzt wird. Die Kurve Γ_{3k} wäre also nicht vom Maximalklassenindex.

Ist $m=1$, so kann man aus dem Punkte P an eine der $k-1$ Kurven, von denen die k Ovale getrennt werden, zwei Tangenten ziehen. Diese konkave Kurve ist also von vierter, die übrigen $k-2$ konkaven Kurven sind aber von dritter Klasse. Hat die Kurve Γ_{3k} noch einen Zug Z, so ist er ein Oval, weil man aus P an ihn keine Tangenten ziehen kann. Hätte aber die Kurve Γ_{3k} auch das Oval Z, so müßte es das äußerste der k Ovale im Innern enthalten. Man könnte dann aus einem Punkte des Ovales Z an die Kurve $3k+2$ Tangenten ziehen. Aus dieser Unmöglichkeit folgt, daß die Kurve Γ_{3k} außer den k Ovalen und außer den $k-1$ konkaven Kurven keinen anderen Zug haben kann.

Wir haben also bewiesen, daß es außer den dargestellten $2k-1$ Arten der Kurven Γ_{3k} keine anderen Arten gibt. Es gelten also die folgenden Sätze:

II. *Es gibt k verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k}^1 $3k$-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte* 1 *mit k ineinander liegenden Ovalen. Jede dieser k Kurven läßt sich aus k Ovalen und aus k konkaven Kurven dritter Klasse darstellen und zerfällt in k irreduzible Kurven. Die eine dieser k Kurven Γ_{3k}^1 zerfällt in k zweizügige Kurven dritter Klasse, die übrigen $k-1$ Kurven zerfallen in eine dreizügige Kurve vierter, in $k-2$ zweizügige Kurven dritter Klasse und in ein Oval.*

III. *Es gibt* $k-1$ *verschiedene Arten der Kurven* Γ_{3k}^0 $3k$*-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte* 0 *mit* k *ineinander liegenden Ovalen. Jede dieser Kurven kann aus* k *Ovalen, aus einer konkaven Kurve vierter und aus* $k-2$ *konkaven Kurven dritter Klasse dargestellt werden und zerfällt in* $k-2$ *zweizügige Kurven dritter, in eine zweizügige Kurve vierter Klasse und in ein Oval.*

IV. *Es gibt* $2k-1$ *verschiedene Arten der Kurven* Γ_{3k} $3k$*-ter Klasse vom Maximalklassenindex mit* k *ineinander liegenden Ovalen, und zwar* k *Arten vom Geschlechte* 1 *und* $k-1$ *Arten vom Geschlechte* 0. *Jede Kurve* Γ_{3k} *zerfällt in* k *irreduzible Kurven.*

4. Die Kurven Γ_{3k+1}.

1. Eine Kurve Γ_{3k+1}^2 vom Geschlechte 2 kann aus einer Kurve Γ_{3k-1} erzeugt werden, indem man entweder in einem der k negativen Gebiete T_h oder in zwei verschiedenen negativen Gebieten $T_h T_j$ zwei außerhalb voneinander liegende konkave Kurven dritter Klasse annimmt, von denen die übrigen Züge der Kurve Γ_{3k-1} nicht umschlossen werden.

Legt man in das Gebiet T_k (in das Innere des innersten Ovales) zwei konkave Kurven dritter Klasse, oder nur eine und in das eine der übrigen $k-1$ Gebiete T_h $(h=1, 2, \ldots, k-1)$ der Kurve Γ_{3k-1} noch eine konkave Kurve dritter Klasse, so erhält man k verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1}^2. Jede dieser Kurven zerfällt in $k-1$ zweizügige und in eine dreizügige Kurve dritter bzw. vierter Klasse.

Legt man in das eine der $k-1$ Gebiete T_h $(h=1, 2, \ldots, k-1)$ zwei konkave Kurven dritter Klasse, so erhält man $k-1$ verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1}^2, die in ein Oval, in $k-2$ zweizügige Kurven dritter und in eine vierzügige Kurve fünfter Klasse zerfallen.

Legt man endlich in zwei verschiedene Gebiete von $T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$ je eine konkave Kurve dritter Klasse, so kann man $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1}^2 erhalten, die in ein Oval, in $k-3$ zweizügige Kurven dritter und in zwei dreizügige Kurven vierter Klasse zerfallen.

Die so erhaltenen $k+k-1+\frac{(k-1)(k-2)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}$ Arten der Kurven Γ_{3k+1}^2 vom Geschlechte 2 weichen voneinander offenbar ab.

2. Legt man in das eine der k negativen Gebiete T_h $(h=1, 2, \ldots, k)$, die einer Kurve Γ_{3k-1} angehören, eine konkave Kurve vierter Klasse, die keinen der $2k-1$ Züge der Kurve Γ_{3k-1} umgibt, so erhält man k verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1}^1 vom Geschlechte 1. Legt man in eines der k negativen Gebiete, die einer Kurve Γ_{3k}^0 vom Geschlechte 0 angehören,

eine konkave Kurve dritter Klasse, die keinen der $2k-1$ Züge der Kurve Γ_{3k}^0 umgibt, so erhält man noch $k(k-1)$ verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1}^1. Die konkave Kurve vierter Klasse jeder Kurve Γ_{3k+1}^1 von diesen letzten $k(k-1)$ Arten umgibt wenigstens einen Zug der Kurve.

So erhält man k^2 verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1}^1 vom Geschlechte 1.

3. Ersetzt man eine konkave Kurve dritter Klasse einer Kurve Γ_{3k-1} durch eine konkave Kurve fünfter, oder zwei von ihren konkaven Kurven dritter Klasse durch je eine konkave Kurve vierter Klasse (so, daß die gegenseitige Lage der $2k-1$ Züge unverändert bleibt), so erhält man Kurven Γ_{3k+1}^0 vom Geschlechte 0. Die Anzahl der so konstruierten Arten dieser Kurven Γ_{3k+1}^0 ist also $k-1+\frac{(k-1)(k-2)}{2}=\frac{k(k-1)}{2}$.

4. Ist S_h $(h=1, 2, \ldots, k)$ eines der positiven Gebiete, aus dessen Punkten an die Kurve Γ_{3k-1} $3k-1$ Tangenten gehen, und legt man in das Gebiet S_h ein Oval, dessen Inneres keinen Zug der Kurve enthält, so erhält man eine Kurve Γ_{3k+1}^{-1} vom Geschlechte -1. Das $k-1$-te Oval vermehrt nämlich die Anzahl der negativen Gebiete um eins. Die so erhaltenen k Arten der Kurven Γ_{3k+1}^{-1} zerfallen in $k+1$ irreduzible Kurven, von denen zwei Kurven Ovale, die übrigen $k-1$ Kurven zweizügige Kurven dritter Klasse sind.

Die so erhaltenen $\frac{k(k+1)}{2}+k^2+\frac{k(k-1)}{2}+k=2k^2+k$ verschiedenen Arten der Kurven Γ_{3k+1} (vom Geschlechte 2, 1, 0 oder -1) erschöpfen die möglichen Arten der Kurven Γ_{3k+1} $3k+1$-ter Klasse.

Eine Kurve Γ_{3k+1} hat wenigstens $k-1$ konkave Kurven, von denen die k ineinander liegenden Ovale getrennt werden. Aus einem Punkte P, der an der konvexen Seite des äußersten der k Ovale liegt, gehen $3k+1$ Tangenten an die Kurve Γ_{3k+1}, von denen $2k$ an die k Ovale, $k-1+m$ $(0\leqq m\leqq 2)$ an die $k-1$ konkaven Kurven und $2-m$ an die übrigen Züge der Kurve gehen. Diese letzteren Züge bilden eine Kurve K.

Es gibt drei Fälle, je nachdem der Wert von m 0, 1 oder 2 ist.

Ist $m=0$, so bilden die k Ovale und die $k-1$ konkaven Kurven, die alle von dritter Klasse sind, eine Kurve Γ_{3k-1}. Gehen zwei Tangenten aus P an ein Oval der Kurve K, so ist die ganze Kurve K ein Oval, das in einem positiven Gebiete der Kurve Γ_{3k-1} liegt. Wäre die Kurve K ein anderes Oval, so wäre die Kurve Γ_{3k+1} nicht vom Maximalklassenindex. Hätte die Kurve K auch ein anderes Oval, so wäre die Klasse der Kurve Γ_{3k+1} größer als $3k+1$.

Ist die Kurve K kein Oval, so kann sie auch keinen Oval-Zug haben. Hätte sie nämlich das Oval Z, so könnte man aus einem Punkte der Ebene,

der außerhalb der $k+1$ Ovale der Kurve Γ_{3k+1} liegt, an die Kurve wenigstens $2k+2+k-1+2=3k+3$ Tangenten ziehen. Die Kurve K besteht also entweder aus einem Zuge vom Klassenindex 2, oder aus zwei Zügen vom Klassenindex 1.

Ist die Kurve K vom Klassenindex 2 einzügig, so liegt sie in einem der k negativen Gebiete der Kurve Γ_{3k-1}. Läge sie nämlich in einem der k positiven Gebiete der Kurve Γ_{3k-1}, so könnte man aus einem ihrer Punkte an die Kurve $3k-1+4=3k+3$ Tangenten ziehen, weil die Kurve K von vierter Klasse ist. Daraus folgt, daß die Kurve K eine konkave Kurve vierter Klasse ist, die in einem der negativen Gebiete der Kurve Γ_{3k-1} liegt.

Besteht die Kurve aus zwei Zügen vom Klassenindex 1, so liegt keiner dieser zwei Züge dritter Klasse in einem positiven Gebiete der Kurve Γ_{3k-1}. Wäre nämlich der eine Zug in einem positiven Gebiete gelegen, so wäre die Klasse der Kurve Γ_{3k+1} wenigstens $3k+3$, weil man aus einem Punkte des betreffenden Zuges von K an die Kurve Γ_{3k-1} $3k-1$, an die Kurve K wenigstens 4 Tangenten ziehen kann. Daraus folgt, daß die zwei Züge der Kurve K konkave Kurven dritter Klasse sind, die in den negativen Gebieten der Kurve Γ_{3k-1} liegen.

Im Falle $m=0$ gibt es also drei Unterfälle, je nachdem die Kurve K ein Oval, eine konkave Kurve vierter Klasse bzw. eine aus zwei konkaven Zügen dritter Klasse bestehende Kurve ist.

Innerhalb der einzügigen Kurve K, oder innerhalb der zwei Züge der zweizügigen Kurve K kann kein Zug der Kurve Γ_{3k+1} liegen. In dem entgegengesetzten Falle wäre das Gebiet, in dem die Kurve K ganz oder teilweise liegt, durch K in solche Gebiete zerlegt, von denen das eine Gebiet — aus inneren Punkten gesehen — die konkave Seite des einen und die konvexe eines anderen von ihren Rändern erreichen läßt. Die Kurve Γ_{3k+1} wäre also nicht vom Maximalklassenindex.

Wir haben also bewiesen, daß es im Falle $m=0$ nur solche Arten der Kurven Γ_{3k+1} gibt, die im Vorigen von uns dargestellt wurden.

Ist $m=1$, so bilden die k Ovale und die $k-1$ konkaven Kurven eine Kurve Γ_{3k} vom Geschlechte 0. Die Kurve K hat in diesem Falle den Klassenindex 1 und die Klasse 3, weil man aus einem Punkte des äußersten Ovales an die Kurve K nur eine Tangente ziehen kann. Die Kurve K kann kein Oval haben. Denn hätte sie eines, so wäre die Klasse der Kurve Γ_{3k+1} größer als $3k+1$. Auf Grund des Vorigen kann man also folgern, daß die Kurve K eine konkave Kurve dritter Klasse ist, die in einem der k negativen Gebiete der Kurve Γ_{3k} liegt und im Inneren keinen Zug der Kurve Γ_{3k} enthält.

Ist $m = 2$, so kann man aus einem Punkte des äußersten Ovales an die $k-1$ konkaven Kurven, von denen die k Ovale abgetrennt sind, $k+1$, an die Kurve K aber keine Tangenten ziehen. Es gibt also entweder eine konkave Kurve fünfter oder zwei konkave Kurven vierter Klasse unter den $k-1$ konkaven Kurven, die übrigen $k-2$ bzw. $k-3$ konkaven Kurven sind von dritter Klasse. Die Kurve K kann aber kein Oval haben. Denn hätte sie eines, so wäre die Klasse der Kurve Γ_{3k+1} größer als $3k+1$. Daraus folgt, daß die Kurve K nicht existieren kann.

Wir haben also bewiesen, daß die möglichen Arten der Kurven Γ_{3k+1} nur solche sind, die von uns dargestellt wurden. Da diese dargestellten Arten voneinander abweichen, so gelten die folgenden Sätze:

V. *Es gibt* $\frac{k(k+1)}{2}$ *verschiedene Arten der Kurven* Γ^2_{3k+1} $3k+1$*-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte* 2, *die k ineinander liegende Ovale besitzen. Diese Kurven lassen sich aus k Ovalen und* $k+1$ *konkaven Kurven dritter Klasse darstellen. Jede dieser Kurven zerfällt in k irreduzible Kurven, von denen entweder* $k-1$ *dritter und eine vierter Klasse, oder* $k-2$ *dritter, eine fünfter und eine zweiter Klasse, oder* $k-3$ *dritter, zwei vierter und eine zweiter Klasse sind.*

VI. *Es gibt* k^2 *Arten der Kurven* Γ^1_{3k+1} $3k+1$*-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte* 1 *mit k ineinander liegenden Ovalen. Diese Kurven bestehen aus k Ovalen, aus einer konkaven Kurve vierter und* $k-1$ *konkaven Kurven dritter Klasse und zerfallen in k irreduzible Kurven. Von diesen* k^2 *Arten zerfallen k Arten in* $k-1$ *zweizügige Kurven dritter und in eine zweizügige Kurve vierter Klasse,* $2(k-1)$ *Arten zerfallen in ein Oval, in eine dreizügige Kurve fünfter und in* $k-2$ *zweizügige Kurven dritter Klasse, die übrigen* $(k-1)(k-2)$ *Arten zerfallen in ein Oval, in eine zweizügige und in eine dreizügige Kurve vierter Klasse und in* $k-3$ *zweizügige Kurven dritter Klasse.*

VII. *Es gibt* $\frac{k(k-1)}{2}$ *verschiedene Arten der Kurven* Γ^0_{3k+1} $3k+1$*-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte* 0 *mit k ineinander liegenden Ovalen. Diese Kurven bestehen aus k Ovalen und entweder aus einer konkaven Kurve fünfter und* $k-2$ *konkaven Kurven dritter Klasse, oder aus zwei konkaven Kurven vierter und* $k-3$ *konkaven Kurven dritter Klasse und zerfallen in k irreduzible Kurven. Von den* $\frac{k(k-1)}{2}$ *Arten der Kurven* Γ^0_{3k+1} *zerfallen* $k-1$ *Arten in ein Oval, in eine zweizügige Kurve fünfter und in* $k-2$ *zweizügige Kurve dritter Klasse, die übrigen* $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ *Arten zerfallen in ein Oval, in zwei zweizügige Kurven vierter und in* $k-3$ *zweizügige Kurven dritter Klasse.*

VIII. *Es gibt k verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1}^{-1} $3k+1$-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte -1 mit k ineinander liegenden Ovalen. Diese Kurven bestehen aus $k+1$ Ovalen und aus $k-1$ konkaven Kurven dritter Klasse und zerfallen in zwei Ovale und in $k-1$ zweizügige Kurven dritter Klasse.*

IX. *Es gibt $2k^2+k$ verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1} $3k+1$-ter Klasse vom Maximalklassenindex mit k ineinander liegenden Ovalen, von denen k Arten in $k+1$, die übrigen $2k^2$ Arten in k irreduzible Kurven zerfallen.*

5. Die Anzahl der Spitzen und der Doppeltangenten einer Kurve Γ_n.

Für die Anzahl der Spitzen und für diejenige der Doppeltangenten einer Kurve Γ_n, weil sie keine Wendetangente hat, gilt der Satz[6]):

X. *Hat eine ebene Kurve Γ_n n-ter Klasse vom Maximalklassenindex r Spitzen erster Art, t Doppeltangenten und das Geschlecht p, so sind*

$$r = n - 2 + 2p \quad \textit{und} \quad t = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.$$

Die Anzahl der Spitzen läßt sich auf Grund der Sätze I bis IX auch direkt bestimmen, weil eine konkave Kurve m-ter Klasse m Spitzen erster Art hat. Man kann auch die Anzahl der gemeinsamen Tangenten von zwei Zügen einer Kurve Γ_n auf Grund des folgenden Satzes bestimmen[7]):

Haben die einzügigen Kurven C_m und C_n keinen gemeinsamen Punkt, keinen Doppelpunkt, keine stationäre und Wendetangente, liegt ferner die Kurve C_m im Endlichen und gehen endlich n bzw. m Tangenten aus einem Punkte der Kurve C_m bzw. C_n an die andere Kurve, so haben die zwei Kurven $m \cdot n$ gemeinsame Tangenten.

Auf Grund dieses Satzes hat ein Oval keine gemeinsame Tangenten mit einem Zuge, der im Inneren des Ovales liegt. Zwei außerhalb voneinander liegende Ovale haben vier gemeinsame Tangenten. Eine konkave Kurve m-ter Klasse K_m und ein Oval haben $2(m-2)$ bzw. $2m$ Tangenten gemeinsam, je nachdem beide Kurven außerhalb voneinander liegen bzw. das Oval innerhalb der Kurve K_m liegt. Die konkaven Kurven K_m und K_n haben $(m-2)(n-2)$ gemeinsame Tangenten, wenn beide Kurven außerhalb voneinander liegen. Liegt aber die Kurve K_n innerhalb der Kurve K_m, so ist die Anzahl der gemeinsamen Tangenten $m(n-2)$.

---

[6]) „Über die charakteristischen Zahlen der ebenen Kurven vom Maximal-Klassenindex." Math. Annalen **100** (1928), S. 164–178.

[7]) „Über einen v. Staudtschen Satz", Acta Litt. ac. Sc. Univ. Hung. Szeged **2** (1924), S. 65–68. Vgl. auch die Abhandlung: „Über die Züge der ebenen Kurven vom Maximal-Klassenindex", Math. Annalen **100** (1928), S. 179–187.

Man kann leicht einsehen, daß eine konkave Kurve dritter, vierter bzw. fünfter Klasse 0, 2 bzw. 5 Doppeltangenten hat, wie aus der vorigen Formel für t folgt. Bestimmt man mit Hilfe dieser Sätze die Anzahl der Doppeltangenten einer Kurve Γ_n, so gelangt man wieder zum Satze X.

Aus dem Satze X folgt, daß je zwei von den vier Zahlen n, r, p und t die übrigen vollständig bestimmen. Die Anzahl der Spitzen oder diejenige der Doppeltangenten charakterisiert also die Kurven Γ_n ebenso, wie das Geschlecht.

6. Kurven Γ_n mit Selbstberührungspunkten.

Im vorigen haben wir den allgemeinen Fall der Kurven Γ_n betrachtet, in denen keine Selbstberührung vorkommt. Eine Kurve vom Maximalklassenindex kann sich aber selbst berühren.

Ist q die Tangente der Kurve Γ_n im Selbstberührungspunkte Q_0, so bleibt die Anzahl der Tangenten, die aus einem dem Punkte Q_0 naheliegenden Punkte Q der Tangente q an die Kurve Γ_n gehen, unverändert, während der Punkt Q auf der Geraden q durch Q_0 hindurchgeht. In einem Selbstberührungspunkte hängen also die in ihm zusammenstoßenden Teile des positiven Gebietes, aus deren Punkten die maximale Anzahl der Tangenten an die Kurve gezogen werden kann, zusammen. In einem negativen Gebiete kommen keine Selbstberührungen vor. Daraus folgt, daß die Anzahl der positiven Gebiete (und auch der negativen Gebiete) einer Kurve Γ_n nicht verändert wird, wenn die Kurve Γ_n durch eine stetige Deformation in der Ebene in eine Kurve Γ_n derselben Klasse vom Maximalklassenindex überführt wird, die auch Selbstberührungspunkte hat.

Unsere Sätze bestehen also auch dann, wenn die Kurve Γ_n Selbstberührungspunkte hat.

7. Kurven siebenter Klasse vom Maximalklassenindex mit zwei ineinander liegenden Ovalen.

Es gibt zehn verschiedene Arten der Kurven siebenter Klasse vom Maximalklassenindex mit zwei ineinander liegenden Ovalen (Satz IX). Diese Kurven lassen sich mit den Figuren 1 bis 10 veranschaulichen.

Die ersten drei Kurven 1, 2 und 3 sind vom Geschlechte 2, die Kurven 4, 5, 6 und 7 sind vom Geschlechte 1. Das Geschlecht der Kurven 8 bzw. 9 bis 10 ist 0 bzw. -1.

Die Kurven 9 und 10 zerfallen in drei irreduzible Kurven, die übrigen Kurven nur in zwei irreduzible Kurven. Diese zehn Arten der Kurven Γ_7 weichen voneinander wesentlich ab.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

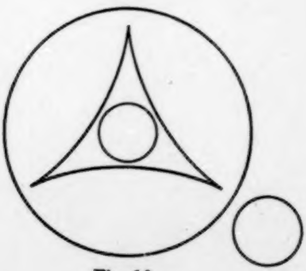


Fig. 10.

Wir wollen insbesondere betonen, daß die Kurven 5 und 6 verschieden sind. Die Anzahl der gemeinsamen Tangenten des Zuges dritter Klasse mit dem Ovale ist für die Kurve 5 sechs, für die Kurve 6 aber zwei. Die Anzahl der gemeinsamen Tangenten des Zuges vierter Klasse mit dem inneren Ovale ist für die Kurve 5 bzw. 6 vier bzw. acht. Der Zug dritter Klasse läßt sich bei der Kurve 6 in einen Punkt zusammenziehen, ohne die übrigen Züge zu berühren, bei der Kurve 5 aber nicht.

Die polaren Figuren der Kurven 1 bis 10 in bezug auf einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Inneren des innersten Ovales liegt, sind ebene Kurven siebenter Ordnung vom Maximalindex mit zwei im Endlichen liegenden Ovalen und weichen voneinander wesentlich ab. Es gibt also zehn wesentlich verschiedene Arten der Kurven siebenter Ordnung vom Maximalindex mit zwei im Endlichen liegenden Ovalen. Die Klassifikation von Herrn H. Mohrmann macht keinen Unterschied zwischen den Dualen der Kurven 5 und 6; dadurch erhält er für die Anzahl der Arten der Kurven siebenter Ordnung vom Maximalindex mit zwei im Endlichen liegenden Ovalen 9 statt 10.

8. Kurven Γ_n mit Punktzügen.

Im vorigen haben wir immer angenommen, daß jeder Zug der Kurven mehrpunktig ist. Wir wollen jetzt die möglichen Formen der Kurven Γ_n darstellen, die auch Punktzüge haben.

Aus der Darstellung der Kurven Γ_{3k-1} folgt, daß es keine Kurve Γ_{3k-1} gibt, die einen Punktzug hat.

Hat eine Kurve Γ_{3k} einen Punktzug Z_0, so bilden die übrigen Züge der Kurve Γ_{3k} eine Kurve Γ_{3k-1}. Man stellt also die möglichen Arten der Kurven Γ_{3k} mit einem Punktzuge Z_0 dar, indem man einen Punkt in einem positiven oder in einem negativen Gebiete oder auf einem Zuge einer Kurve Γ_{3k-1} auf beliebige Weise annimmt. Dementsprechend gibt es also $k+k+2k-1=4k-1$ verschiedene Lagen des Punktes Z_0 und deshalb $4k-1$ verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k} mit einem Punktzuge. Hat die Kurve Γ_{3k-1} auch einen Selbstberührungspunkt Q, in dem zwei verschiedene Züge einander berühren, so rechnen wir den Punkt Q entweder zu dem einen oder zu dem anderen Zuge oder zu dem von den zwei Zügen begrenzten positiven Gebiete der Kurve Γ_{3k-1} zu, aber nicht zu beiden Zügen oder zu dem einen Zuge und zu dem Inneren des betreffenden positiven Gebietes. In dieser Auffassung gibt es keine weiteren Arten der Kurven Γ_{3k} mit Punktzügen.

Hat eine Kurve Γ_{3k+1} einen einzigen Punktzug, so bilden die übrigen Züge eine Kurve Γ_{3k} ohne Punktzug. Man erhält also die möglichen Arten der Kurven Γ_{3k+1} mit einem Punktzuge, indem man in der Ebene der

möglichen $2k-1$ Kurven Γ_{3k} einen Punkt auf beliebige Weise annimmt. Der Punkt Z_0 kann in einem negativen oder in einem positiven Gebiete oder auf einem Zuge der entsprechenden Kurve Γ_{3k} liegen. Eine Kurve Γ_{3k}^1 vom Geschlechte 1 hat k negative, $k+1$ positive Gebiete und $2k$ Züge, eine Kurve Γ_{3k}^0 vom Geschlechte 0 hat k positive und k negative Gebiete und $2k-1$ Züge. Daraus folgt, daß es

$$k(4k+1)+(k-1)(4k-1)=8k^2-4k+1$$

verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1} mit einem Punktzuge gibt.

Hat die Kurve Γ_{3k+1} zwei Punktzüge, so bilden ihre übrigen Züge eine Kurve Γ_{3k-1}. Man erhält also die möglichen Kurven Γ_{3k+1} mit zwei Punktzügen, indem man zwei Punkte in der Ebene einer Kurve Γ_{3k-1} auf verschiedene Weise annimmt.

Die Kurve Γ_{3k-1} hat k positive, k negative Gebiete und $2k-1$ Züge. Man kann also einen Punkt in der Ebene der Kurve Γ_{3k-1} auf $4k-1$ Weisen annehmen. Läßt man den zweiten Punkt mit dem ersten Punkte zusammenfallen, so erhält man $4k-1$ verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1} mit zwei zusammenfallenden Punktzügen. Weicht aber der zweite Punkt von dem ersten ab, so hat auch dieser zweite Punkt $4k-1$ verschiedene Lagen.

Es gibt also

$$(4k-1)+(4k-1)^2=4k(4k-1)$$

verschiedene Arten der Kurven Γ_{3k+1} mit zwei Punktzügen.

(Eingegangen am 16. 11. 1929.)

Some Theorems on the Generators of a Hyperboloid.

Von

Charles H. Rowe in Dublin (Irland).

It is well known that the theorem that asserts the constancy of the sum or difference of the focal distances of a point on a central conic remains true if the foci are replaced by an arbitrary pair of points on the focal conic of the given conic. It is not possible however to generalize in the same way the theorem that the product of the focal perpendiculars on a tangent is constant or the theorem that the feet of these perpendiculars lie on a circle, and the problem of finding generalizations of a different kind does not seem to have attracted much attention. In the following pages I have tried to generalize these theorems along different lines, and I have tried to obtain still more general results by considering a variable generator of a hyperboloid instead of a variable tangent to a conic.

1. It may be shown that it is not possible to extend the theorem on the product of the focal perpendiculars by replacing the foci by a different pair of points. If, however, we remark that this theorem may be regarded as stating that the distances[1]) of a tangent to a central conic from the tangents to the focal conic at the ends of its major axis have a constant product, we are led to attempt a generalization by asking whether it is possible to replace these tangents to the focal conic by a different pair of lines. We find that it is possible: the theorem will in fact remain true if we choose for our pair of lines a pair of parallel generators of any quadric of the confocal system of which the given conic is a focal conic. We find also that this result admits the further extension that is given by the following theorem:

The product of the distances of a variable generator of a hyperboloid from any two fixed parallel generators of a confocal hyperboloid is constant.

[1]) We shall find it convenient to speak of the distance of one line from another instead of the shortest distance between the two lines.

Let g' and h' be two fixed parallel generators of a hyperboloid S' confocal with the given hyperboloid S, and consider the cylinder circumscribed to S that has its generators parallel to g' and h'. Any generator g of S lies in a tangent plane to this cylinder, and its distances from g' and h' are equal to the distances of this tangent plane from g' and h'. Now g' and h' are the focal lines of the cylinder, and it is evident that the distances of any tangent plane to a quadric cylinder from the focal lines have a constant product which is numerically equal to the square of the semi-axis minor of a rectangular cross-section of the cylinder[2]).

We may remark that the constant value of the product considered in this theorem depends only on the two hyperboloids S and S' that are involved and not on our choice of a particular pair of fixed parallel generators of S', and that it has the same value whether we take the variable generator on S and the fixed parallel generators on S' or *vice-versa*. To prove this, consider a pair of parallel generators g, h of S and two pairs of parallel generators g', h' and g'_1, h'_1 of S', and let us use the symbol (g, g') to denote the distance between two lines g and g'. Considerations of symmetry and an application of our theorem lead easily to the equations

$$(g, g')(g, h') = (h, h')(g, h') = (h, h'_1)(g, h'_1) = (g, g'_1)(g, h'_1),$$

from which the truth of our remark follows at once.

It is natural to ask whether the theorem that we have proved gives all the cases in which the distances of a variable generator from two fixed straight lines have a constant product. We shall see that it does not, but before we discuss this question it will be necessary to examine more closely the relation of a quadric to the generators of quadrics confocal with it, and to recall certain properties of the orthogonal hyperboloid.

2. For the sake of brevity we shall say that a generator of any quadric confocal with a given quadric S is a *focal axis*[3]) of S. A focal axis may thus be defined as the line of intersection of a pair of isotropic tangent planes to S or, if we prefer, as the axis of a right circular cylinder of zero radius which has double contact with S. The similarity between the relation of a focal axis to a quadric and the relation of a focus to a conic will be obvious.

---

[2]) An argument of a nature similar to this allows us to establish the following extension of the property of the focal distances of a point on a central conic: *The distances of a point on a central conic from two fixed parallel generators of a hyperboloid of the confocal system determined by the conic have a constant sum or difference according as the conic is an ellipse or a hyperbola.*

[3]) *Fokalachse* is the term used by Reye, *Die Geometrie der Lage* (Leipzig, 1892), vol. 2, p. 153.

If $X=0$ and $Y=0$ are the equations of the tangent planes to a quadric S through any line l, and if $Z=0$ and $W=0$ are the equations of the tangent planes through the polar line l' of l, the equation of S will be of the form $XY=kZW$ where k is a constant. If l is a focal axis, the planes $X=0$ and $Y=0$ are isotropic, and the product XY therefore differs only by a constant factor from the perpendicular distance of the variable point from the line $X=Y=0$. The equation of S thus shows that the perpendicular distance of a point on S from a focal axis l bears a constant ratio to the product of its distances from the tangent planes through the polar line l' of l, or, if these tangent planes are imaginary, to its distance from l' measured parallel to one or other of two fixed planes[4]).

The case in which the polar line l' of the focal axis l is itself a focal axis is of special interest, for the planes $Z=0$ and $W=0$ are then isotropic too, and the equation of S shows that S is the locus of a point whose perpendicular distances from the two lines l and l' are in a constant ratio. Now we know that a central quadric is a locus of this kind only when it is an *orthogonal* hyperboloid of one sheet[5]).

It may easily be verified that this is so. The four isotropic planes $X=0$, &c. cut the plane at infinity in a quadrilateral which is circumscribed to the circle at infinity (which we shall denote by Ω) and inscribed in the conic C in which the plane at infinity cuts the hyperboloid S. Now the condition that such a quadrilateral should exist is equivalent to the condition that S should be orthogonal, for, in order that the conics C and Ω should admit an inscribed-circumscribed quadrilateral (and hence an infinity of such quadrilaterals), it is necessary and sufficient that the tangents to Ω at two of the four points where it is cut by C should intersect on C, the same being then true of the tangents at the

[4]) Unlike the fixed planes that present themselves in connexion with the analogous property of the modular foci of a quadric, these fixed planes are different for different focal axes. It will be found that they cut the plane at infinity in the real pair of lines that contains the four points where the imaginary tangent planes through l' cut the circle at infinity. If we wish to define the directions of these planes without using imaginary elements, we can verify without difficulty that they are planes of circular section of the quadric cylinder with l' as axis that will be found to pass through the curve in which S is cut by any right circular cylinder with l as axis.

[5]) See H. Schröter, *Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art*, Crelle 85 (1878), p. 26, or Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes* 1 (1922), p. 170. A hyperboloid is said to be orthogonal if it has a generator that is perpendicular to the planes of a system of circular sections. If a generator satisfies this condition, it is one of the four generators that meet the major axis; and the remaining three of these four also satisfy the condition.

remaining two of these four points[6]). This condition means that the point at infinity on lines perpendicular to the planes of a certain system of circular sections lies on C, and therefore that S has a generator that is perpendicular to these planes.

It is known also that any orthogonal hyperboloid may be regarded in an infinity of ways as the locus of a point whose distances from two fixed lines have a constant ratio, and we may verify this from our present point of view. Suppose that S is orthogonal, so that C and Ω admit an infinity of inscribed-circumscribed quadrilaterals, and let Q be any of these. The generators of S of one system through two opposite vertices of Q together with the generators of the other system through the remaining vertices form a skew quadrilateral lying on S. If $XY = 0$ and $ZW = 0$ are the equations of the pairs of planes that contain this quadrilateral, the four planes $X = 0$, &c. are isotropic, and the equation of S is of the form $XY = kZW$, so that the distances of a point on S from the lines $X = Y = 0$ and $Z = W = 0$ have a constant ratio. It will be seen that in this way we can obtain an infinite number of pairs of real lines such that the distances of a variable point on S from the lines of any pair have a constant ratio. We shall refer to this system of pairs of real lines as the system Σ.

We shall now prove that any pair of the system Σ may be constructed by taking a focal axis that meets the major axis at right-angles together with its polar line with respect to S, this polar line also being a focal axis that meets the major axis at right-angles.

The lines $X = Y = 0$ and $Z = W = 0$ of one of these pairs are clearly focal axes of which one is the polar of the other, so that it remains to show that they are perpendicular to the major axis, for a real focal axis cannot be perpendicular to the major axis without meeting it. The points at infinity on these two lines are the points of intersection of pairs of opposite sides of the quadrilateral Q. Now as Q varies, the point of intersection P of a pair of opposite sides describes a straight line[7]), and we may identify this straight line by noticing that it contains the limiting positions that P takes in the two cases where Q degenerates so that its sides coincide in pairs with the tangents to Ω at two of its inter-

[6]) The necessity of this condition follows at once when we allow a vertex of a variable inscribed-circumscribed quadrilateral to tend to a point of intersection of the conics. Its sufficiency may be proved perhaps most rapidly by projecting the two conics into two circles, one of which passes through the centre of the other.

[7]) This may be verified by projecting in the manner indicated in the preceding foot-note, or by observing that the points of contact with Ω of pairs of opposite sides of the variable quadrilateral Q form an involution on Ω.

sections with C. These limiting positions are the points at infinity on the generators of S that are perpendicular to planes of circular section, and therefore the line that they determine in the plane at infinity is the line that lies in any plane perpendicular to the major axis. Since the lines of all the pairs of the system Σ meet this line at infinity, they are all perpendicular to the major axis.

3. We shall now examine the problem of determining for a given hyperboloid all the pairs of real lines such that the product of the distances of a variable generator of one system from the lines of a pair is constant. We shall assume that the hyperboloid is neither degenerate nor of revolution, and we shall disregard the trivial cases in which a pair of lines has the property in question because one of them is a generator of the hyperboloid of the opposite system to the variable generator. We shall establish the following results:

The pairs of real lines whose distances from a variable generator of one system of a hyperboloid have a constant product are

(I) *pairs of parallel focal axes,*

(II) *the pair formed by the asymptotes of the focal hyperbola,*

(III) *a certain pair of lines parallel to the asymptotes of the focal hyperbola but not coincident with them.*

If the hyperboloid is orthogonal, we have to add

(IV) *the pairs formed by taking any two parallel focal axes that meet the major axis and replacing one of them by its polar line.*

The condition that the variable generator should belong to a specified system may be omitted in the cases of the pairs (I), (II) and (IV), but not in the case of the pair (III).

We shall consider a variable generator g of the first system of a hyperboloid S, and we shall say that a pair of real lines has the property A if the product of the distances of g from these lines is a constant different from zero.

Let l, m, n, L, M, N be the six line-coordinates of the variable generator g referred to rectangular axes, the first three of the six being direction ratios. Since we can write the equations of g so that they involve a parameter t linearly, these line-coordinates may be expressed as quadratic functions of the parameter t. Let $l_1, m_1, n_1, L_1, M_1, N_1$ be the coordinates of a fixed line d_1 and let us write

$$\varphi_1(t) = lL_1 + l_1L + mM_1 + m_1M + nN_1 + n_1N,$$
$$\psi_1(t) = (mn_1 - m_1n)^2 + (nl_1 - n_1l)^2 + (lm_1 - l_1m)^2,$$

so that the square of the distance between g and d_1 is $\frac{\{\varphi_1(t)\}^2}{\psi_1(t)}$.

The function $\varphi_1(t)$ is a quadratic in t whose zeros correspond to the two positions of g in which it intersects d_1, and the function $\psi_1(t)$ is a quartic in t whose vanishing expresses that the points at infinity on g and d_1 lie on the same tangent to the circle at infinity Ω. The zeros of $\psi_1(t)$ correspond therefore to the four positions of g in which it meets at infinity one or other of the isotropic planes that pass through d_1. If we associate with each value of t the point in which the corresponding generator g cuts the conic C that lies at infinity on S, we may say that the zeros of $\psi_1(t)$ give the four points on C where it is cut by the tangents to Ω from the point at infinity on d_1.

If d_2 is a second fixed line and $\varphi_2(t)$ and $\psi_2(t)$ the corresponding quadratic and quartic, and if we write

$$F(t) = \frac{\{\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\}^2}{\psi_1(t)\,\psi_2(t)},$$

the square of the product of the distances of g from d_1 and d_2 is equal to $F(t)$. The condition that d_1 and d_2 should form a pair of lines having the property A is therefore that $F(t)$ should reduce to a constant different from zero, or that the zeros of its numerator should be identical with those of its denominator.

We shall suppose that d_1 and d_2 have the property A, and we shall consider first the case in which the four zeros of $\psi_1(t)$ are distinct. The four zeros of $\psi_1(t)$ must then be identical with the four zeros of $\psi_2(t)$ and also with the four zeros of $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$.

Since $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ have the same zeros, the four points where C is cut by the tangents to Ω from the point at infinity on d_1 are identical with the four points that are similarly related to d_2. This can happen in two ways only: either the points at infinity on d_1 and d_2 coincide, or else these points are the intersections of pairs of opposite sides of a quadrilateral that is inscribed in C and circumscribed to Ω. In the first case d_1 and d_2 are parallel, and in the second case the hyperboloid is orthogonal, and d_1 and d_2 are parallel to the lines of one of the pairs of the system Σ.

Since the zeros of $\varphi_1(t)$ are zeros of $\psi_1(t)$, each of the generators g that meet d_1 meets at infinity one of the isotropic planes through d_1, and therefore lies in this plane. The line d_1, and similarly the line d_2, is thus a focal axis.

We thus see that, when the hyperboloid S is not orthogonal, a pair of lines that has the property A necessarily consists of a pair of parallel focal axes, provided that our condition that the zeros of $\psi_1(t)$ should be distinct is observed; and we have already seen by simpler methods that any pair of parallel focal axes has the property A.

If the hyperboloid is orthogonal, it may be possible to form a pair of lines having the property A by taking a pair of focal axes parallel to the lines of one of the pairs of the system Σ. Now the only such pairs of focal axes are the pairs of the system Σ themselves and the pairs that we get by taking a pair g', g'' of this system and replacing one of its lines, say g'', by the focal axis h'' that is parallel to it, or, what amounts to the same thing, by taking two parallel focal axes that meet the major axis at right angles and replacing one of them by its polar line. We could decide whether any of these pairs actually have the property A by a further examination of the function $F(t)$, but we may do this more simply by remarking that the distances of a variable generator g from the lines g' and g'' have a constant ratio[8]), while its distances from the parallel focal axes g'' and h'' have a constant product. It follows at once that no pair of the system Σ possesses the property A, and that any pair such as g', h'' does possess this property.

We have thus established the existence of the pairs (I) and (IV) of our enumeration, and we have shown that these are the only pairs that correspond to the case in which the zeros of $\psi_1(t)$ are distinct.

We turn now to the case in which the zeros of $\psi_1(t)$ are not distinct. Remembering that the lines d_1 and d_2 are supposed to be real, we see that there are two cases only in which coincidences occur among the zeros of $\psi_1(t)$: that in which the point at infinity on d_1 lies on C, and that in which it lies at the intersection of a pair of common tangents of C and Ω. It will be found that in the first case $F(t)$ cannot be constant without being identically zero, and we shall therefore suppose that we are in the second case. The line d_1 is now parallel to one of the asymptotes of the focal hyperbola of S, and the quartic $\psi_1(t)$ has two pairs of equal complex zeros. Since both of the quadratics and both of the quartics involved in $F(t)$ have real coefficients, it will be seen that $F(t)$ reduces to a constant different from zero if, and only if, $\psi_1(t)$ is a constant multiple of one of the two functions $\{\varphi_1(t)\}^2$, $\{\varphi_2(t)\}^2$ and $\psi_2(t)$ is a constant multiple of the other.

If $\psi_1(t)$ is a constant multiple of $\{\varphi_1(t)\}^2$ and $\psi_2(t)$ a constant multiple of $\{\varphi_2(t)\}^2$, the distances of g from d_1 and d_2 are separately constant and each of the lines d_1 and d_2 is an asymptote of the focal hyperbola[9]).

---

[8]) The distances of a point on S from g' and g'' have a constant ratio, and therefore the minima of the distances of a point on a generator of S from g' and g'' are attained simultaneously and have the same constant ratio.

[9]) The asymptotes of the focal hyperbola are the axes of the unique pair of right circular cylinders that can be circumscribed to the hyperboloid. They are consequently the only lines whose distances from a variable generator are constant.

If d_1 and d_2 coincide each with a different asymptote, we have the pair (II); if they both coincide with the same asymptote, we have a special instance of a pair (I) in which the two parallel focal axes are coincident.

There remains only the case where $\psi_1(t)$ is a constant multiple of $\{\varphi_2(t)\}^2$ but not of $\{\varphi_1(t)\}^2$, and where $\psi_2(t)$ is a constant multiple of $\{\varphi_1(t)\}^2$. The fact that $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are perfect squares and have different zeros means that d_1 is parallel to one asymptote a_1 of the focal hyperbola and that d_2 is parallel to the other asymptote a_2. The generators g that correspond to the two double zeros of $\psi_1(t)$ meet at infinity the isotropic planes through d_1. They therefore meet at infinity the isotropic planes through a_1 and hence lie in these planes and intersect a_1. The fact that the zeros of $\psi_1(t)$ and $\{\varphi_2(t)\}^2$ are identical thus means that the two generators g that meet a_1 also meet d_2. Our conditions thus determine d_2, and similarly d_1, uniquely, and we obtain only a single pair of lines having the property A. Each of the lines of this pair is parallel to one of the asymptotes of the focal hyperbola, and it meets the two generators of the first system that meet the other asymptote. This is the pair that we have referred to under (III) in our enumeration, and it completes our determination of the real pairs of lines that have the property A.

It remains to specify this pair of lines in a manner that does not involve imaginary elements. In order to determine d_1, we shall consider the paraboloid that passes through the asymptote a_2 and through the two generators of the second system of S that are parallel to the plane of the focal hyperbola and therefore pass through the ends B and B' of the minor axis of the principal elliptic section of S. All the generators of this paraboloid of the same system as the three that we have mentioned meet BB' at right-angles, and they are all transversals of the two generators g of S that meet a_2. One of them is parallel to a_1, and this is the required line d_1. Since we know the direction of d_1, we need only find the point D_1 where d_1 cuts BB' in order to specify d_1 completely. This may be done by using the fact that four generators of the paraboloid cut BB' in four points which have the same cross-ratio as the four planes that join these generators to BB'. We take as the four generators the line d_1 and the three lines that we used to define the paraboloid, and we find that, if the asymptote a_1 makes angles α and α' with the generators of the second system through B and B' respectively, the point D_1 is situated between B and B' so that

$$\frac{BD_1}{D_1B'} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha'}.$$

The second line d_2 of the pair is the parallel to a_2 through D_2, where D_1 and D_2 are symmetrically placed with respect to the centre of S.

We may remark that this pair of lines is of a different character from any of the others. If the hyperboloid S is neither degenerate nor of revolution, the lines of this pair are not focal axes, and their distances from a variable generator of S have a constant product only when the variable generator belongs to the first system. When S degenerates into a conic, the lines of this pair coincide either with the asymptotes of this conic or with the asymptotes of its focal conic, whichever are real. When S is a hyperboloid of revolution, they coincide with the axis of revolution.

4. There is another way in which we may try to generalize the theorem on the product of the focal perpendiculars. We may restate this theorem by saying that the moments of a variable tangent to a central conic about the tangents to the focal conic at the ends of its major axis have a constant product, and we are thus led to ask whether there are any pairs of fixed real lines whose moments about a variable generator of a hyperboloid have a constant product.

We shall retain the notation of the preceding paragraph, and we shall suppose for the present that the hyperboloid S is neither degenerate nor of revolution. Since the moment of the generator g of the first system of S about the fixed line d_1 is

$$\frac{l L_1 + l_1 L + m M_1 + m_1 M + n N_1 + n_1 N}{(l^2+m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}(l_1^2+m_1^2+n_1^2)^{\frac{1}{2}}},$$

the product of the moments of g about the lines d_1 and d_2 is equal to a constant multiple of

$$\frac{\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)}{\omega(t)},$$

where $\omega(t)$ is the value of $l^2+m^2+n^2$ in terms of the parameter t, and is thus a quartic in t whose zeros correspond to the four generators g that are isotropic. Remembering that the zeros of $\varphi_1(t)$ and $\varphi_2(t)$ give the generators g that meet d_1 and d_2 respectively, we see that our product of moments will be constant if d_1 meets two of the four isotropic generators of the first system while d_2 meets the remaining two. It will be constant in no other cases except the trivial ones in which one of the two lines is a generator of S of the second system.

The four isotropic generators of the first system may be divided into two pairs so that the lines of each pair are conjugate imaginaries and therefore admit real transversals. The transversals of these pairs form two linear congruences C_1 and C_2, and *the pairs of lines that satisfy our*

requirements are formed by taking an arbitrary real line of C_1 together with an arbitrary real line of C_2. It remains to show how these congruences may be defined without the use of imaginary elements.

Either of these congruences, C_1 say, consists of the transversals of two non-intersecting isotropic lines p and q which are conjugate imaginaries, and therefore any line of C_1 continues to belong to C_1 if it is rotated through an arbitrary angle about the common perpendicular of p and q. This common perpendicular may also be described as the line of intersection of the isotropic plane through p with the isotropic plane through q. It is a real line, and we shall call it the *axis* of the congruence. Now, if we have found the axis of C_1, we can construct the congruence, because all the generators of the second system of S belong to C_1, and therefore, *if we rotate the hyperboloid S as a whole about the axis of C_1, the generators of the second system will describe the congruence C_1* [10]. We can derive an alternative construction from the fact, which is easily verified, that, if a line belongs to the congruence, so do all the transversals of the perpendiculars let fall on the axis from the points of the line.

We shall now determine the axes of the congruences C_1 and C_2. These axes are the two real lines of intersection of the four isotropic planes that pass through the four isotropic generators of the first system. They are thus focal axes, and each of them is perpendicular to the planes of a system of circular sections. Now there are four focal axes that are perpendicular to planes of circular section, and we shall call them the *principal focal axes* of S. They are the four generators of a certain hyperboloid of the confocal system that meet the major axis[11], and if S is orthogonal they are generators of S itself. We have now only to decide which two of the four principal focal axes are the axes of our two congruences, and for this purpose we shall introduce the following convention. We shall say that a focal axis g' belongs to the first (or second) system if it is possible for a variable focal axis to pass continuously from coincidence with g' to coincidence with some generator of the first (or second)

---

[10]) If we restrict ourselves to rotating real generators through real angles, we shall obtain a set of ∞^2 lines of C_1, but not all the real lines of C_1. In order to obtain all the real lines of C_1 in this way we should have to admit rotations of imaginary generators through imaginary angles. Similar circumstances arise when we try to generate an ellipsoid of revolution by rotating an ellipse about an axis that does not lie in its plane.

[11]) It may be shown that the principal focal axes of S are the polar lines of the four generators of S that meet the major axis with respect to the unique orthogonal hyperboloid of the confocal system.

system of S without passing through a position in which the confocal on which it lies is one of the degenerate members of the system. We may now complete the solution of our problem by stating that *the axes of the congruences C_1 and C_2 are the two principal focal axes that belong to the second system.* Considerations of continuity show that this will be true for the given hyperboloid if it is true for any one hyperboloid of the confocal system. Now the confocal system contains one orthogonal hyperboloid, and it is easy to see that our statement is true for it. The four principal focal axes of an orthogonal hyperboloid are generators of the hyperboloid, and the two in which we are interested are generators of the second system because each of them intersects two of the isotropic generators of the first system.

Since we shall need to refer to it again, we may draw attention to the fact that, if each of the isotropic planes through a real line contains an isotropic generator of the first (or second) system of S, the line is one of the two principal focal axes of S of the second (or first) system.

When the hyperboloid degenerates into a conic, the four principal focal axes come into coincidence in pairs with the tangents to the focal conic at the ends of its major axis, and each of the congruences C_1 and C_2 takes a degenerate form consisting of all the lines that pass through a focus together with all the lines that lie in the plane of the conic. It will thus be seen that the theorem on the product of the focal perpendiculars appears as a limiting case of our result.

When the hyperboloid is of revolution, the four principal focal axes coincide with the axis of revolution, and the two congruences are coincident. We may remark that a certain number of properties of the axis of revolution of a hyperboloid of revolution may be regarded as being represented in the general case by properties of the principal focal axes. We shall see instances of this in the next two paragraphs, but we may notice here the following property which will be verified without difficulty. *Any generator of the first system of a hyperboloid may be brought into coincidence with some other generator by giving it a rotation of suitable magnitude about either of the principal focal axes of the first system.* It may be shown that these two focal axes are the only lines that possess this property except, of course, the axes of symmetry of the hyperboloid, for which the rotation is always one of 180 degrees.

5. We shall now try to generalize the theorem that the feet of the focal perpendiculars on a tangent to a central conic lie on a circle. If we remark that this theorem may be interpreted as a statement about the locus of the nearest point on a tangent to either of the tangents to the

focal conic at the ends of its major axis, we are led to attempt a generalization by examining the locus of the nearest point on a generator of a hyperboloid to a fixed straight line. We shall prove the following theorem:

The nearest point on a variable generator of the first system of a hyperboloid S to a real fixed line d which is not at infinity describes a conic[12]) *if, and only if, d is a focal axis of S, and this conic is then a central elliptic section of S and lies on a right circular cylinder whose axis is parallel to d. The conic reduces to a circle if, and only if, d is one of the two principal focal axes of the first system.*

Taking the line d as the z-axis in a rectangular coordinate system, we find that, if l, m, n, L, M, N are the line coordinates of the variable generator g of the first system, the coordinates x, y, z of the point P on g that is nearest to d are given by the equations

$$x : y : z : 1 = -mN : lN : mL - lM : l^2 + m^2.$$

Since the six coordinates of g can be expressed as quadratic functions of a parameter t, it is clear that, for a fixed line d of general position, the locus of the point P is a rational quartic which cuts every generator of the first system once only. Now the only way in which such a curve can degenerate is by breaking up into one or more of the generators g together with a curve of lower degree than the fourth, and this will happen only if the position of the point P on the generator or generators in question is indeterminate. Conversely, if any generator g yields an indeterminate position for the point P, this generator will form part of the locus.

It is easy to see that the point P is the harmonic conjugate of the point at infinity on g with respect to the pair of points where g is cut by the isotropic planes through d. The position of P on g will therefore be indeterminate if g is parallel to d, or if g lies in one of the isotropic planes through d, and it will be indeterminate in no other cases if we assume that the line d is not at infinity. The locus of P will therefore degenerate if (I) d is parallel to some generator g of S, or if (II) one of the isotropic planes through d contains a generator g of S, so that d, being a real line, is a focal axis.

We shall suppose first that d is not a generator of S, so that the cases (I) and (II) do not overlap. In case (I) the generator g that is

---

[12]) This locus is discussed by Schoenflies in the special case where the hyperboloid is orthogonal and the fixed line is one of the focal axes that cut the major axis at right-angles. (Zeitschrift für Math. u. Phys. **23** (1878), p. 276.) He states inaccurately that the locus is a rational quartic in this case.

parallel to d forms part of the locus, and it is clearly the only one that does. The remainder of the locus is thus a non-degenerate twisted cubic. In case (II) there is a generator g in each of the isotropic planes through d; these two generators form part of the locus, and they are the only ones that do. The remainder of the locus is thus a non-degenerate conic[13]).

The case in which d is a generator of S may be regarded as a particular case either of (I) or of (II). It will be seen that, when d is a generator of the same system as the generators g, the locus consists of the generator d counted twice together with a non-degenerate conic, and that, when d is a generator of the opposite system, the locus consists of the two generators g that lie in the isotropic planes through d together with the degenerate conic formed by d and the generator g that is parallel to it.

In order to identify the conic that forms the real portion of the locus when d is a focal axis, we remark that P is the middle point of the segment that the isotropic planes through d intercept on g, and that the ends of this segment lie on the generators l and m of the second system that these isotropic planes contain. It follows that P moves on the fixed plane that is parallel to and equidistant from l and m, so that we see once again that the real portion of the locus of P is a conic. The plane of this conic passes through the centre of S because it is parallel to and equidistant from two generators of the same system of S; and the conic is necessarily an elliptic section, except in the limiting cases in which it degenerates into a pair of parallel generators.

The conic lies on a right circular cylinder whose axis is parallel to d because its points at infinity lie on l and m and therefore on the tangents to the circle at infinity from the point at infinity on d.

Since the points at infinity on this conic lie on l and m, the condition that it should be a circle is that l and m should be isotropic lines, or, in other words, that d should be so situated that each of the isotropic planes through it contains an isotropic generator of the second system; and this, as we have seen in the preceding paragraph, is the condition that d should be one of the principal focal axes of the first system. When

---

[13]) We may prove these statements in another way. The point P lies on the line in which the plane through g parallel to d is cut by the perpendicular plane through d. In case (I) the former plane passes through the generator of the second system that is parallel to d, and therefore P lies on a right circular cylinder that contains a generator of S. In case (II) the former plane touches a cylinder circumscribed to S of which d is a focal line, and therefore P lies on a right circular cylinder that has double contact with S.

this condition is satisfied, the conic reduces to the central circular section of S whose plane is perpendicular to d.

6. It is of interest to compare the results that we have just given with those that we obtain when we examine the locus of the foot of the perpendicular from a real fixed point Q on the variable generator g. It has been shown by L. Vietoris[14]) that this locus, which is in general a rational quartic, degenerates if Q lies on one or other of a certain pair of non-intersecting lines each of which is perpendicular to the planes of a system of circular sections, and that the locus then reduces to a circular section of the system whose planes are not perpendicular to the line on which Q lies. We shall indicate briefly the proof of this result because we wish to point out that the two lines that are mentioned are identical with the lines that we have called the principal focal axes of the *second* system.

It will be evident on writing down the coordinates of the foot F of the perpendicular from a fixed point Q on the generator g that the locus is in general a rational quartic which cuts the generators g once only. Degeneration will thus occur if one or more of the generators g yield an indeterminate position for the point F. Now F is the harmonic conjugate of the point at infinity on g with respect to the pair of points where g is cut by the isotropic cone whose vertex is at Q, and therefore the position of F on g is indeterminate if g touches this cone at infinity, that is, if g is isotropic and lies in an isotropic plane through Q. Hence, Q being real and not lying at infinity, degeneration takes place if, and only if, Q lies on the intersection of two isotropic planes each of which contains an isotropic generator g; and the locus then consists of these two isotropic generators together with a conic whose points at infinity are contributed by the two remaining isotropic generators g. In other words, *the locus degenerates if, and only if, Q lies on one of the principal focal axes of the second system,* and the real portion of the locus is then one of the circular sections of the system whose planes are not perpendicular to the principal focal axis of the second system on which Q lies.

7. In conclusion we shall establish one other theorem on the generators of a hyperboloid which again involves the principal focal axes. It generalizes the well known property of the orthogonal hyperboloid that the planes joining a generator of the first system to the principal focal axes of the second system (which are now generators of the hyperboloid) are constantly at right-angles. The theorem which we wish to prove is the following:

---

[14]) Wiener Berichte 125 (1916), p. 280.

The two points where the principal focal axes of the second system of a hyperboloid are met by any generator of the confocal on which they lie have the property that the planes joining them to a variable generator of the first system of the hyperboloid are constantly at right-angles.

The equations of the planes joining a variable generator g of the first system of the hyperboloid S to two fixed points A and B can be written so as to contain a parameter t in the second degree, and the condition that these planes should be at right-angles is therefore of the fourth degree in t. If this condition is satisfied for more than four distinct positions of the generator g, it will be satisfied identically.

If A and B lie one on each of the two principal focal axes of the second system, our condition is satisfied in each of the four cases in which the generator g is isotropic, for the planes that join an isotropic generator g to A and B satisfy the condition of perpendicularity in virtue of the fact that one of them is an isotropic plane.

If the hyperboloid S is not orthogonal, and if A and B satisfy the further condition of lying on the same generator of the first system of the confocal S' that contains all the principal focal axes, our condition is satisfied also in the two cases in which the generator g meets the line AB, because then the planes joining g to A and B are coincident, and the plane with which they coincide is isotropic, being a common tangent plane of the two confocal quadrics S and S'. Our condition is thus satisfied in six distinct cases, and therefore it is satisfied identically.

If the hyperboloid S is orthogonal, any restriction on A and B beyond that of lying one on each of the principal focal axes of the second system is irrelevant, because these focal axes are now generators of S and meet all the generators g. If we wish to complete our proof in this case, we can no longer employ the argument that we have just given in order to establish the last two of the six cases in which our condition is satisfied, but we may use instead the fact that this condition is satisfied in the two cases in which g meets the major axis.

It is easy to prove conversely that, if two fixed points have the property in which we are interested, they must lie one on each of the two principal focal axes of the second system, and that, unless the hyperboloid is orthogonal, they must lie on the same generator of the first system of the confocal that contains the principal focal axes.

A corollary, which is perhaps worth noticing, may be deduced from our theorem by using the fact that, if the planes that join a variable line to two fixed points A and B are constantly at right-angles, the distances of the line from two fixed points that divide the segment AB harmoni-

cally have a constant ratio. We thus see that *the distances of a variable generator of the first system of a hyperboloid from two fixed points have a constant ratio if the points lie on a generator of the first system of the confocal that contains the principal focal axes and divide harmonically the segment intercepted on this generator by the two principal focal axes of the second system.* We see similarly that, in order that a pair of fixed points should have this property for an orthogonal hyperboloid, it is sufficient that they should divide harmonically an arbitrary segment whose ends lie on the two principal focal axes of the second system. There are thus ∞^2 pairs of fixed points that have this property for the general hyperboloid, and there are ∞^3 for the orthogonal hyperboloid.

(Eingegangen am 6. 11. 1929.)

Berichtigung

zu der Arbeit von K. Mahler: „Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen“, Math. Annalen **101**, S. 342—366.

Bei der Korrektur ist mir entgangen, daß ich auf Seite 351 eine Abschätzung irrtümlicherweise für die Funktion $E(z')$ benutzt habe, die nur für ihren Logarithmus richtig ist. Um diesen Fehler zu beseitigen, sind folgende Änderungen zu treffen:

S. 351, Z. 14—15: Dann gibt es eine positive Konstante c, so daß für $k \to \infty$

$$\log |E(z')| \sim -c\,\varrho_1^k$$

ist.

S. 352, Z. 19:

$$-\frac{1}{2} p^{1+\frac{1}{n}} \gamma_1 \varrho_1^k \leqq \log |E(z')| \leqq -2 p^{1+\frac{1}{n}} \gamma_1 \varrho_1^k.$$

S. 352, Z. 23:

$$\log |E(z')| \sim -p^{1+\frac{1}{n}} \gamma_1 \varrho_1^k.$$

S. 358, Z. 5—7:

$$0 < |\mathfrak{E}_p^{(k)}(z)| \leqq e^{\left(c_3 p - \frac{\gamma_1}{2} p^{1+\frac{1}{n}}\right) \varrho_1^k}$$

oder für $p > \left(\frac{4 c_3}{c_1}\right)^n$:

$$0 < |\mathfrak{E}_p^{(k)}(z)| \leqq e^{-\frac{\gamma_1}{4} p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k}.$$

Göttingen, 8. 5. 1929.

Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i)$.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Formulierung des Resultates.

Hurwitz hat den folgenden Satz bewiesen[1]):

Satz 1. *Zu jeder irrationalen Zahl α gibt es unendlich viele Paare ganzer rationaler Zahlen p, q derart, daß*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$$

ist. Dagegen gibt es irrationale Zahlen α, für welche die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{c\, q^2},$$

wenn $c > \sqrt{5}$ ist, höchstens durch endlich viele Paare ganzer rationaler Zahlen p, q befriedigt werden kann; z. B. ist $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eine solche Zahl.

Für die Approximation einer *komplexen* Zahl α durch Zahlen der Form $\frac{p}{q}$, wo p, q ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i)$ sind, hat Minkowski gezeigt, daß stets

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{1}{|q|^2}$$

erreicht werden kann[2]). Wieweit sich dabei die Zahl $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$ noch verkleinern

[1]) Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche, Math. Annalen **39** (1891), S. 279—284. — Vereinfachte Beweise finden sich in den Büchern des Verfassers: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1913, 2. Aufl. 1929, S. 49—52; Irrationalzahlen, 1921, S. 129—131.

[2]) Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, § 39.

läßt, war bis jetzt eine offene Frage. Sie wird beantwortet durch den folgenden Satz, der das genaue Analogon des Hurwitzschen Satzes ist:

Satz 2. *Zu jeder komplexen Zahl α, die nicht dem Körper $\mathfrak{K}(i)$ angehört, gibt es unendlich viele Paare ganzer Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{K}(i)$ derart, daß*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}\,|q|^2}$$

ist. Dagegen gibt es komplexe, nicht dem Körper $\mathfrak{K}(i)$ angehörende Zahlen α, für welche die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{c\,|q|^2},$$

wenn $c > \sqrt{3}$ ist, höchstens durch endlich viele Paare ganzer Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{K}(i)$ befriedigt werden kann; z. B. ist $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ eine solche Zahl.

Da die Beweise von Satz 1 sämtlich die Entwicklung der Zahl α in einen regelmäßigen Kettenbruch benutzen, lag es nahe, den Beweis von Satz 2 mit Hilfe komplexer Kettenbrüche, deren Theorie Hurwitz entwickelt hat[3]), zu versuchen. Jedoch habe ich auf diese Weise nicht durchzudringen vermocht und habe dann den Beweis auf anderer Grundlage erbracht.

§ 2.

Beweis des zweiten Teiles von Satz 2.

Sehr einfach ist der zweite Teil von Satz 2 zu beweisen, weshalb dieser Teil zuerst behandelt werden soll. Sind p, q ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i)$, und zwar $q \neq 0$, so definieren wir eine komplexe Zahl δ durch die Formel

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2}, \tag{1}$$

und müssen dann zeigen, daß, wenn $c > \sqrt{3}$ ist, die Ungleichung $|\delta| < \frac{1}{c}$ höchstens für endlich viele Paare p, q gelten kann.

Aus (1) folgt durch Multiplikation mit q und Gliederumstellung

$$\frac{i\sqrt{3}}{2}q - \frac{\delta}{q} = p - \frac{q}{2},$$

und hieraus durch Quadrieren

$$\frac{\delta^2}{q^2} - i\sqrt{3}\,\delta = p^2 - pq + q^2.$$

[3]) Über die Entwicklung complexer Größen in Kettenbrüche, Acta Mathematica 11 (1888), S. 187—200.

Nun steht auf der rechten Seite eine ganze von Null verschiedene[4]) Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i)$. Ihr absoluter Betrag ist also mindestens gleich 1 und man erhält

$$\frac{|\delta|^2}{|q|^2} + \sqrt{3}\,|\delta| \geqq 1.$$

Ist nun $|\delta| < \frac{1}{c}$, wo $c > \sqrt{3}$, so ist erst recht

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{1}{|q|^2} + \frac{\sqrt{3}}{c} > 1,$$

oder also

$$|q|^2 < \frac{1}{c\,(c - \sqrt{3})}.$$

Daher ist q beschränkt und nach (1) ist dann auch p beschränkt. Also sind in der Tat nur endlich viele Paare p, q möglich.

§ 3.

Ein Hilfssatz über Cassinische Kurven.

Ist a eine komplexe, c eine positive Konstante, so stellt die Gleichung

$$|z^2 - a| = c$$

in der komplexen z-Ebene eine Cassinische Kurve dar. Für $c = |a|$ ist es die achterförmige Lemniskate; für $c < |a|$ besteht sie aus zwei getrennten Ovalen; für $c > |a|$ ist sie *eine* geschlossene Kurve mit den Punkten $\pm\sqrt{a}$ im Innern und speziell für $a = 0$ ein Kreis. Im folgenden wird uns insbesondere die Kurve

$$|z^2 - a| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2} \tag{2}$$

interessieren, die also *nur eine* geschlossene Kurve darstellt. Ihr Inneres wird charakterisiert durch die Ungleichung

$$|z^2 - a| < \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2}.$$

Wir nennen zwei Zahlen bzw. Punkte der komplexen Ebene z_1, z_2 *homolog*, wenn die Differenz $z_1 - z_2$ eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i)$, also in der Ebene ein Gitterpunkt ist; wir schreiben dann $z_1 \equiv z_2$. Mit dieser Terminologie beweisen wir den

---

[4]) Wenn nämlich $p^2 - pq + q^2 = 0$ wäre, so wäre $\frac{p}{q} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, während $\frac{p}{q}$ doch in Wahrheit dem Körper $\mathfrak{K}(i)$ angehört.

Hilfssatz. *Die Cassinische Kurve* (2) *enthält zu jedem Punkt z der komplexen z-Ebene einen homologen Punkt im Innern, mit Ausnahme der drei folgenden Fälle, in denen sich homologe Punkte nur auf dem Rande finden:*

$$\text{I.}\quad a=0,\qquad z=\frac{1+i}{2},$$

$$\text{II.}\quad a=\frac{3}{4},\qquad z=\frac{i}{2},$$

$$\text{III.}\quad a=-\frac{3}{4},\qquad z=\frac{1}{2}.$$

Bemerkung. Zu jedem Punkt z gibt es augenscheinlich einen homologen z_1 im Innern oder auf dem Rand das Quadrats mit den Ecken

$$\frac{1+i}{2},\quad \frac{1-i}{2},\quad \frac{-1+i}{2},\quad \frac{-1-i}{2}.$$

Dann ist $|z_1|^2 \leqq \frac{1}{2}$, und folglich enthält die Kurve

$$|z^2-a|=|a|+\frac{1}{2}$$

gewiß zu jedem Punkt bereits einen homologen im Innern oder auf dem Rand. Der Hilfssatz ist daher trivial, wenn

$$\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{3}|a|^2}>|a|+\frac{1}{2},$$

d. h. wenn $|a|>3$ ist. Wir werden ihn aber gerade für kleinere Werte von $|a|$ benötigen und zwar für $\frac{1}{16}\leqq|a|\leqq\frac{3}{4}$, so daß gerade die Ausnahmsfälle II und III, in denen er keine Verschärfung mehr zuläßt, für uns wichtig sind.

Beweis des Hilfssatzes. Was zunächst die drei Ausnahmsfälle anbelangt, so erkennt man ohne weiteres die folgenden Tatsachen:

I. Die Kurve (Kreis)

$$|z^2|=\frac{1}{2}$$

enthält die vier zueinander homologen Punkte

$$\frac{1+i}{2},\quad \frac{1-i}{2},\quad \frac{-1+i}{2},\quad \frac{-1-i}{2}$$

auf dem Rand und keine weiteren dazu homologen Punkte im Innern oder auf dem Rand.

II. Die Kurve

$$\left|z^2-\frac{3}{4}\right|=1$$

enthält die sechs zueinander homologen Punkte

$$\pm\frac{i}{2},\quad \pm\frac{i}{2}+1,\quad \pm\frac{i}{2}-1$$

auf dem Rand und keine weiteren dazu homologen Punkte im Innern oder auf dem Rand.

III. Die Kurve

$$\left|z^2+\frac{3}{4}\right|=1$$

enthält die sechs zueinander homologen Punkte

$$\pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{1}{2}+i,\quad \pm\frac{1}{2}-i$$

auf dem Rand und keine weiteren dazu homologen Punkte im Innern oder auf dem Rand.

Damit sind die Ausnahmsfälle erledigt. Wir wenden uns jetzt dem allgemeinen Fall zu. Zu jedem Punkt z gibt es genau *einen* äquivalenten $z_1 = x + yi$, für welchen

$$(3)\qquad 0 \leqq x < 1,\qquad -\frac{1}{2} < y \leqq \frac{1}{2}$$

ist. Wir setzen dann

$$(4)\qquad \begin{cases} |(x+yi)^2 - a|^2 = P, \\ |(x-1+yi)^2 - a|^2 = Q \end{cases}$$

und wollen zeigen, daß, wenn keiner der drei Ausnahmsfälle vorliegt, mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$(5)\qquad P < \frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2,\qquad Q < \frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2$$

besteht (in den Ausnahmsfällen gilt beidemal Gleichheit). Damit wird dann der Hilfssatz bewiesen sein.

Setzt man $a = |a|e^{\varphi i}$, so ist

$$(6)\qquad \begin{cases} P = |x^2 - y^2 + 2xyi - |a|\cos\varphi - |a|\sin\varphi\cdot i|^2 \\ \quad = (x^2 - y^2 - |a|\cos\varphi)^2 + (2xy - |a|\sin\varphi)^2 \\ \quad = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + |a|^2 - 2(x^2-y^2)|a|\cos\varphi - 4xy|a|\sin\varphi, \end{cases}$$

und Q entsteht hieraus, indem man x durch $x-1$ ersetzt. Daraus ergibt sich

$$(1-x)P + xQ = x(1-x)(1-3x+3x^2) + 2x(1-x)y^2 + y^4 + |a|^2 - 2[x(1-x) - y^2]|a|\cos\varphi.$$

Indem man die Abkürzungen

$$(7)\qquad x(1-x) = u,\qquad y^2 = v$$

einführt, wobei dann nach (3)

$$(8)\qquad 0 \leqq u \leqq \frac{1}{4}, \qquad 0 \leqq v \leqq \frac{1}{4}$$

ist, nimmt die vorige Gleichung die einfachere Gestalt an:

$$(9)\quad (1-x)P + xQ = u - 3u^2 + 2uv + v^2 + |a|^2 - 2(u-v)|a|\cos\varphi.$$

Wenn nun erstens $v = u$ ist, folgt aus (9)

$$(1-x)P + xQ = u + |a|^2,$$

also wegen (8) gewiß

$$(1-x)P + xQ \leqq \frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2,$$

und zwar Gleichheit nur für

$$a = 0, \quad u = v = \frac{1}{4}; \quad \text{also nach (7) und (3):} \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Wenn zweitens $v > u$ ist, folgt aus (9)

$$(1-x)P + xQ \leqq u - 3u^2 + 2uv + v^2 + |a|^2 + 2(v-u)|a|,$$

und zwar Gleichheit nur, wenn $|a|\cos\varphi = |a|$, also wenn a reell und $\geqq 0$ ist. Wegen $0 \leqq v \leqq \frac{1}{4}$ folgt hieraus weiter

$$(1-x)P + xQ \leqq u - 3u^2 + \frac{u}{2} + \frac{1}{16} + |a|^2 + \frac{|a|}{2} - 2u|a|,$$

und zwar Gleichheit nur für

$$a \geqq 0, \quad v = \frac{1}{4}; \quad \text{also nach (7) und (3):} \quad y = \frac{1}{2}.$$

Jetzt ist aber die rechte Seite gleich

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2 - \left(\sqrt{3}\,u - \frac{3-4|a|}{4\sqrt{3}}\right)^2.$$

Also ergibt sich

$$(1-x)P + xQ \leqq \frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2,$$

und zwar Gleichheit nur für

$$a \geqq 0, \quad y = \frac{1}{2}, \quad u = \frac{3-4|a|}{12} = \frac{3-4a}{12};$$

also nach (7):

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Wenn endlich $v < u$ ist, folgt aus (9)

$$(1-x)P + xQ \leqq u - 3u^2 + 2uv + v^2 + |a|^2 + 2(u-v)|a|,$$

und zwar Gleichheit nur für $|a|\cos\varphi = -|a|$, also wenn a reell und $\leqq 0$ ist. Die rechte Seite ist jetzt gleich

$$\frac{4}{3}v^2 - \frac{4}{3}|a|v + \frac{v}{3} + \frac{4}{3}|a|^2 + \frac{1}{3}|a| + \frac{1}{12} - \left(\frac{2v+2|a|+1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}u\right)^2$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2 - \left(\frac{1}{4} - v\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}v - \frac{4}{3}|a|\right) - \left(\frac{2v+2|a|+1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}u\right)^2.$$

Für $|a| < \frac{1}{2}$ folgt hieraus, weil $v < u \leqq \frac{1}{4}$ ist,

$$(1-x)P + xQ < \frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2$$

mit Ausschluß von Gleichheit. Für $|a| \geqq \frac{1}{2}$ ist aber

$$\frac{2v+2|a|+1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}u \geqq \frac{2v+2|a|+1}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4v+4|a|-1}{4\sqrt{3}} > 0,$$

und folglich

$$(1-x)P + xQ \leqq \frac{4}{3}v^2 - \frac{4}{3}|a|v + \frac{v}{3} + \frac{4}{3}|a|^2 + \frac{1}{3}|a| + \frac{1}{12} - \left(\frac{4v+4|a|-1}{4\sqrt{3}}\right)^2,$$

und zwar Gleichheit nur für

$$a \leqq 0, \quad u = \frac{1}{4}; \quad \text{also nach (7):} \quad x = \frac{1}{2}.$$

Jetzt ist die rechte Seite gleich

$$v^2 - 2|a|v + \frac{v}{2} + |a|^2 + \frac{|a|}{2} + \frac{1}{16},$$

und dieser Ausdruck nimmt wegen $|a| \geqq \frac{1}{2}$ im Intervall $0 \leqq v \leqq \frac{1}{4}$ seinen maximalen Wert nur für $v = 0$ an, so daß sich ergibt

$$(1-x)P + xQ \leqq |a|^2 + \frac{|a|}{2} + \frac{1}{16},$$

und zwar Gleichheit nur für

$$a \leqq 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad v = 0; \quad \text{also nach (7):} \quad y = 0.$$

Nun ist aber die rechte Seite gleich

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2 - \frac{(3-4|a|)^2}{48};$$

daher ergibt sich weiter

$$(1-x)P + xQ \leqq \frac{1}{4} + \frac{4}{3}|a|^2,$$

und zwar Gleichheit nur für

$$a = -\frac{3}{4}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 0.$$

Zusammenfassend erhalten wir das Resultat

$$(1-x)P+xQ\leqq\frac{1}{4}+\frac{4}{3}|a|^2,$$

und zwar Gleichheit nur in den folgenden drei Fällen:

$$\begin{array}{llll} \text{A.} & a=0, & x=\frac{1}{2}, & y=\frac{1}{2}, \\ \text{B.} & a\geqq 0, & x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{a}{3}}, & y=\frac{1}{2}, \\ \text{C.} & a=-\frac{3}{4}, & x=\frac{1}{2}, & y=0. \end{array}$$

Wenn wir nun annehmen, daß keine der beiden Ungleichungen (5) besteht, so ist

$$P\geqq\frac{1}{4}+\frac{4}{3}|a|^2,\qquad Q\geqq\frac{1}{4}+\frac{4}{3}|a|^2,$$

also auch

$$(1-x)P+xQ\geqq\frac{1}{4}+\frac{4}{3}|a|^2,$$

was aber nach dem Bewiesenen höchstens in den drei eben genannten Fällen eintreten kann. Von diesen gehören die Fälle A und C bereits zu den schon erledigten drei Ausnahmsfällen des zu beweisenden Hilfssatzes, so daß uns nur noch der Fall B zu interessieren braucht. In diesem ist (vgl. (6))

$$P=(x^2-y^2-a)^2+(2xy)^2$$

$$=\left(\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2-\frac{1}{4}-a\right)^2+\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2=\frac{4a^2}{9}+\frac{2a}{3}+\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\left(1-\frac{4a}{3}\right),$$

und Q entsteht hieraus, indem x^2 durch $(x-1)^2$ ersetzt, also einfach $\sqrt{\frac{a}{3}}$ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen wird.

Soll also keine der beiden Ungleichungen (5) gelten, so muß

$$\frac{4a^2}{9}+\frac{2a}{3}+\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\left(1-\frac{4a}{3}\right)\geqq\frac{1}{4}+\frac{4}{3}a^2$$

sein, und zwar für beide Vorzeichen der Quadratwurzel. Hieraus folgt, indem man alles nach links bringt, speziell für das untere Vorzeichen

$$\left(1-\frac{4a}{3}\right)\left(\frac{2a}{3}-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\geqq 0,$$

und wenn man mit $\frac{2a}{3}+\sqrt{\frac{a}{3}}$ multipliziert,

$$\left(1-\frac{4a}{3}\right)\left(\frac{4a^2}{9}-\frac{a}{3}\right)\geqq 0,$$

oder etwas anders geschrieben:

$$\frac{a}{3}\left(1-\frac{4a}{3}\right)^2 \leqq 0.$$

Das ist aber wegen $a \geqq 0$ nur möglich für $a = 0$ und für $a = \frac{3}{4}$. Für $a = 0$ kommt aber, da es sich ja um den obigen Fall B handelt,

$$a = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2},$$

und für $a = \frac{3}{4}$ kommt

$$a = \frac{3}{4}, \quad x = 0, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Das sind aber wieder zwei von den drei bereits erledigten Ausnahmsfällen des Hilfssatzes. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

§ 4.

Anwendung des Dirichletschen Schubladenverfahrens.

Sei α eine komplexe Zahl, die nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i)$ angehört. Wir betrachten, unter n eine beliebig große natürliche Zahl verstehend, im Körper $\mathfrak{R}(i)$ die $(n+1)^2$ ganzen Zahlen

$$q = a + bi \qquad (a, b = 0, 1, \ldots, n)$$

und bestimmen zu jeder eine ganze Zahl p des Körpers $\mathfrak{R}(i)$ eindeutig durch die Forderung, daß, wenn

$$\alpha q - p = x + yi \tag{10}$$

gesetzt wird,

$$0 \leqq x < 1, \quad 0 \leqq y < 1$$

ist. Die $(n+1)^2$ Zahlen (10) sind alle voneinander verschieden, weil α keine Zahl des Körpers $\mathfrak{R}(i)$ ist. Teilt man das Quadrat mit den Ecken

$$0, \ 1, \ i, \ 1+i$$

in n^2 Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{n}$, so müssen von den $(n+1)^2$ Zahlen der Form (10) notwendig einmal zwei verschiedene dem gleichen Teilquadrat angehören, etwa $\alpha q_1 - p_1$ und $\alpha q_2 - p_2$. Dann ist aber

$$|\alpha(q_1 - q_2) - (p_1 - p_2)| \leqq \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Für $n > 1$ folgt hieraus $q_1 \neq q_2$, und außerdem ist $|q_1 - q_2| \leqq n\sqrt{2}$. Daher ist

$$\left|\alpha - \frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2}\right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{|q_1 - q_2|\, n} \leqq \frac{2}{|q_1 - q_2|^2}.$$

Setzt man also

$$\frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2} = \frac{p}{q},$$

wo p und q *relativ prime* ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{R}(i)$ sind[5]), so ist erst recht

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{|q|^n} \leqq \frac{2}{|q|^2}.$$

Da n beliebig groß sein darf, ist hiermit die Existenz unendlich vieler Paare ganzer relativ primer Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{R}(i)$ nachgewiesen, für welche die Ungleichung gilt:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{2}{|q|^2}.$$

§ 5.

Beweis des ersten Teiles von Satz 2.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun auch den ersten Teil von Satz 2 beweisen. Wir definieren eine Zahl δ durch die Formel

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{\delta}{q^2}. \tag{11}$$

Nach § 4 gibt es unendlich viele Paare von ganzen relativ primen Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{R}(i)$, für welche

$$|\delta| \leqq 2$$

ist, und weil α nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i)$ angehört, ist $\delta \neq 0$. Zu jedem solchen Paar p, q kann man zwei ganze Zahlen p_1, q_1 des Körpers $\mathfrak{R}(i)$ so bestimmen, daß

$$p q_1 - q p_1 = 1 \tag{12}$$

ist. Die Zahl q_1 ist hierdurch nicht eindeutig bestimmt, sondern nur modulo q. Der Bruch $\frac{q_1}{q}$ darf also durch jede *homologe* Zahl (Definition S. 535) ersetzt werden. Unter allen homologen Zahlen wählen wir eine derart aus, daß

$$\left|\left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta}\right)^2 - \frac{1}{4\delta^2}\right| < \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{16|\delta|^4}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12|\delta|^4}} \tag{13}$$

ist. Nach dem Hilfssatz ist das möglich, außer wenn

$$\frac{1}{4\delta^2} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta} \equiv \frac{i}{2}$$

oder wenn

$$\frac{1}{4\delta^2} = -\frac{3}{4}, \qquad \frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta} \equiv \frac{1}{2}$$

[5]) Das kann man, weil im Körper $\mathfrak{R}(i)$ bekanntlich jedes Ideal ein Hauptideal ist; es gibt sogar einen Euklidischen Algorithmus.

sein sollte. Im ersten Fall ergibt sich

$$\frac{q_1}{q} = \frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

und im zweiten Fall

$$\frac{q_1}{q} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Da aber die Zahlen $\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ nicht dem Körper $\mathfrak{K}(i)$ angehören, also unmöglich homolog zu $\frac{q_1}{q}$ sein können, so können diese Ausnahmsfälle nicht eintreten, so daß die Ungleichung (13) unter allen Umständen erfüllbar ist.

Zu jedem der unendlich vielen Paare p, q, für welche $|\delta| \leqq 2$ ist, wählen wir nun ein Paar p_1, q_1 gemäß den Forderungen (12), (13) aus, was offenbar wieder unendlich viele verschiedene relativ prime Paare p_1, q_1 gibt, und darunter auch unendlich viele, für welche $q_1 \neq 0$ ist (wegen (12) ist das sicher der Fall, wenn $|q| > 1$ ist). Setzen wir dann

$$\alpha - \frac{p_1}{q_1} = \frac{\delta_1}{q_1^2}, \tag{14}$$

so ist

$$\frac{\delta_1}{q_1^2} = \alpha - \frac{p_1}{q_1} = \frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1} + \frac{\delta}{q^2} = \frac{1}{q q_1} + \frac{\delta}{q^2},$$

also

$$\delta_1 = \frac{q_1}{q} + \delta\left(\frac{q_1}{q}\right)^2 = \delta\left[\left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta}\right)^2 - \frac{1}{4\delta^2}\right].$$

Wegen (13) ist daher

$$|\delta_1| < |\delta| \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12|\delta|^4}},$$

oder etwas anders geschrieben:

$$|\delta_1|^2 < \frac{|\delta|^2}{4} + \frac{1}{12|\delta|^2}. \tag{15}$$

Nun ist $|\delta| \leqq 2$, also $|\delta|^2 \leqq 4$. Wenn einmal $|\delta|^2 \geqq 2$ ist, so ist nach (15)

$$|\delta_1|^2 < \underset{2 \leqq x \leqq 4}{\mathrm{Max}} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{12x}\right) = \frac{4}{4} + \frac{1}{12 \cdot 4} < 2.$$

Daher ist von den beiden Zahlen $|\delta|^2$, $|\delta_1|^2$ immer mindestens eine kleiner als 2. Es gibt also auch unendlich viele Paare relativ primer Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{K}(i)$, für welche die durch (11) definierte Zahl δ der Ungleichung $|\delta|^2 < 2$ genügt. Wenn wir zu jedem solchen Paar p, q wieder ein Paar p_1, q_1 gemäß den Forderungen (12), (13) bestimmen, so ist wieder unendlich oft $q_1 \neq 0$, und wenn wir dann die Zahl δ_1 durch (14) definieren,

gilt wieder die Ungleichung (15). In dieser ist jetzt $|\delta|^2 < 2$. Wenn dann einmal $|\delta|^2 \geqq 1$ ist, so folgt aus (15)

$$|\delta_1|^2 < \operatorname*{Max}_{1 \leqq x \leqq 2}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{12x}\right) = \frac{2}{4} + \frac{1}{12 \cdot 2} < 1.$$

Daher ist von den beiden Zahlen $|\delta|^2$, $|\delta_1|^2$ immer mindestens eine kleiner als 1. Es gibt also auch unendlich viele Paare relativ primer Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{K}(i)$, für welche die durch (11) definierte Zahl δ der Ungleichung $|\delta|^2 < 1$ genügt. Wenn wir zu jedem solchen Paar wieder ein Paar p_1, q_1 gemäß den Forderungen (12), (13) bestimmen, so ist wieder unendlich oft $q_1 \neq 0$, und wenn wir dann die Zahl δ_1 durch (14) definieren, gilt wieder die Ungleichung (15). In dieser ist jetzt $|\delta|^2 < 1$. Wenn dann einmal $|\delta|^2 \geqq \frac{1}{3}$ ist, so ist nach (15)

$$|\delta_1|^2 < \operatorname*{Max}_{\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{12x}\right).$$

Diesmal wird das Maximum an beiden Enden des Intervalles erreicht und ist gleich $\frac{1}{3}$; also ist jetzt $|\delta_1|^2 < \frac{1}{3}$. Von den beiden Zahlen $|\delta|^2$, $|\delta_1|^2$ ist also immer mindestens eine kleiner als $\frac{1}{3}$. Es gibt daher auch unendlich viele Paare p, q, für welche $|\delta|^2 < \frac{1}{3}$, also $|\delta| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist. Damit ist der erste Teil von Satz 2 bewiesen. Der zweite Teil wurde schon in § 2 erledigt.

(Eingegangen am 1. 5. 1930.)

Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen.

Von

Gottfried Köthe in Bonn.

In Teil I der vorliegenden Arbeit werden mit idealtheoretischen Hilfsmitteln nichtkommutative Ringe untersucht, zu deren Erforschung man durch folgende Überlegung geführt wird: Ein Ring $\mathfrak{o}$, der den Doppelkettensatz für Rechtsideale erfüllt und kein nilpotentes Ideal umfaßt, ist nach E. Artin und E. Noether[1]) direkte Summe von endlich vielen zweiseitig einfachen Idealen $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n$. Für zwei Elemente a und b aus $\mathfrak{o}$ mit den entsprechenden Zerlegungen $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ gelten die Verknüpfungsregeln $a + b = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n)$ und $a\,b = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots + a_n\,b_n$. Die Addition und Multiplikation spielt sich also nur unter den Komponenten derselben $\mathfrak{a}_i$ ab.

Es liegt die Vermutung nahe, daß man eine ähnliche Struktur bekommt, wenn man nur verlangt, daß jedes zweiseitige Ideal des Ringes ein zweiseitig einfaches umfaßt, das den Doppelkettensatz erfüllt. Es zeigt sich nun, daß ein solcher „transzendent reduzibler Ring" $\mathfrak{o}$ isomorph wird einem „transzendent vollständig reduziblen" $\mathfrak{o}^* = \sum\limits_{\alpha} \mathfrak{a}_\alpha^*$, den man so bekommt: Jedes zweiseitig einfache Ideal $\mathfrak{a}_\alpha$ in $\mathfrak{o}$ besitzt ein Einheitselement e_α. Jedes Element x aus $\mathfrak{o}$ hat die „Komponente" $x\,e_\alpha$ in $\mathfrak{a}_\alpha$. $\mathfrak{o}^*$ hat nun zu Elementen die im allgemeinen unendlichen Summen $\sum\limits_{\alpha} x\,e_\alpha^*$.

---

[1]) E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. d. math. Sem. d. Univ. Hamburg **5** (1927), S. 251; E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschr. **30**, S. 641, zitiert als N. Ich möchte nicht versäumen, Fräulein Noether für die Anregung zu vorliegender Arbeit und für viele kritische Bemerkungen und Ratschläge zu danken.

Die Addition und Multiplikation zweier Elemente von $\mathfrak{o}^*$ spielt sich ebenfalls nur in den Komponenten mit gleichem Index ab. Die Zuordnung $x \rightarrow \sum_{\alpha} x e_{\alpha}^*$ ist nun ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^*$.

In I § 4 untersuchen wir die Darstellungstheorie der transzendent reduziblen Ringe $\mathfrak{o}$, die sich als weitgehend analog erweist mit der der Ringe, die den Doppelkettensatz erfüllen und kein nilpotentes Ideal enthalten.

In § 5 betrachten wir allgemeiner auch solche Ringe, in denen Nilideale zugelassen sind, und leiten mit denselben Methoden Sätze über ihre Struktur ab. Diese Ringe sind als weiteste bisher behandelte Verallgemeinerung der Ringe vom Typus der hyperkomplexen Systeme anzusehen.

In II wird mit den algebraischen Hilfsmitteln von I die Darstellungstheorie der geschlossenen kontinuierlichen Gruppen in möglichster Analogie zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen entwickelt. Die von Weyl und Peter[8]) ausgebildeten, stark mit analytischen Gesichtspunkten durchsetzten Methoden werden so weit als möglich durch algebraische ersetzt oder, wo das nicht möglich ist, als transzendente Hilfsmittel zum Nachweis algebraischer Tatsachen gedeutet.

Es zeigt sich, daß die Darstellungstheorie wesentlich darauf beruht, daß der Ring $\mathfrak{o}$ der stetigen Funktionen auf $\mathfrak{G}$, den Weyl und Peter eingeführt haben, ein transzendent reduzibler Ring ist, dessen einfache Linksideale genau wie bei den endlichen Gruppen alle irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ liefern. Wir bekommen die Übersicht über alle Darstellungen von $\mathfrak{G}$ allein aus der idealtheoretischen Struktur von $\mathfrak{o}$.

Es sei noch erwähnt, daß die ganze Darstellungstheorie, nämlich der Inhalt des Hauptsatzes von § 8 und die vollständige Reduzibilität jeder Darstellung ohne Verwendung einer unitären Normierung abgeleitet wird, genau so wie es bei den endlichen Gruppen möglich ist. Die Analogie mit den endlichen Gruppen wird besonders deutlich, wenn wir neben $\mathfrak{o}$ noch den Gruppenring $\mathfrak{g}$ der kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ einführen, der in § 6 definiert wird.

Der zu $\mathfrak{o}$ isomorphe transzendent vollständig reduzible Ring, den es nach den allgemeinen Methoden von I gibt, fällt zusammen mit dem Ring $\mathfrak{o}^*$, dessen Elemente die Fourierreihen der Gruppenzahlen nach dem unitär orthogonalen Funktionensystem der Komponenten $e_{ik}^{(\beta)}(s)$ der sämtlichen inäquivalenten irreduziblen unitären Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$

[8]) F. Peter und H. Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Annalen 97, S. 737, zitiert als W.

sind. Aus der Isomorphie $\mathfrak{o} \cong \mathfrak{o}^*$ folgt die Abgeschlossenheit des Systems der $e_{ik}^{(\beta)}(s)$ [3]).

In § 9 betrachten wir noch den Ring $\bar{\mathfrak{o}}$ der absolut quadratisch integrierbaren Gruppenzahlen. Er besitzt ein Radikal $\mathfrak{c}$, der Restklassenring $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{c}$ wird wieder transzendent reduzibel. Auch in $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{c}$ bilden die $e_{ik}^{(\beta)}(s)$ ein abgeschlossenes Funktionensystem, das nach dem Satz von Fischer-Riesz auch vollständig ist. Damit ist dieses Resultat von Weyl und Peter auf einem Wege abgeleitet, auf dem die algebraische Natur dieses Satzes zur Geltung kommt. Als Nebenresultat erhalten wir ferner den Satz, daß jede absolut quadratisch integrierbare Darstellung von $\mathfrak{G}$ stetig ist.

I. Die Struktur transzendent reduzibler Ringe.

§ 1.

Der Begriff des transzendent reduziblen Ringes.

In der Theorie der nichtkommutativen Ringe, wie sie mit idealtheoretischen Hilfsmitteln von E. Artin und E. Noether aufgebaut wird, wird die Struktur der Ringe, die den Doppelkettensatz für Rechtsideale erfüllen, untersucht. Die Hauptresultate dieser Theorie, die uns interessieren, sind die folgenden:

Man sagt, ein Ring erfüllt die Minimalbedingung für Rechtsideale, wenn in jeder Menge von Rechtsidealen ein minimales vorkommt, d. h. eines, das nicht echtes Oberideal eines anderen Ideals aus der Menge ist. Damit äquivalent ist die Bedingung, daß jede Kette $\mathfrak{r}_1 > \mathfrak{r}_2 > \ldots$, $\mathfrak{r}_{i+1}$ echtes Unterideal von $\mathfrak{r}_i$, nach endlich vielen Gliedern mit dem Nullideal endigt.

Es gilt nun: Ein Ring $\mathfrak{o}$, der kein nilpotentes (Rechts- oder Links-) Ideal umfaßt und die Minimalbedingung für Rechtsideale erfüllt, ist direkte Summe von endlich vielen zweiseitig einfachen Idealen $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_m$, und besitzt eine Haupteinheit $e = e_1 + e_2 + \ldots + e_m$, e_i Einheitselement in $\mathfrak{a}_i$, d. h. $e_i a_i = a_i e_i = a_i$ für jedes a_i aus $\mathfrak{a}_i$.

Die zweiseitig einfachen Ideale $\mathfrak{a}_i$ sind auch als Ringe betrachtet zweiseitig einfach, es ist nämlich jedes Ideal im Ring $\mathfrak{a}_i$ auch Ideal im Ring $\mathfrak{o}$. Die Struktur eines zweiseitig einfachen Ringes $\mathfrak{a}$ mit Einheitselement ist die folgende:

$\mathfrak{a}$ ist voller Matrizenring n-ten Grades in einem nichtkommutativen Körper K, der mit dem Automorphismenkörper der einfachen Linksideale von $\mathfrak{a}$ isomorph ist.

---

[3]) E. Cartan beweist in einer Arbeit, Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 53 (1929), S. 267, ebenfalls die Abgeschlossenheit des Systems der $e_{ik}^{(\beta)}(s)$.

Wir nennen im folgenden einen Ring $\mathfrak{o}$ (rechts) vollständig reduzibel, wenn $\mathfrak{o}$ die Minimalbedingung für Rechtsideale erfüllt und kein nilpotentes Ideal enthält.

Genau so nennen wir ein Ideal $\mathfrak{a}$ eines Ringes $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel, wenn $\mathfrak{a}$ kein nilpotentes Ideal in $\mathfrak{o}$ umfaßt und die Minimalbedingung für Rechtsideale erfüllt, d. h. wenn jede Menge von Rechtsidealen in $\mathfrak{o}$, die Unterideale von $\mathfrak{a}$ sind, ein minimales enthält.

Wir betrachten im folgenden Ringe $\mathfrak{o}$, von denen wir voraussetzen, daß jedes zweiseitige Ideal in $\mathfrak{o}$ ein vollständig reduzibles zweiseitiges umfaßt. Wir nennen einen Ring, der diese Bedingung erfüllt, *„transzendent reduzibel"*. Diese Definition umfaßt natürlich auch die vollständig reduziblen Ringe, wenn nämlich $\mathfrak{o}$ selbst schon ein vollständig reduzibles Ideal ist.

Wir beweisen

Satz 1. *In einem beliebigen Ring $\mathfrak{o}$ ist jedes zweiseitig vollständig reduzible Ideal $\mathfrak{a}$ auch als Ring vollständig reduzibel, weil jedes Ideal im Ring $\mathfrak{a}$ auch Ideal in $\mathfrak{o}$ ist. $\mathfrak{a}$ ist also Summe von Matrizenringen in Körpern.*

Den Beweis führen wir so, daß wir in $\mathfrak{a}$ ein Einheitselement konstruieren, mit dem wir $\mathfrak{o}$ direkt zerlegen in eine Summe von zwei zweiseitigen Idealen $\mathfrak{o} = \mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}}$, woraus dann leicht folgt, daß ein Ideal in $\mathfrak{a}$ auch Ideal in $\mathfrak{o}$ ist[4]).

$\mathfrak{a}$ umfaßt ein in der Menge aller Unterideale von $\mathfrak{a}$ minimales Rechtsideal $\mathfrak{r}_1$, das also einfach ist, d. h. kein echtes Unterideal umfaßt. $\mathfrak{r}_1$ besitzt eine Linkseinheit e_1: Es ist nämlich $\mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{r}_1$, da $\mathfrak{r}_1$ nicht nilpotent und einfach ist. Es ist weiter eines der Ideale $r\mathfrak{r}_1 \neq 0$, r aus $\mathfrak{r}$, weil das Vereinigungsideal $(\ldots r\mathfrak{r}_1 \ldots) = \mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{r}_1$ (r durchlaufe alle Elemente von $\mathfrak{r}_1$), also ein $r\mathfrak{r}_1 \neq 0$ und wegen der Einfachheit von $\mathfrak{r}_1$ gleich $\mathfrak{r}_1$.

Es gibt daher ein Element e_1, für das $re_1 = r$. Dann ist $r(e_1^2 - e_1) = 0$, und da das aus allen x aus $\mathfrak{r}$, für die $rx = 0$, bestehende echte Unterideal von $\mathfrak{r}$ Null sein muß, ist $e_1^2 = e_1$ und wegen $e_1\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1$ ist e_1 Linkseinheit für $\mathfrak{r}_1$.

Es sei e ein beliebiges Idempotent aus $\mathfrak{a}$, dann gilt für beliebiges x aus $\mathfrak{a}$ die Zerlegung $x = ex + (x - ex)$. Die Gesamtheit der Elemente ex und der Elemente $(x - ex)$ bilden zwei Rechtsideale $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$, deren Durchschnitt 0 ist und deren direkte Summe $\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{a}$ (Peircesche Zer-

[4]) Die Konstruktion der Einheit für $\mathfrak{a}$ ist genau dieselbe wie in N. S. 663. Wir wollen sie aber trotzdem zum leichteren Verständnis des Folgenden ausführen, da sich die dabei verwendeten Schlüsse wiederholen.

legung von $\mathfrak{a}$ nach dem Idempotent e). Entsprechend gibt es eine Zerlegung von $\mathfrak{a}$ in Linksideale nach der Gleichung $x = xe + (x - xe)$.

Um eine Linkseinheit für ganz $\mathfrak{a}$ zu konstruieren, genügt es zu zeigen, daß aus der Existenz einer Linkseinheit $\bar{e}$ für ein Rechtsideal $\mathfrak{r}$ die Existenz einer Linkseinheit $\bar{e}_2$ für ein Ideal $\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_2$ folgt, $\mathfrak{r}_2 \neq 0$. Aus der Minimalbedingung folgt nämlich, daß dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten zur Erschöpfung von $\mathfrak{a}$ führen muß. Denn andernfalls gäbe es ja eine nicht abbrechende Kette von Idealen $\bar{\mathfrak{r}} > \bar{\mathfrak{r}}_2 > \bar{\mathfrak{r}}_3 > \dots$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ $\bar{\mathfrak{r}}_i$ das mit Hilfe der Peirceschen Zerlegung gebildete, von $\bar{e}_i$ annullierte Unterideal von $\mathfrak{a}$.

Wir bilden mit $\bar{e}$ die Peircesche Zerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}$. In der Menge der Unterideale von $\bar{\mathfrak{r}}$ gibt es ein einfaches mit einer Linkseinheit t. Es ist $\bar{e}t = 0$. Wir setzen $e_2 = t - t\bar{e}$. Dann wird $\bar{e}e_2 = 0$, $e_2\bar{e} = 0$, $e_2 t = t$, also $e_2 \neq 0$ und $e_2^2 = e_2$. $\bar{e} + e_2 = (\bar{e} + e_2)^2$ ist daher Linkseinheit für $\mathfrak{r} + e_2\mathfrak{o} > \mathfrak{r}$.

Die so konstruierte Linkseinheit e von $\mathfrak{a}$ ist auch Rechtseinheit. Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}e + \mathfrak{l}$ die Peircesche Linkszerlegung. Aus $e\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$ folgt $\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{l}e\mathfrak{l} = 0$, also $\mathfrak{l} = 0$, da in $\mathfrak{a}$ kein nilpotentes Linksideal vorkommt.

Mit der Haupteinheit e von $\mathfrak{a}$ bilden wir nun die Peircesche Zerlegung $\mathfrak{o} = e\mathfrak{o} + \bar{\mathfrak{a}}$. Diese Zerlegung ist zweiseitig, denn für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ ist $ex = exe$, da ex in $\mathfrak{a}$ liegt und e Einheit von $\mathfrak{a}$ ist. Aus demselben Grunde ist $xe = exe$, also $xe = ex$. Das Rechtsideal $\bar{\mathfrak{a}}$, das aus allen Elementen $(x - ex)$ besteht, ist gleich dem Linksideal, das aus allen Elementen $(x - xe)$ besteht, also $\bar{\mathfrak{a}}$ zweiseitig. Es gelten die Relationen $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} = 0$.

Ist nun $\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal im Ring $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{o} = \mathfrak{r}\mathfrak{a} + \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{r}\mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, also ist $\mathfrak{r}$ auch Rechtsideal in $\mathfrak{o}$. Analog für Linksideale. Unser Satz ist damit bewiesen.

Genau so sind Ideale im Ring $\bar{\mathfrak{a}}$ auch Ideale in $\mathfrak{o}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ ist also transzendent reduzibel, wenn $\mathfrak{o}$ es war.

Gibt es in einem Ringe $\mathfrak{o}$ also ein zweiseitiges vollständig reduzibles Ideal $\mathfrak{a}$, so wird $\mathfrak{o}$ direkte Summe zweier Ideale $\mathfrak{o} = \mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{a}$ ist nach den oben erwähnten Sätzen direkte Summe von endlich vielen Matrizenringen in bestimmten nichtkommutativen Körpern.

Für die folgenden Betrachtungen ist es wichtig, daß in den Ringen $\mathfrak{o}$, mit denen wir es zu tun haben, auch unendliche Summen von Elementen Sinn haben können. Wir setzen also von $\mathfrak{o}$ voraus, daß für jede Menge von Ringelementen definiert sei, ob die Summe über alle diese Elemente einen Sinn hat, d. h. ob sie wieder ein Ringelement ist. Es wird natürlich das assoziative, kommutative und das distributive Gesetz gegenüber der

Multiplikation für diese erweiterte Addition verlangt[5]). (In einem vollständig reduziblen Ideal gibt es selbstverständich keine unendlichen Summen.)

Wir wollen ferner von nun an unter einem „Ideal in $\mathfrak{o}$“ ein gewöhnliches Ideal verstehen, das aber auch unter unendlicher Addition abgeschlossen ist, d. h. mit einer Menge von Elementen aus dem Ideal soll immer auch die Summe über alle diese Elemente im Ideal liegen, falls diese Summe ein Element von $\mathfrak{o}$.

Neben die gewöhnliche Ringisomorphie zweier Ringe, die in bezug auf endliche Summen- und Produktbildung definiert ist, tritt jetzt die „transzendente“ Ringisomorphie, die Isomorphie auch in bezug auf unendliche Summen verlangt, d. h. ist in dem einen Ring $\mathfrak{o}$ eine unendliche Summe $\sum\limits_{\alpha} a_\alpha$ von Elementen definiert und gleich a, so muß im transzendent isomorphen $\bar{\mathfrak{o}}$ die Summe $\sum\limits_{\alpha} \bar{a}_\alpha$ der zugeordneten $\bar{a}_\alpha$ definiert sein und gleich $\bar{a}$, dem a zugeordneten Element.

Wir nennen einen Ring $\mathfrak{o}$ *„transzendent vollständig reduzibel“*, wenn jedes Element c von $\mathfrak{o}$ die eventuell unendliche Summe $\sum\limits_{\alpha} c_\alpha$ seiner Komponenten c_α in sämtlichen zweiseitig einfachen vollständig reduziblen Idealen $\mathfrak{a}_\alpha$ ist.

Dabei ist unter der Komponente von c in $\mathfrak{a}_\alpha$ folgendes zu verstehen: $\mathfrak{a}_\alpha$ ist, wie wir gesehen haben, auch als Ring zweiseitig einfach und vollständig reduzibel und besitzt ein Einheitselement e_α, das die zweiseitige Zerlegung $\mathfrak{o} = e_\alpha \mathfrak{o} + \bar{\mathfrak{a}}$ liefert. $e_\alpha c = c e_\alpha$ nennen wir die Komponente von c in $\mathfrak{a}_\alpha$.

Für verschiedene zweiseitig einfache Ideale $\mathfrak{a}_\alpha$ und $\mathfrak{a}_\beta$ gilt $[\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta] = 0$, also kann ein transzendent vollständig reduzibler Ring $\mathfrak{o}$ geschrieben werden als $\mathfrak{o} = \sum\limits_{\alpha} \mathfrak{a}_\alpha$. $\sum\limits_{\alpha}$ bedeutet die nach Voraussetzung direkte, transzendente Summe aller $\mathfrak{a}_\alpha$, wobei der Index α die verschiedenen $\mathfrak{a}_\alpha$ unterscheiden soll. Es brauchen dabei nicht alle Summen $\sum\limits_{\beta} c_\beta$ definiert zu sein, c_β ein Element aus $\mathfrak{a}_\beta$, wenn β eine beliebige Untermenge aller Indizes durchläuft.

Die $\mathfrak{a}_\alpha$ sind Matrizenringe in nichtkommutativen Körpern. Es gelten, wegen $\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_\beta \leqq [\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta] \geqq \mathfrak{a}_\beta \mathfrak{a}_\alpha$ die Orthogonalitätsrelationen $\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{a}_\beta \mathfrak{a}_\alpha = 0$ für $\alpha \neq \beta$ und $\mathfrak{a}_\alpha^2 = \mathfrak{a}_\alpha$.

---

[5]) In manchen Fällen wird es möglich sein, statt der unendlichen Summen einen Limesbegriff einzuführen; man überlegt sich aber leicht, daß das nicht immer möglich ist, z. B. wenn sogar Summen über nicht abzählbar viele Elemente ein Ringelement definieren; es empfiehlt sich daher, um unnötige Einschränkungen zu vermeiden, mit unendlichen Summen zu operieren.

Ein beliebiges Unterideal $\mathfrak{a}$ ist als Vereinigungsideal seiner zweiseitig einfachen Unterideale $\mathfrak{a}_\beta$ offenbar wieder ein transzendent vollständig reduzibles Ideal.

Umfaßt $\mathfrak{a}$ nur endlich viele zweiseitig einfache Ideale von $\mathfrak{o}$ oder alle bis auf endlich viele, so ist $\mathfrak{a}$ auch direkter Summand, $\mathfrak{o} = \mathfrak{a} + \sum\limits_{\beta'} \mathfrak{a}_{\beta'}$, wobei $\mathfrak{a}_{\beta'}$ die zweiseitig einfachen Ideale durchläuft, die nicht in $\mathfrak{a}$ liegen. In diesem Falle ist also auch der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ transzendent vollständig reduzibel, weil $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ transzendent isomorph ist zu $\sum\limits_{\beta'} \mathfrak{a}_{\beta'}$. Sonst kann man nur schließen, $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ umfaßt einen zu $\sum\limits_{\beta'} \mathfrak{a}_{\beta'}$ transzendent isomorphen Unterring, denn wenn $c = \sum\limits_{\alpha} c_\alpha$, so brauchen, wenn β und β' je unendlich viele Indizes durchlaufen, $\sum\limits_{\beta} c_\beta$ und $\sum\limits_{\beta'} c_{\beta'}$ nicht definiert zu sein.

Ein vollständig reduzibler Ring ist ein Spezialfall der transzendent vollständig reduziblen Ringe, der dann vorliegt, wenn die Menge der α endlich ist. Ein transzendent vollständig reduzibler Ring ist auch transzendent reduzibel. Die Umkehrung gilt nicht, wie wir bald sehen werden.

§ 2.
Die Struktur der transzendent reduziblen Ringe.

Satz 2. *Jeder transzendent reduzible Ring* $\mathfrak{o}$ *ist einem transzendent vollständig reduziblen* $\mathfrak{o}^*$ *ringisomorph.*

Beweis. Jedes vollständig reduzible zweiseitige Ideal in $\mathfrak{o}$ umfaßt ein zweiseitig einfaches $\mathfrak{a}_\alpha$, das nach Satz 1 eine Haupteinheit e_α besitzt. (α sei wieder eine Indizesmenge, die die verschiedenen zweiseitig einfachen Ideale $\mathfrak{a}_\alpha$ unterscheidet.)

Wir behaupten, das Ideal $\mathfrak{c}$, das aus allen Elementen von $\mathfrak{o}$ besteht, die von sämtlichen e_α von rechts und links annulliert werden, ist das Nullideal, das System der e_α ist „vollständig", wie wir auch sagen wollen.

Alle von sämtlichen e_α annullierten Elemente bilden ein Ideal, da mit a und b auch $a+b$ von sämtlichen e_α rechts und links annulliert wird, ebenso $a x$ und $x a$, x beliebig in $\mathfrak{o}$, denn $a x e_\alpha$ liegt in $\mathfrak{a}_\alpha$, ist also, da e_α Einheitselement von $\mathfrak{a}_\alpha$, gleich $e_\alpha a x e_\alpha = 0$, ebenso $e_\alpha x a = e_\alpha x a e_\alpha = 0$.

Wäre nun $\mathfrak{c}$ von Null verschieden, so würde es nach der Voraussetzung über $\mathfrak{o}$ ein zweiseitig einfaches Ideal umfassen, also auch ein Idempotent e_δ, die Gleichung $e_\delta^2 = e_\delta$ widerspricht aber der Definition von $\mathfrak{c}$.

Die Summe zweier verschiedener zweiseitig einfacher Ideale ist direkt: $(\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta) = \mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{a}_\beta$, denn es ist wegen der Verschiedenheit von $\mathfrak{a}_\alpha$ und $\mathfrak{a}_\beta$ $[\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta] \subset \mathfrak{a}_\alpha$, also, da $\mathfrak{a}_\alpha$ einfach ist, $[\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta] = 0$. Es gilt also auch $\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{a}_\beta \mathfrak{a}_\alpha = 0$, $e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha = 0$. Es gelten ferner, wie wir in Satz 1 ge-

zeigt haben, zweiseitige direkte Zerlegungen $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_\alpha + \bar{\mathfrak{a}}_\alpha$. Als Komponente von c in $\mathfrak{a}_\alpha$ bezeichnen wir wieder das Element $c_\alpha = e_\alpha c = c e_\alpha$.

Wir konstruieren uns nun folgendermaßen den zu $\mathfrak{o}$ isomorphen transzendent vollständig reduziblen Ring $\mathfrak{o}^*$. Wir ordnen jedem Element c_α aus $\mathfrak{a}_\alpha$ ein Symbol c_α^* und einem beliebigen Element c aus $\mathfrak{o}$ mit den Komponenten c_α die (endliche oder unendliche) Summe $\sum\limits_\alpha c_\alpha^*$ über sämtliche c_α^* zu. Da die Komponenten von c eindeutig bestimmt, andererseits ein Element, dessen Komponenten sämtlich verschwinden, wegen der Vollständigkeit des Systems der e_α selbst verschwindet, ist die Zuordnung $c \to \sum\limits_\alpha c_\alpha^*$ eineindeutig.

Wir definieren Addition und Multiplikation der c_α^* entsprechend der der zugeordneten c_α (c_α^* und c_β^* annullieren sich daher, wenn $\alpha \neq \beta$), die Addition und Multiplikation zweier beliebiger Elemente $c^* = \sum\limits_\alpha c_\alpha^*$ und $d^* = \sum\limits_\alpha d_\alpha^*$ sei definiert als $\sum\limits_\alpha (c_\alpha^* + d_\alpha^*)$ bzw. $\sum\limits_\alpha c_\alpha^* d_\alpha^*$.

Der so definierte Ring $\mathfrak{o}^*$ ist wirklich ringisomorph mit $\mathfrak{o}$. Für die Addition ist es trivial, es muß nur noch gezeigt werden, daß das Produkt zweier Elemente in $\mathfrak{o}$ als Komponente die Produkte der Komponenten mit gleichem Index hat. Es seien c_α bzw. d_α die Komponenten von c bzw. d in $\mathfrak{a}_\alpha$. Aus der zweiseitigen Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_\alpha + \bar{\mathfrak{a}}_\alpha$, entsprechend $c = c_\alpha + \bar{c}_\alpha$, $d = d_\alpha + \bar{d}_\alpha$, folgt $cd = c_\alpha d_\alpha + \bar{c}_\alpha \bar{d}_\alpha$, weil $c_\alpha \bar{d}_\alpha = d_\alpha \bar{c}_\alpha = 0$. $\mathfrak{o}^*$ ist nach Konstruktion transzendent vollständig reduzibel, also der Satz bewiesen.

Ist $\mathfrak{o}$ kommutativ, so nimmt der Satz die Form an:

Jeder transzendent reduzible kommutative Ring ist einer direkten transzendenten Summe von endlich oder unendlich vielen Körpern isomorph.

Denn ein zweiseitig einfaches kommutatives Ideal mit Einheitselement ist ein Körper.

Es sei hervorgehoben, daß nach unserer Konstruktion in $\mathfrak{o}^*$ keineswegs alle unendlichen Komponentensummen gebildet werden können, sondern nur die über die Komponenten eines Elementes aus $\mathfrak{o}$. Es kann natürlich der Fall sein, daß $\mathfrak{o}^*$ sogar transzendent ringisomorph mit $\mathfrak{o}$ ist, dann ist eben $\mathfrak{o}$ selbst schon transzendent vollständig reduzibel.

Weiter sei bemerkt, daß umgekehrt durch $\mathfrak{o}^*$ der Ring $\mathfrak{o}$ nicht eindeutig festgelegt ist. Es kann z. B. „zwischen" $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^*$ Ringe geben, in denen die Elemente von $\mathfrak{o}$ teilweise durch die unendlichen Summen ihrer Komponenten ersetzt sind, aber nicht durchwegs.

Zur vollständigen Kenntnis von $\mathfrak{o}$ muß ich neben $\mathfrak{o}^*$ noch die Struktur von $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ kennen, wenn $\mathfrak{a}$ das Vereinigungsideal sämtlicher $\mathfrak{a}_\alpha$ bedeutet, den *„vollständig reduziblen Kern" von* $\mathfrak{o}$. Dabei sei noch einmal daran erinnert, daß der Idealbegriff jetzt ein schärferer ist. $\mathfrak{a}$ enthält also gerade

alle Elemente aus $\mathfrak{o}$, die als Summen ihrer Komponenten in den $\mathfrak{a}_\alpha$ geschrieben werden können.

Der vollständig reduzible Kern von $\mathfrak{o}$ läßt sich auch als das maximale vollständig reduzible Unterideal von $\mathfrak{o}$ charakterisieren.

Beispiele für transzendent reduzible Ringe werden wir in II bringen.

§ 3.

Kriterium für Ringisomorphie.

Als Kriterium für vollständige Reduzibilität wird folgender Satz vom direkten Durchschnitt manchmal verwendet[6]):

Für das Nullideal eines Ringes $\mathfrak{o}$ gelte die Darstellung $0 = [\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n]$, $\mathfrak{s}_i$ Rechtsideal des Ringes. Es werde $\mathfrak{r}_i = [\mathfrak{s}_1 \ldots \mathfrak{s}_{i-1}, \mathfrak{s}_{i+1} \ldots \mathfrak{s}_n]$ gesetzt und es sei $\mathfrak{r}_i \neq 0$ und $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_i + \mathfrak{s}_i$. Dann ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n$.

Dieser Satz gilt nicht mehr, wenn zur Darstellung des Nullideals unendlich viele $\mathfrak{s}_\alpha$ nötig sind. Ein transzendent reduzibler, aber nicht vollständig reduzibler Ring liefert ein Gegenbeispiel.

Für zweiseitiges $\mathfrak{s}_\alpha$ gilt aber der Satz: *Für das Nullideal eines Ringes* $\mathfrak{o}$ *gelte die Darstellung* $0 = [\ldots \mathfrak{s}_\alpha \ldots]$, $\mathfrak{s}_\alpha$ *zweiseitige Ideale des Ringes,* α *durchlaufe eine beliebige Indizesmenge. Es sei, wenn* $\mathfrak{a}_\beta = [\ldots \mathfrak{s}_{\alpha'} \ldots]$ *gesetzt wird* (α' *durchlaufe dabei alle Indizes* α *bis auf* β), $\mathfrak{a}_\beta \neq 0$ *und* $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{s}_\beta$. *Dann gibt es einen zu* $\mathfrak{o}$ *isomorphen Ring* $\mathfrak{o}^* = \sum\limits_\alpha \mathfrak{a}_\alpha^*$.

In dem Fall, daß alle $\mathfrak{a}_\alpha$ vollständig reduzible Ideale sind, ist $\mathfrak{o}^*$ transzendent vollständig reduzibel.

B e w e i s. Nach der Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{s}_\alpha$ zerfällt jedes Element c von $\mathfrak{o}: c = c_\alpha + e_\alpha$, c_α die dadurch eindeutig bestimmte Komponente von c in $\mathfrak{a}_\alpha$, s_α die in $\mathfrak{s}_\alpha$. Es gibt kein Element $c \neq 0$, das in jedem $\mathfrak{a}_\alpha$ die Komponente 0 hat. Denn sind alle $c_\alpha = 0$, so liegt c in allen $\mathfrak{s}_\alpha$, ist also wegen $[\ldots \mathfrak{s}_\alpha \ldots] = 0$ selbst Null.

Die Summe zweier $\mathfrak{a}_\alpha$ ist direkt, denn nach Definition ist für $\alpha' \neq \beta$ $\mathfrak{a}_\beta \leqq \mathfrak{s}_{\alpha'}$, also $[\mathfrak{a}_\beta, \mathfrak{a}_\gamma] \leqq [[\ldots \mathfrak{s}_{\alpha'} \ldots], \mathfrak{s}_\beta] = 0$. Zwei Elemente aus $\mathfrak{a}_\beta$ bzw. $\mathfrak{a}_\gamma$ annullieren sich gegenseitig, denn ihr Produkt liegt ja in $[\mathfrak{a}_\beta, \mathfrak{a}_\gamma]$.

Wir bilden nun einen zu $\mathfrak{o}$ isomorphen Ring $\mathfrak{o}^*$, indem wir den $\mathfrak{a}_\alpha$ ringisomorphe $\mathfrak{a}_\alpha^*$ zuordnen und einem beliebigen Element c mit den Komponenten c_α das Element $\sum\limits_\alpha c_\alpha^*$, die Summe über alle Komponenten erstreckt. Addition und Multiplikation zweier Elemente $\sum\limits_\alpha c_\alpha^*$ und $\sum\limits_\alpha d_\alpha^*$ ist wieder definiert als $\sum\limits_\alpha (c_\alpha^* + d_\alpha^*)$ bzw. $\sum\limits_\alpha c_\alpha^* d_\alpha^*$. Genau so wie beim Beweise von Satz 2 sieht man ein, daß $\mathfrak{o}^*$ wirklich mit $\mathfrak{o}$ ringisomorph ist.

[6]) Vgl. N. § 4.

Es gilt ferner folgendes Kriterium für Ringisomorphie,

Satz 3. *Ein Ring* $\mathfrak{o}$, *der eine Menge von zweiseitigen Idealen* $\mathfrak{a}_\alpha$ *enthält, ist mit einer transzendenten direkten Summe* $\mathfrak{o}^* = \sum_\alpha \mathfrak{a}_\alpha^*$, $\mathfrak{a}_\alpha^*$ *zu* $\mathfrak{a}_\alpha$ *ringisomorphe Ideale, dann und nur dann isomorph, wenn die* $\mathfrak{a}_\alpha$ *den Bedingungen genügen*: $[\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta] = 0$, *es gibt für jedes* α *eine direkte zweiseitige Zerlegung* $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{z}_\alpha$ *und es ist* $[\ldots \mathfrak{z}_\alpha \ldots] = 0$.

Daß die Bedingungen hinreichend sind, folgt daraus, daß die gemachten Voraussetzungen gerade die bei der Konstruktion von im Beweise des vorigen Satzes verwendeten Tatsachen sind.

Die Notwendigkeit der Bedingungen $[\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta] = 0$ und $[\ldots \mathfrak{z}_\alpha \ldots] = 0$ ist trivial; die Unmöglichkeit einer zweiseitigen Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{z}_\alpha$ widerspricht der zweiseitigen Zerlegung des isomorphen Ringes, $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{a}_\alpha^* + \sum_{\alpha'} \mathfrak{a}_{\alpha'}^*$ $(\alpha' \neq \alpha)$, denn die der Zerlegung $a = a_\alpha^* + \bar{a}_\alpha^*$ nach der Isomorphie entsprechende $a = a_\alpha + \bar{a}_\alpha$ würde Elemente $\bar{a}_\alpha$ liefern, deren Gesamtheit gerade ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{z}_\alpha$ bilden würde, dessen direkte Summe mit $\mathfrak{a}_\alpha$ $\mathfrak{o}$ ergäbe.

§ 4.

Die Darstellungstheorie der transzendent reduziblen Ringe.

Als Darstellung [7]) n-ten Grades eines Ringes $\mathfrak{o}$ in einem Körper K bezeichnet man bekanntlich eine Ringhomomorphie von $\mathfrak{o}$ mit einem Ring $\mathfrak{O}$, der aus Matrizen n-ten Grades mit Elementen aus K besteht. Zu jeder Darstellungsklasse gehört eineindeutig ein Darstellungsmodul $\mathfrak{M} = x_1 \mathsf{K} + x_2 \mathsf{K} + \ldots + x_n \mathsf{K}$, der $\mathfrak{o}$-Links- und K-Rechtsmodul ist. Die Multiplikation von $\mathfrak{M}$ mit dem Elemente c aus $\mathfrak{o}$ bedeutet einen Automorphismus von $\mathfrak{M}$ als K-Modul, der sich in den Basiselementen x_i von $\mathfrak{M}$ als lineare Transformation darstellt mit der durch die Gleichung $(c x_1, \ldots, c x_n) = (x_1, \ldots, x_n)\, C$ bestimmten Matrix. Die Zuordnung $c \to C$ liefert eine Darstellung von $\mathfrak{o}$. In der Basis $(x_1', \ldots, x_n') = (x_1, \ldots, x_n)\, Q$, Q eine beliebige umkehrbare Matrix, bekomme ich die Darstellung $c \to Q^{-1} C Q$, $\mathfrak{M}$ erzeugt also die ganze Darstellungsklasse von C.

Ist $\mathfrak{M}$ direkte Summe von zwei Darstellungsmoduln, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, so zerfällt die Darstellung C, bei Wahl einer Basis von $\mathfrak{M}$, die sich aus einer Basis von $\mathfrak{A}_1$ und einer von $\mathfrak{A}_2$ zusammensetzt, in folgender Weise

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

C_1 eine durch $\mathfrak{A}_1$, C_2 eine durch $\mathfrak{A}_2$ vermittelte Darstellung.

[7]) Über die Grundbegriffe der Darstellungstheorie vgl. N.

Die Darstellungen eines transzendent reduziblen Ringes $\mathfrak{o}$ wollen wir in folgender naheliegender Weise einschränken: Wir sprechen nur dann von einer Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{o}$ in K, wenn die Ringhomomorphie $\mathfrak{o} \to \mathfrak{D}$ eine transzendente ist, d. h. auch unendlichen Summen, soweit sie in $\mathfrak{o}$ existieren, die unendlichen Summen der entsprechenden Elemente zugeordnet sind, die in $\mathfrak{D}$ existieren müssen. Mit dieser Einschränkung des Darstellungsbegriffes erreichen wir wieder, daß die Menge der Elemente in $\mathfrak{o}$, die der Nullmatrix in $\mathfrak{D}$ zugeordnet sind, ein Ideal bildet, wenn wir von einem Ideal verlangen, daß es auch unter unendlicher Summation abgeschlossen ist.

Wir leiten den für die Darstellungen eines transzendent vollständig reduziblen Ringes $\mathfrak{o}^*$ zu erwartenden

Satz 4 ab: *Jeder Darstellungsmodul* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{o}^* = \sum\limits_{\alpha} \mathfrak{a}^*_{\alpha} = \sum\limits_{\alpha} e^*_{\alpha}\mathfrak{o}^*$ *ist eine direkte Summe* $\mathfrak{M} = \mathfrak{a}^*_{\alpha_1}\mathfrak{M} + \dots + \mathfrak{a}^*_{\alpha_k}\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_0$. *Die* $\mathfrak{a}^*_{\alpha_i}\mathfrak{M}$ *sind Darstellungsmoduln der zweiseitig einfachen Ringe* $\mathfrak{a}^*_{\alpha_i}$, $\mathfrak{M}_0$ *ist ein Darstellungsmodul, der jedem Element von* $\mathfrak{o}^*$ *die Null zuordnet.* (Die Aussage, $\mathfrak{a}^*_{\alpha_i}\mathfrak{M}$ ist Darstellungsmodul von $\mathfrak{a}^*_{\alpha_i}$, ist dabei so zu verstehen, daß nur den $\mathfrak{a}^*_{\alpha_i}$-Komponenten der Elemente von $\mathfrak{o}^*$ ein Element $\neq 0$ zugeordnet wird, den Elementen aus $\mathfrak{o}^*_{\alpha_i}$, $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{a}^*_{\alpha_i} + \mathfrak{o}^*_{\alpha_i}$, dagegen die Null.)

Daraus folgt nach dem Zusammenhang zwischen der Struktur von $\mathfrak{M}$ und der Zerfällbarkeit der durch $\mathfrak{M}$ vermittelten Darstellung: *Die Matrizen C jeder Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{o}$ lassen sich, wenn wir Ränder an den Matrizen, die nur aus Nullen bestehen, fortlassen (d. h. nur Darstellungsmoduln betrachten, in denen $\mathfrak{M}_0 = 0$), durch Transformation mit einer festen Matrix Q in die Gestalt bringen*

$$Q^{-1} C Q = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n \end{pmatrix}.$$

Die C_i sind quadratische Matrizen, die eine Darstellung des zweiseitig einfachen Ringes $\mathfrak{a}^*_{\alpha_i}$ bilden.

Beweis. Wir erinnern an den „absoluten Multiplikatorenbereich“ eines Darstellungsmoduls $\mathfrak{M}$. Darunter versteht man folgendes: Es können verschiedene Elemente c aus $\mathfrak{o}$ denselben K-Automorphismus von $\mathfrak{M}$ erzeugen (dann ist ihnen auch in der durch $\mathfrak{M}$ vermittelten Darstellung dieselbe Matrix zugeordnet), die Differenz zweier solcher Elemente ordnet $\mathfrak{M}$ die Null zu. Die Gesamtheit aller Elemente c aus $\mathfrak{o}$, die $\mathfrak{M}$ annullieren, bildet ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a}^*$ in $\mathfrak{o}^*$, der Restklassenring $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}^*$ ist der absolute Multiplikatorenbereich von $\mathfrak{M}$, der also dadurch charakterisiert ist, daß verschiedene Restklassen verschiedene Automorphismen erzeugen und jeder durch $\mathfrak{o}^*$ erzeugte Automorphismus durch eine Restklasse geliefert wird.

$\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}^*$ ist offenbar isomorph mit der durch $\mathfrak{M}$ vermittelten Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{o}$ in K. Nach § 2 umfaßt $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}^*$ einen transzendent vollständig reduziblen, mit $\sum_\beta \mathfrak{a}_\beta^*$ isomorphen Ring. Die Anzahl der β muß endlich sein, da es in $\mathfrak{D}$ nur endlich viele Matrizen A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, geben kann, für die $A_i A_k = A_k A_i = 0$, $i \neq k$, gilt. $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}^*$ ist also nach § 2 vollständig reduzibel, $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}^* = \sum_{i=1}^n \mathfrak{a}_{\alpha_i}^*$.

Unser Darstellungsmodul $\mathfrak{M}$ kann offenbar aufgefaßt werden als Darstellungsmodul des vollständig reduziblen Ringes $\sum_i^n \mathfrak{a}_{\alpha_i}^*$, denn allen Elementen des Ideals $\mathfrak{a}^*$ aus $\mathfrak{o}^*$ wird die Null zugeordnet.

Für den vollständig reduziblen Ring $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}^*$ gilt aber die Behauptung unseres Satzes[8]). Der Vollständigkeit halber geben wir die wesentlichen Schlüsse kurz an:

$\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}^*$ besitzt eine Haupteinheit e^*. Dann zerfällt $\mathfrak{M}$ nach der Gleichung $m = e^* m + (m - e^* m)$, m aus $\mathfrak{M}$, direkt in zwei Darstellungsmoduln $\mathfrak{M}_{e^*} + \mathfrak{M}_0$. Für $\mathfrak{M}_{e^*}$ liefert die Multiplikation mit e^* den identischen Automorphismus, $\mathfrak{M}_0$ wird durch e^*, also durch ganz $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{a}^*$, also auch durch $\mathfrak{o}^*$ annulliert.

Wenn e_i^* die Haupteinheit von $\mathfrak{a}_{\alpha_i}^*$ bedeutet, dann ist $e^* = \sum e_i^*$ und $\mathfrak{M}$ zerfällt (wie man durch wiederholte Anwendung derselben Zerlegung, die zur Aufspaltung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}_{e^*} + \mathfrak{M}_0$ geführt hat, sieht) in eine direkte Summe von Darstellungsmoduln $\mathfrak{M}_{e^*} = \mathfrak{M}_{e_1^*} + \mathfrak{M}_{e_2^*} + \ldots + \mathfrak{M}_{e_n^*}$; für $\mathfrak{M}_{e_i^*}$ ist e_i^* Einheitsoperator und alle anderen e_k^*, $k \neq i$, Nulloperatoren, also $\mathfrak{M}_{e_i^*} = \mathfrak{a}_{\alpha_i}^* \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}_{e_i^*}$ kann also als Darstellungsmodul von $\mathfrak{a}_{\alpha_i}^*$ aufgefaßt werden, da er alle Elemente aus $\mathfrak{o}_{\alpha_i}^*$, wenn $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{a}_{\alpha_i}^* + \mathfrak{o}_{\alpha_i}^*$, annulliert. Unser Satz ist damit bewiesen.

Für die Darstellungen transzendent reduzibler Ringe gilt

Satz 5. *Jeder Darstellungsmodul $\mathfrak{M}$ eines transzendent reduziblen Ringes $\mathfrak{o}$ ist direkte Summe $\mathfrak{M} = \mathfrak{a}_{\alpha_1}\mathfrak{M} + \ldots + \mathfrak{a}_{\alpha_n}\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_f$. Die $\mathfrak{a}_{\alpha_i}\mathfrak{M}$ sind wieder Darstellungsmoduln nur von $\mathfrak{a}_{\alpha_i}$, $\mathfrak{M}_f$ ist Darstellungsmodul des Restklassenringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ der vollständig reduzible Kern von $\mathfrak{o}$.*

Entsprechend zerfällt auch jede Darstellung von $\mathfrak{o}$ nach Transformation mit einer festen Matrix Q in Darstellungen der Ringe $\mathfrak{a}_{\alpha_i}$ und des Restklassenringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$.

Der absolute Multiplikatorenbereich von $\mathfrak{M}$ wird ein Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ kann wieder nur endlich viele $\mathfrak{a}_\alpha$ nicht umfassen.

Es sei $\mathfrak{a}_\alpha$ ein beliebiges zweiseitig einfaches Ideal in $\mathfrak{o}$. Dann ist $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_\alpha]$ entweder 0 oder $\mathfrak{a}_\alpha$. $\mathfrak{a}_{\alpha_1} \ldots \mathfrak{a}_{\alpha_n}$ seien die zweiseitig einfachen Ideale,

[8]) Vgl. N. S. 674.

die nicht in $\mathfrak{b}$ liegen, e_i ihre Haupteinheiten, also $e = \sum_i e_i$, die Haupteinheit des Ideals $\sum_i \mathfrak{a}_{\alpha_i}$. Dann gilt die direkte Summenzerlegung $\mathfrak{o} = \sum_i \mathfrak{a}_{\alpha_i} + \bar{\mathfrak{o}}$, $\bar{\mathfrak{o}}$ das aus den von e_i annullierten Elementen gebildete zweiseitige Ideal. $\mathfrak{b}$ wird von e annulliert, denn $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_{\alpha_i}] = 0$, also $\bar{\mathfrak{o}} \geqq \mathfrak{b}$.

Es zerfällt also $\mathfrak{o}/\mathfrak{b}$ in eine direkte Summe $\mathfrak{o}/\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\alpha_1} + \ldots + \mathfrak{a}_{\alpha_n} + \bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{b}$ und entsprechend $\mathfrak{M}$ in eine Summe $\mathfrak{a}_{\alpha_1}\mathfrak{M} + \ldots + \mathfrak{a}_{\alpha_n}\mathfrak{M} + \bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{b}\,\mathfrak{M}$. Die $\mathfrak{a}_{\alpha_i}\mathfrak{M}$ sind Darstellungsmoduln von $\mathfrak{a}_{\alpha_i}$, die alle Elemente aus $\mathfrak{o}_{\alpha_i}$ annullieren, wenn $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_{\alpha_i} + \mathfrak{o}_{\alpha_i}$. Der Satz ist vollständig bewiesen, wenn wir zeigen, daß $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{b}\,\mathfrak{M}$ nur Elementen aus $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ von Null verschiedene Matrizen zuordnet.

Das ist aber trivial, denn $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{b}$ wird nach Konstruktion von allen e_i, also allen $\mathfrak{a}_{\alpha_i}$ annulliert, alle übrigen zweiseitig einfachen $\mathfrak{a}_\beta$ liegen in $\mathfrak{b}$, also wird auch ihnen die Null zugeordnet. Der vollständig reduzible Kern $\mathfrak{a}$ ist aber das Vereinigungsideal sämtlicher zweiseitig einfachen Ideale $\mathfrak{a}_\alpha$, also wird $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{b}\,\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{a}$ annulliert.

Es ist daher im allgemeinen zu erwarten, daß $\mathfrak{o}$ mehr Darstellungen besitzt als der mit $\mathfrak{o}$ isomorphe transzendent vollständig reduzible Ring. Einen vollen Überblick über die auftretenden Möglichkeiten wird erst eine Erforschung der Struktur der Restklassenringe $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ geben können. Diese Restklassenringe brauchen nicht vollständig reduzibel zu sein, man überlegt sich leicht, daß $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ z. B. nilpotent oder auch dem ganzzahligen Polynombereich in einer Veränderlichen isomorph sein kann[9]).

---

[9]) Es seien abzählbar viele isomorphe Matrizenringe $\mathfrak{a}_i$ vom Rang n^2 über einem kommutativen Körper P gegeben. Wir bilden den Ring $\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \ldots$, wobei $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k = 0$ sei für $i \neq k$, also $\mathfrak{o}_1$ direkte Summe der zweiseitig einfachen Ideale $\mathfrak{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Es sollen nur endliche Summen von Elementen in $\mathfrak{o}_1$ vorkommen.

Wir bilden nun einen Ring $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{o}_1$, indem wir die unendliche Summe $c = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ik}^{(j)}$, $i \neq k$, $c_{ik}^{(j)}$ aus $\mathfrak{a}_j$ zu $\mathfrak{o}_1$ hinzunehmen und den daraus abgeleiteten Ring $\mathfrak{o}$ bilden, der als P-Modul die Gestalt $\mathfrak{o} = c\mathsf{P} + \mathfrak{o}_1$ hat, weil $c^2 = 0$ und cx und xc, x aus $\mathfrak{o}_1$, in $\mathfrak{o}_1$ liegen. $\mathfrak{o}$ ist transzendent vollständig reduzibel. Wenn wir aber zum isomorphen $\bar{\mathfrak{o}}$ übergehen, in dem das c entsprechende Element $\bar{c}$ nicht mehr die Summe seiner Komponenten ist, so wird $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{c}\mathsf{P} + \bar{\mathfrak{o}}_1$, $\bar{\mathfrak{o}}_1$ ist jetzt der vollständig reduzible Kern und es ist $\bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{o}}_1 \simeq c\mathsf{P}$ mit $(c\mathsf{P})^2 = 0$, also $\bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{o}}_1$ nilpotent.

Bilden wir analog einen Ring $\mathfrak{o}_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{b}_i$, wobei die $\mathfrak{b}_i$ Matrizenringe im vollkommenen Körper P vom Rang p_i^2 sind, $p_i \neq p_k$ und Primzahl, und adjungieren wir zu $\mathfrak{o}_2$ das Element $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, wobei a_i aus $\mathfrak{b}_i$ einer irreduziblen Gleichung vom Grad p_i genügt, so erfüllt a keine Gleichung endlichen Grades über P: Ist nämlich in $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 = 0 = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1$, ein Element $b = b_1 + b_2$ gegeben, b_1 in $\mathfrak{a}_1$, b_2 in $\mathfrak{a}_2$, und genügt b einer Gleichung, so müssen b_1 und b_2 derselben Gleichung genügen (das folgt aus $(b_1 + b_2)^n = b_1^n + b_2^n$). Daher müßte der Grad der Gleichung, der a genügt, durch alle p_i teilbar sein, was unmöglich ist. Die Potenzen von a sind daher linear unabhängig in bezug

(Fortsetzung der Fußnote [9]) auf nächster Seite.)

Mit Satz 4 und 5 ist die Darstellungstheorie der transzendent reduziblen Ringe soweit als möglich auf die der vollständig reduziblen Ringe zurückgeführt, deren Resultate also auch in dem durch Satz 4 und 5 gegebenen Umfang auf sie angewendet werden können.

§ 5.

Ringe mit Nilidealen.

Es liegt nahe zu versuchen, die Resultate von § 1 und § 2 auch auf Ringe auszudehnen, in denen nilpotente Ideale und allgemeiner Nilideale zugelassen werden.

Wir erinnern an folgende Tatsachen[10]): Als Radikal eines Ringes bezeichnet man ein maximales zweiseitiges Nilideal, das auch alle einseitigen Nilideale umfaßt. (Unter einem Nilideal versteht man dabei ein Ideal, das nur nilpotente Elemente umfaßt.)

Ein Ring $\mathfrak{o}$, der ein Radikal besitzt und dessen Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, kann auch charakterisiert werden als ein Ring, in dem jedes reguläre Rechtsideal ein minimal reguläres umfaßt und jede Kette von minimal regulären Rechtsidealen $\mathfrak{r}_1 = e_1\mathfrak{o} \subset \mathfrak{r}_2 = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o} \subset \mathfrak{r}_3 = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o} + e_3\mathfrak{o} \subset \ldots$ nach endlich vielen Gliedern abbricht, $e_i e_k = 0$ für $i < k$.

Solche Ringe wollen wir kurz v. r. R.-Ringe (v. r. R. = vollständig reduzibler Restklassenring) nennen.

Das Analogon zu den in § 1 betrachteten Ringen sind Ringe, in denen jedes reguläre zweiseitige Ideal ein reguläres v. r. R.-Ideal umfaßt.

Wir beweisen

Satz 6. *Jeder Ring* $\mathfrak{o}$, *in dem jedes zweiseitige reguläre Ideal ein primäres v. r. R.-Ideal* $\mathfrak{p}_\alpha$ *mit Haupteinheit* e_α *umfaßt, besitzt ein eindeutig bestimmtes, zweiseitiges, von allen* e_α *annulliertes Nilideal* $\mathfrak{d}$, *so daß* $\mathfrak{o}/\mathfrak{d}$ *mit einem Ring* $\mathfrak{o}^*$ *ringisomorph ist, der direkte Summe von primären, mit den* $\mathfrak{p}_\alpha$ *ringisomorphen Ringen ist.*

Beweis. Ein primäres Ideal (Ring) ist ein Ideal (Ring), das kein zweiseitiges reguläres echtes Unterideal besitzt. Es gelten, wenn $\mathfrak{p}_\alpha$ ein primäres Ideal mit der Haupteinheit e_α ist, die zweiseitigen Zerlegungen $\mathfrak{o} = \mathfrak{p}_\alpha + \mathfrak{o}_\alpha$, $\mathfrak{o}_\alpha$ das aus allen Elementen $(x - e_\alpha x)$ gebildete zweiseitige

---

auf P und der aus $\mathfrak{o}_2$ und a abgeleitete Ring $\mathfrak{o}'$ wird zu $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}_2 + a\mathsf{P} + a^2\mathsf{P} + \ldots + a^n\mathsf{P} + \ldots$. Der wie oben konstruierte dazu isomorphe Ring $\bar{\mathfrak{o}}'$ mit dem vollständig reduziblen Kern $\bar{\mathfrak{o}}_2$ hat also den Restklassenring $\bar{\mathfrak{o}}'/\bar{\mathfrak{o}}_2 \simeq a\mathsf{P} + a^2\mathsf{P} + \ldots$, d. h. $\bar{\mathfrak{o}}'/\bar{\mathfrak{o}}_2$ ist isomorph dem Polynombereich in einer Unbestimmten.

[10]) Vgl. G. Köthe, Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, § 3, erscheint in der Math. Zeitschrift.

Ideal. Es ist ja wieder $e_\alpha x = e_\alpha x e_\alpha = x e_\alpha$, also $\mathfrak{o}_\alpha$ zweiseitig. Aus dieser zweiseitigen Zerlegung folgt wie früher, daß die Ideale im Ring $\mathfrak{p}_\alpha$ auch Ideale in $\mathfrak{o}$ sind, es ist also $\mathfrak{p}_\alpha$ auch als Ring ein primärer v. r. R.-Ring.

Wir zeigen, daß der Durchschnitt $[\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta]$ zweier verschiedener Primärideale mit Haupteinheit Null ist.

Nehmen wir das Gegenteil an, dann zerfällt das Vereinigungsideal $(\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta)$ der Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{p}_\alpha + \mathfrak{o}_\alpha$ zufolge in eine direkte Summe, $(\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta) = \mathfrak{p}_\alpha + \mathfrak{t}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{s} = [\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta]$ ist ein Nilideal, andernfalls wäre ja der Durchschnitt echtes reguläres zweiseitiges Unterideal, was unmöglich ist.

Es ist $\mathfrak{p}_\beta = \mathfrak{s} + \mathfrak{t}$. Wir nehmen an, es sei $\mathfrak{t}$ auch Nilideal. Dann ist $\mathfrak{s} + \mathfrak{t}$ auch Nilideal: Es sei $c = a + b$, a aus $\mathfrak{s}$, b aus $\mathfrak{t}$, $a^n = 0$, $b^m = 0$. Dann ist $(a+b)^\nu = a^\nu + b^\nu$, da $ab = ba = 0$, weil $[\mathfrak{s}, \mathfrak{t}] = 0$. Also verschwindet $(a+b)^r$, wenn r die größere der beiden Zahlen n und m. Also $\mathfrak{s} + \mathfrak{t} = \mathfrak{p}_\beta$ Nilideal, was unmöglich ist. $\mathfrak{t}$ ist daher reguläres echtes zweiseitiges Unterideal von $\mathfrak{p}_\beta$, wenn $\mathfrak{s} \neq 0$, im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $\mathfrak{p}_\beta$ primär ist. Also wirklich $\mathfrak{s} = 0$.

Durchläuft $\mathfrak{p}_\alpha$ sämtliche Primärideale mit Haupteinheit, so ist $\mathfrak{d} = [\ldots \mathfrak{o}_\alpha \ldots]$ ein zweiseitiges Nilideal, da andernfalls $\mathfrak{d}$ ein primäres Unterideal mit Haupteinheit umfassen müßte. Im Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{d}$ gelten die Zerlegungen $\mathfrak{o}/\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_\alpha/\mathfrak{d} + \mathfrak{o}_\alpha/\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}_\alpha/\mathfrak{d}$ ringisomorph mit $\mathfrak{p}_\alpha$, da $\mathfrak{d}$ kein von Null verschiedenes Element mit $\mathfrak{p}_\alpha$ gemeinsam hat. Da selbstverständlich auch $[\mathfrak{p}_\alpha/\mathfrak{d}, \mathfrak{p}_\beta/\mathfrak{d}] = 0$ und $[\ldots \mathfrak{o}_\alpha/\mathfrak{d} \ldots] = 0$ gilt, sind alle Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, unser Satz also bewiesen.

Die Struktur der primären v. r. R.-Ringe ist bekannt[11]), daher auch die Struktur von $\mathfrak{o}$.

Die Voraussetzung, daß die primären v. r. R.-Ideale Haupteinheiten enthalten, ist für die Richtigkeit von Satz 6 wesentlich. Betrachten wir das hyperkomplexe System $\mathfrak{o}$ in bezug auf einen Körper K mit der Multiplikationstabelle

	e_1	e_2	c
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	c
c	c	0	0

e_1 und e_2 erzeugen die primären Ideale $\mathfrak{p} = e_1\mathsf{K} + c\mathsf{K}$ bzw. $\mathfrak{p}_2 = e_2\mathsf{K} + c\mathsf{K}$, deren Durchschnitt $\mathfrak{d} = c\mathsf{K}$ von Null verschieden ist. $\mathfrak{o}$ besitzt sogar eine Haupteinheit $e_1 + e_2$ und jedes reguläre zweiseitige Ideal umfaßt ein primäres, $\mathfrak{o}$ ist aber nicht direkte Summe von zwei mit $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ isomorphen primären Idealen.

---

[11]) Vgl. G. Köthe, loc. cit. § 6.

Betrachten wir nun beliebige Ringe $\mathfrak{o}$, von denen wir voraussetzen, daß jedes zweiseitige reguläre Ideal ein reguläres v. r. R.-Ideal umfaßt. Wir beweisen

Satz 7. *$\mathfrak{o}$ besitzt ein Radikal $\mathfrak{c}$ und der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ nach dem Radikal ist ein transzendent reduzibler Ring, also einem transzendent vollständig reduziblen isomorph.*

Wir bilden das Vereinigungsideal $\mathfrak{c}$ sämtlicher zweiseitigen Nilideale von $\mathfrak{o}$. Wir nehmen an, $\mathfrak{c}$ sei regulär. Dann muß es ein reguläres v. r. R.-Ideal $\mathfrak{a}$ umfassen, also ein Idempotent enthalten. Jedes Element c von $\mathfrak{c}$ hat die Form $c = \sum\limits_{\gamma} c_\gamma$, wobei jedes c_γ Element eines Nilideals $\mathfrak{c}_\gamma$ ist und die Summe über endlich oder unendlich viele $\mathfrak{c}_\gamma$ geht (wir haben ja vorausgesetzt, daß in $\mathfrak{o}$ auch unendliche Summen definiert sein können). Ist c idempotent und in $\mathfrak{a}$, so ist $c = c^2 = \sum\limits_{\gamma'} c c_\gamma$. $c c_\gamma$ liegt in $\mathfrak{a}$ und in $\mathfrak{c}_\gamma$, also in einem Nilideal $\bar{\mathfrak{c}}_\gamma \subseteq \mathfrak{a}$. Da $\mathfrak{a}$ ein Radikal besitzt, ist das Vereinigungsideal $(\ldots \bar{\mathfrak{c}}_\gamma \ldots)$ Nilideal, also c nilpotent gegen die Voraussetzung. Daraus folgt, daß $\mathfrak{c}$ Nilideal.

$\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ hat die Eigenschaft, daß jedes zweiseitige Ideal ein vollständig reduzibles umfaßt:

Jedes v. r. R.-Ideal $\mathfrak{a}_\alpha$ besitzt ein Radikal $\mathfrak{c}_\alpha$ und der Restklassenring $\mathfrak{a}_\alpha^*$ nach diesem Radikal ist vollständig reduzibel. Daraus folgt, daß $\mathfrak{a}_\alpha/\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_\alpha^*$, weil ja $\mathfrak{a}_\alpha^*$ kein Nilideal enthält, also der Durchschnitt $[\mathfrak{a}, \mathfrak{c}]$ gerade $\mathfrak{c}_\alpha$ ist. Jedes zweiseitige Ideal in $\mathfrak{o}^*$ ist regulär, umfaßt daher ein vollständig reduzibles zweiseitiges Ideal, also $\mathfrak{o}^*$ transzendent reduzibel.

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{c}$ das Radikal von $\mathfrak{o}$, brauchen wir nur noch zu beweisen, daß ein transzendent reduzibler Ring $\mathfrak{o}^*$ kein Rechts- und kein Linksnilideal enthält, denn dann umfaßt $\mathfrak{c}$ sämtliche Rechts- und Linksnilideale von $\mathfrak{o}$, ist also das Radikal.

Es sei also $\mathfrak{s}$ Rechtsnilideal in $\mathfrak{o}^*$, e_α das Einheitselement des zweiseitig einfachen Ideals $\mathfrak{a}_\alpha^*$. Dann ist $\mathfrak{s} e_\alpha = e_\alpha \mathfrak{s}$ nach einem früheren Schluß, also $\mathfrak{s} e_\alpha$ wieder Rechtsnilideal. Da $\mathfrak{a}_\alpha^*$ kein Nilideal enthält, wird $c e_\alpha = 0$ für jedes c aus $\mathfrak{s}$ und jedes e_α. Ein Element c, dessen sämtliche Komponenten verschwinden, ist aber selbst Null, also $\mathfrak{s} = 0$. Analog für Linksnilideale.

Das obige Beispiel zeigt, daß primäre, also auch allgemein zwei v. r. R.-Ideale $\mathfrak{a}_\alpha$ und $\mathfrak{a}_\beta$ mit Restklassenidealen in $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, deren Durchschnitt $[\mathfrak{a}_\alpha/\mathfrak{c}, \mathfrak{a}_\beta/\mathfrak{c}]$ Null ist, einen von Null verschiedenen Durchschnitt $[\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta] = \mathfrak{d}_{\alpha\beta}$ haben können. Aber auch, wenn wir den Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{d}$ nach dem durch alle $\mathfrak{d}_{\alpha\beta}$ erzeugten zweiseitigen Nilideal $\mathfrak{d} = (\ldots \mathfrak{d}_{\alpha\beta} \ldots)$ betrachten, scheint es schwierig, allgemein einen zu $\mathfrak{o}/\mathfrak{d}$ ringisomorphen Ring $\mathfrak{o}^* = \sum\limits_{\alpha} \bar{\mathfrak{a}}_\alpha^*$, $\bar{\mathfrak{a}}_\alpha^*$

ringisomorph mit $\mathfrak{a}_a/\mathfrak{b}$ zu konstruieren, da wir kein Mittel haben, um die Existenz direkter Zerlegungen $\mathfrak{o}/\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_a/\mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{o}}_a$ zu zeigen, die nach Satz 3 für die Konstruktion des Ringes $\mathfrak{o}^*$ notwendig sind. In den früher durchgeführten Konstruktionen wurden diese Zerlegungen durch Idempotente e_a geliefert, die natürlich jetzt fehlen.

II. Anwendung auf die Darstellungstheorie geschlossener kontinuierlicher Gruppen.

§ 6.

Einführung des Gruppenringes einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.

Die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ läuft auf die idealtheoretische Untersuchung des Gruppenringes $\mathfrak{g}$ hinaus[12]), d. h. des aus sämtlichen Linearkombinationen $\sum_s s\, x_s$ gebildeten Ringes, wobei s alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft und die x_s beliebige komplexe, mit den s vertauschbare Zahlen sind. Die Addition zweier solcher Summen ist definiert als Addition der Koeffizienten, die Multiplikation wird durch die Gruppenmultiplikation bestimmt.

Wir wollen versuchen, für eine kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ uns ebenfalls einen Gruppenring zu verschaffen[13]). Es ist jedenfalls möglich, alle endlichen Summen von Gruppenelementen $\sum_i s_i\, x_i$ mit komplexen Koeffizienten x_i zu einem Ring zu vereinigen, genau so wie bei endlichen Gruppen. Wie steht es aber mit den unendlichen, über alle Elemente von $\mathfrak{G}$ erstreckten Summen, deren Koeffizienten wir aus gleich ersichtlichem Grunde als Funktionen $x(s)$ schreiben?

Es seien $\sum_s s\, x(s)$ und $\sum_t t\, y(t)$ zwei solche Summen. Dann liefert die Summe der beiden das wohldefinierte Element $\sum_s s\,(x(s) + y(s))$. Wenn wir genau wie oben das Produkt nach der Gruppenmultiplikation definieren wollten, so bekämen wir $\sum_s s\, x(s) \sum_t t\, y(t) = \sum_r r \sum_{st=r} x(s)\, y(t)$ $= \sum_r r \sum_t x(r t^{-1})\, y(t)$. Diese unendliche Summe definiert keine Funktion, es liegt aber nahe, und diesen Übergang hat in dieser Form Weyl gemacht, statt der Summation die Integration über ganz $\mathfrak{G}$ vorzunehmen, also das Produkt zu definieren als $\sum_r r \int_{\mathfrak{G}} x(r t^{-1})\, y(t)\, dt$.

---

[12]) Vgl. insbesondere die Darstellung in N.

[13]) Die Idee, den Gruppenring $\mathfrak{g}$ neben dem Ring $\mathfrak{o}$ einzuführen, verdanke ich Fräulein Noether. Die folgenden Überlegungen haben heuristischen Charakter bis zur genauen Definition von $\mathfrak{g}$.

Für die geschlossenen kontinuierlichen Gruppen, die die Lieschen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllen (mit solchen wollen wir uns ausschließlich beschäftigen), ist eine solche Integration möglich. Denn auf ihnen läßt sich ein Volumelement ds definieren, so daß die Integration von Funktionen über die ganze Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ möglich ist[14]).

Eine vom Gruppenelement s abhängige, auf ganz $\mathfrak{G}$ definierte Funktion $x(s)$ nennen wir mit Weyl eine „Gruppenzahl". Die Koeffizienten von s einer Summe $\sum_s s\, x(s)$ durchlaufen offenbar die Werte einer solchen Funktion.

Das Gesamtvolumen $\int_{\mathfrak{G}} ds$ von $\mathfrak{G}$ sei V. Das Volumelement ds ändert sich nicht bei den Substitutionen $s \to s r$, $s \to r s$ und $s \to s^{-1}$, d. h. $d(s r) = ds$ usf. Dabei bedeutet $s r$ das Produkt der Gruppenelemente s und r.

Wir definieren nun den *stetigen Gruppenring* $\mathfrak{g}$ *von* $\mathfrak{G}$ folgendermaßen:

$\mathfrak{g}$ enthalte erstens den Ring $\mathfrak{g}_e$, gebildet aus allen endlichen Summen $\sum_{i=1}^{n} s_i x_i$, n beliebig, s_i beliebig aus $\mathfrak{G}$, x_i komplexe mit den s_i vertauschbare Zahlen. Die Addition zweier solcher Elemente ist definiert als Addition in den Koeffizienten, d. h. wenn $\sum_i s_i y_i + \sum_j t_j z_j$, $t_j \neq s_i$ für alle i und j, eine zweite Summe ist, so ist $\sum_i s_i x_i + (\sum_i s_i y_i + \sum_j t_j z_j) = \sum_i s_i (x_i + y_i) + \sum_j t_j z_j$. $\sum_i s_i x_i$ soll dann und nur dann $= 0$ sein, wenn alle $x_i = 0$ sind. Die Multiplikation ist definiert durch $\sum_i s_i x_i \sum_j t_j y_j = \sum_{ij} v_{ij} x_i y_j$, wenn $s_i t_j = v_{ij}$ in $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{g}$ enthalte zweitens den Ring $\mathfrak{g}_u$, gebildet aus allen unendlichen Summen $\sum_s s\, x(s)$, $x(s)$ eine *stetige* Funktion und s durchläuft alle Elemente von $\mathfrak{G}$. Die Addition ist wieder als Addition der Komponenten definiert und die Multiplikation durch

$$\sum_s s\, x(s) \sum_t t\, y(t) = \sum_r r \int x(r t^{-1})\, y(t)\, dt \;^{14}).$$

Diese Produktbildung ist assoziativ, es ist nämlich

$$\sum_s s\, x(s) \{\sum_t t\, y(t) \sum_u u\, z(u)\} = \sum_v v \int x(v t^{-1}) \int y(t u^{-1}) z(u)\, du\, dt$$

und

$$\{\sum_s s\, x(s) \sum_t t\, y(t)\} \sum_u u\, z(u) = \sum_v v \int\int x(v u^{-1} t^{-1})\, y(t)\, dt\, z(u)\, du.$$

Durch die Substitution $t \to t u^{-1}$, die dt ungeändert läßt, wird der Koeffizient des zweiten Ausdrucks gleich dem des ersten.

---

[14]) Vgl. für das folgende W. und die dort angegebene Literatur.

$\mathfrak{g}_e$ und $\mathfrak{g}_u$ sollen $\mathfrak{g}$ erzeugen, wir haben also noch die Addition und Multiplikation zweier Elemente aus $\mathfrak{g}_e$ und $\mathfrak{g}_u$ zu definieren. Die Addition ist dadurch bestimmt, daß wir die Summe zweier Elemente aus $\mathfrak{g}_e$ und $\mathfrak{g}_u$ einfach formal einführen und festsetzen, daß zwei Elemente $\sum_i s_i x_i + \sum_s s\,x(s)$ und $\sum_i t_i y_i + \sum_t t\,y(t)$ dann und nur dann gleich sind, wenn $\sum_i s_i x_i = \sum_i t_i y_i$ und $\sum_s s\,x(s) = \sum_t t\,y(t)$. Die Multiplikation ist definiert durch $\sum_{i=1} t_i x_i \cdot \sum_s s\,x(s)$ $= \sum_i \sum_s t_i s\,x_i x(s) = \sum_i \sum_s s\,x_i x(t_i^{-1} s)$ und $\sum_s s\,x(s) \cdot \sum_i t_i x_i = \sum_i \sum_s s\,x_i x(s t_i^{-1})$. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathfrak{g}$ alle Ringgesetze erfüllt[15]).

$\mathfrak{g}_u$ *ist, wie sofort zu sehen, Ideal in* $\mathfrak{g}$, *also auch* $\mathfrak{G}$*-Linksmodul.*

Weyl und Peter betrachten nicht den Ring $\mathfrak{g}$, sondern den Ring $\mathfrak{o}$ aller stetigen Gruppenzahlen $x(s)$, in dem die Summe definiert ist als $x(s) + y(s)$ und das Produkt als $x\,y(s) = \int_{\mathfrak{G}} x(s r^{-1})\, y(r)\, dr$.

Es ist sofort zu sehen, daß die Zuordnung $\sum_s s\,x(s) \rightarrow x(s)$ einen Isomorphismus der beiden Ringe $\mathfrak{g}_u$ und $\mathfrak{o}$ liefert, der, da in beiden Ringen keine unendlichen Summen definiert sind, ein transzendenter ist.

$\mathfrak{o}$ ist ebenfalls $\mathfrak{G}$-Linksmodul, wenn wir entsprechend der Isomorphie mit $\mathfrak{g}_u$ $t\,x(s)$ als $x(t^{-1} s)$ definieren.

§ 7.

Die Struktur von $\mathfrak{g}_u$.

Genau so wie im Fall der endlichen Gruppen wollen wir jetzt die Struktur des Gruppenringes $\mathfrak{g}$ der geschlossenen kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ untersuchen. Es wird sich zeigen, daß es für die Theorie der stetigen Darstellungen genügt, die Struktur von $\mathfrak{g}_u$ zu untersuchen. Der Hauptsatz, auf dem die ganze Darstellungstheorie beruht, ist der Satz:

Der Ring $\mathfrak{g}_u(\mathfrak{o})$ *ist transzendent reduzibel.*

Wir wollen ihn der einfacheren Schreibweise wegen für $\mathfrak{o}$ beweisen (wegen der transzendenten Isomorphie zwischen $\mathfrak{g}_u$ und $\mathfrak{o}$ gelten ja sämtliche Aussagen über die Struktur von $\mathfrak{o}$ auch für $\mathfrak{g}_u$).

$\mathfrak{o}$ ist transzendent reduzibel, wenn jedes zweiseitige Ideal ein zweiseitiges vollständig reduzibles umfaßt (vgl. I § 1). Zum Nachweis dieses

---

[15]) Wollte man die Multiplikation in $\mathfrak{g}$ einheitlich definieren, so müßte man statt des Elementes g aus $\mathfrak{G}$ eine Summe $\sum_s s\,x(s)$ einführen mit uneigentlichen Diracschen Funktionen $x(s)$, z. B. für das Einheitselement $\bigcirc$ von $\mathfrak{G}$ eine Funktion $x(s)$ derart, daß $\int x(s t^{-1})\, y(t)\, dt = y(s)$ für alle $y(t)$ (vgl. z. B. Hilbert, v. Neumann und Nordheim, Über die Grundlagen der Quantenmechanik, Math. Annalen 98, S. 1).

Satzes bedienen wir uns der Methode von Peter und Weyl, der wir folgenden ringtheoretischen Sinn geben können.

In dem Ring $\mathfrak{o}$, dessen Elemente die stetigen Funktionen auf $\mathfrak{G}$ sind, ist durch die gleichmäßige Konvergenz einer Folge $x_n(s)$ gegen eine Grenzfunktion $x(s)$ ein Limesbegriff eingeführt, der die Bedingung erfüllt, daß der Limes des Produktes $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n(s)$ gleich dem Produkte der Limites $\{\lim x_n \lim y_n\}(s)$ ist, Produkt im Sinne der Ringmultiplikation zu verstehen.

In beliebigen Ringen, in denen ein Limesbegriff eingeführt ist, der die Eigenschaft hat, daß jede Teilfolge gegen denselben Limes strebt, daß die Folge $x, x, \ldots, x, \ldots$ gegen x strebt und daß $\lim x_n y_n = \lim x_n \lim y_n$, gilt der Satz:

Konvergiert die Folge der Potenzen x^n eines Elementes x gegen einen Limes y, so ist y ein Idempotent und es gilt $xy = yx = y$.

Denn es wird unter Berücksichtigung der Eigenschaften des Limes $\lim x^n x^n = y^2 = \lim x^n = y$, ferner $\lim x \cdot x^n = xy = \lim x^n \cdot x = yx = y$.

Wir können die vollständig reduziblen zweiseitigen Ideale in $\mathfrak{o}$ also so zu finden suchen, daß wir in jedem Ideal ein Idempotent e als Grenzfunktion einer Folge von Potenzen einer Gruppenzahl konstruieren und dann nachweisen, daß in dem durch e erzeugten Ideal ein vollständig reduzibles liegt.

Hilfssatz 1. *Jedes zweiseitige Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{o}$ enthält ein Idempotent.*

Beweis. Wir bringen zuerst zwei Definitionen: Eine Gruppenzahl heißt hermitesch, wenn $x(s) = \bar{x}(s^{-1})$ ($^-$ ist das Zeichen für konjugiert komplex). Allgemein bezeichnen wir $\bar{x}(s^{-1})$ als Funktion von s mit $\tilde{x}(s)$. Das Produkt $x\tilde{x}(s)$ ist immer hermitesch:

$$x\tilde{x}(s) = \int x(sr^{-1})\,\bar{x}(r^{-1})\,dr = \overline{x\tilde{x}}(s^{-1}) = \int \bar{x}(s^{-1}r^{-1})\,x(r^{-1})\,dr,$$

man braucht in dem letzten Ausdruck nur r durch rs^{-1} zu ersetzen.

Als Spur eines Elementes x, $Sp(x)$, bezeichnet man die Zahl $V \cdot x(\circ)$, V das Volumen von $\mathfrak{G}$, $x(\circ)$ der Wert der Funktion $x(s)$ für das Einheitselement $\circ$ der Gruppe.

Es sei nun x ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}$. Wir bezeichnen die hermitesche Gruppenzahl $x\tilde{x}x\tilde{x}(s) = (x\tilde{x})^2$ mit z, die Spur von z mit γ. Dann konvergiert, wie E. Schmidt gezeigt hat[16]), die Folge der Potenzen $\frac{z^n}{\gamma^n}$ von

[16]) Wir führen die Rechnung nicht durch, sie ist fast wörtlich dieselbe wie bei E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Math. Annalen 63, S. 455.

$\frac{z}{\gamma}$ gleichmäßig gegen eine hermitesche Gruppenzahl $e(s) \neq 0$. Nach dem obigen Satze gilt also $e^2 = e$ und $ze = ez = \gamma e$.

In $\mathfrak{a}$ kommen mit x die Elemente $x\bar{x}, (x\bar{x})^2 = z, \frac{ze}{\gamma} = \frac{\gamma e}{\gamma} = e$ vor, $\mathfrak{a}$ enthält also das Idempotent e.

Der Beweis dieses Hilfssatzes beruht auf transzendenten Überlegungen, d. h. Konvergenzbetrachtungen.

Hilfssatz 2. *Das Idempotent $e(s)$ erzeugt ein Ideal endlichen Ranges.*

Der teilweise nach Peter und Weyl verlaufende Beweis dieses Satzes beruht im wesentlichen darauf, daß die Integralgleichung $\int z(sr^{-1})\varphi(r)\,dr = \gamma\varphi(s)$ nur endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen $\varphi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, besitzt.

Mit $e(s)$ ist auch $e(st^{-1})$ zum Eigenwert $\frac{1}{\gamma}$ gehörige Eigenfunktion der Integralgleichung, denn $\int z(sr^{-1})e(rt^{-1})\,dr = \int z(st^{-1}r^{-1})e(r)\,dr = \gamma e(st^{-1})$. Es wird also $e(st^{-1})$ Linearkombination der $\varphi_i(s)$, $e(st^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\varphi_i(s)$. Da $e(st^{-1}) = \bar{e}(ts^{-1})$, so ist auch $e(st^{-1}) = \sum \bar{a}_i(s)\bar{\varphi}_i(t)$.

Das von $e(s)$ erzeugte Ideal $\mathfrak{o}e\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e\cdot e\mathfrak{o}$ besteht aus allen Produkten $xe\cdot ey$ und deren endlichen Summen. Es ist

$$ey(s) = \int e(st^{-1})y(t)\,dt$$
$$= \sum \int a_i(t)\varphi_i(s)y(t)\,dt = \sum_i m_i\varphi_i(s),\quad xe(s) = \int x(st^{-1})e(t)\,dt = \int x(t^{-1})e(ts)\,dt$$
$$= \sum_i \int x(t^{-1})\bar{a}_i(t)\bar{\varphi}_i(s^{-1})\,dt = \sum_i n_i\bar{\varphi}_i(s^{-1}).$$

Also

$$xeey(s) = \sum_{ik} m_i n_k \int \bar{\varphi}_k(ts^{-1})\varphi_i(t)\,dt.$$

Das Ideal $\mathfrak{o}e\mathfrak{o}$ enthält also nur Linearkombinationen der endlich vielen Elemente $\int \bar{\varphi}_k(ts^{-1})\varphi_i(t)\,dt$, hat also als K-Modul bestimmt eine Basis von endlich vielen Gruppenzahlen $f_i(s)$, d. h. ist identisch mit der Gesamtheit aller Summen $\sum_i f_i(s)k_i$, k_i beliebig aus K.

Jetzt verläuft der Beweis des Hauptsatzes rein algebraisch weiter: $\mathfrak{o}e\mathfrak{o} = \sum f_i(s)K$ bildet ein hyperkomplexes System. $\mathfrak{o}e\mathfrak{o}$ ist vollständig reduzibel auch als Ideal in $\mathfrak{o}$, wie man so einsieht: Gäbe es in $\mathfrak{o}e\mathfrak{o}$ ein nilpotentes Ideal, z. B. ein Rechtsideal $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}^e = 0$, so wäre auch das zweiseitige Ideal $\mathfrak{o}\mathfrak{r}$ nilpotent, da $(\mathfrak{o}\mathfrak{r})^e = \mathfrak{o}\mathfrak{r}\mathfrak{o}\mathfrak{r}\ldots\mathfrak{o}\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{o}\mathfrak{r}^e = 0$, $\mathfrak{o}\mathfrak{r}$ müßte aber wegen Hilfssatz 1 ein Idempotent enthalten, was unmöglich ist. Wegen $\mathfrak{o}e\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{a}$ erfüllt $\mathfrak{o}$ also die Bedingungen für einen transzendent reduziblen Ring (vgl. § 1), der Hauptsatz ist damit bewiesen.

§ 8.

Die Darstellungstheorie von $\mathfrak{G}$.

Wenden wir die Resultate von I § 2 an, so bekommen wir:

$\mathfrak{o}$ wird isomorph einem transzendent vollständig reduziblen Ring $\mathfrak{o}^* = \sum \mathfrak{b}_\beta^*$. Die den $\mathfrak{b}_\beta^*$ in $\mathfrak{o}$ entsprechenden zweiseitig einfachen Ideale $\mathfrak{b}_\beta$ sind Ringe mit dem Koeffizientenbereich K, haben also[17]) die Gestalt $\sum_{i,k=1}^{n_\beta} c_{ik}^{(\beta)}(s) K$, wobei die $c_{ik}^{(\beta)}(s)$ den Relationen

$$\int c_{ik}^{(\beta)}(s t^{-1}) c_{k'l}^{(\beta)}(t)\, dt = \begin{cases} c_{il}^{(\beta)}(s) & \text{für } k = k' \\ 0 & \text{für } k \neq k' \end{cases}$$

genügen[18]).

Die Struktur von $\mathfrak{g}_u(\mathfrak{o})$ bestimmt nun genau wie bei den endlichen Gruppen die ganze Darstellungstheorie. Es gilt nämlich der folgende

Hauptsatz: *Jede Klasse von äquivalenten irreduziblen stetigen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ bildet ein zweiseitiges einfaches Ideal in $\mathfrak{o}$ und umgekehrt liefern die einfachen Linksideale in einem beliebigen zweiseitig einfachen Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{o}$ genau eine irreduzible stetige Darstellungsklasse $P^{-1} E(s) P$ und die Elemente $\frac{n}{V} e_{kl}(s^{-1})$ sind ein System von Matrizeneinheiten c_{ik} von $\mathfrak{b}$. Verschiedene zweiseitig einfache Ideale liefern inäquivalente Darstellungen. Ein volles System von irreduziblen stetigen Darstellungsklassen wird durch ein System von je einem einfachen Linksideal $\mathfrak{l}_\beta$ aus allen $\mathfrak{b}_\beta$ geliefert.*

Hilfssatz. *Ein einfaches Linksideal in $\mathfrak{o}$ ist Darstellungsmodul für $\mathfrak{G}$, liefert also eine Darstellungsklasse von $\mathfrak{G}$.*

Es sei $\mathfrak{l} = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}(s) K$. Daß $\mathfrak{l}$ diese Gestalt hat, folgt aus der Struktur von $\mathfrak{o}$. Wir zeigen zuerst, daß $\mathfrak{l}$ $\mathfrak{G}$-Modul ist. Es wird nach unseren Festsetzungen in § 6 $t c_{ik}(s) = c_{ik}(t^{-1} s)$. Es ist nach den obigen Formeln $\int c_{ik}(t^{-1} s r^{-1}) c_{kk}(r)\, dr = c_{ik}(t^{-1} s)$, $c_{kk}(s)$ ist also auch Rechtseinheit für $c_{ik}(t^{-1} s)$, das daher in $\mathfrak{l}$ liegt, also die Form $\sum_l e_{li}(t) c_{lk}(s)$ hat. $\mathfrak{l}$ ist daher $\mathfrak{G}$-Linksmodul und es wird

$$\begin{aligned} t(c_{1k}(s), \ldots, c_{nk}(s)) &= (c_{1k}(t^{-1} s), \ldots, c_{nk}(t^{-1} s)) \\ &= (c_{1k}(s), \ldots, c_{nk}(s))\, E(t), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $E(t) = (e_{li}(t))$.

---

[17]) Es gibt ja keine nichtkommutativen Körper endlichen Ranges über dem Körper der komplexen Zahlen K, also ist ein zweiseitig einfacher Ring über K Matrizenring $\sum_{ik} c_{ik} K$ nach dem in § 1 Gesagten.

[18]) Diese $c_{ik}(s)$ entsprechen den Größen c_{ik} eines gewöhnlichen Matrizenringes, wobei unter c_{ik} die Matrix zu verstehen ist, die in der i-ten Zeile und k-ten Spalte eine Eins, sonst überall Null stehen hat.

Es entspricht weiter $tt' \to E(t)E(t')$, die Zuordnung $t \to E(t)$ ist also eine Darstellung von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{l}$ ist daher ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{G}$, nach den Bemerkungen in § 4 gilt also unser Satz.

Da zwei einfache Linksideale $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ aus demselben zweiseitig einfachen Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{o}$ als $\mathfrak{G}$-Moduln operatorisomorph sind, es gibt nämlich ein Element $a(s)$ aus $\mathfrak{b}$ (N., S. 665), so daß $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}_2 a$, so liefern sie dieselbe Darstellungsklasse von $\mathfrak{G}$ (vgl. N. S. 671).

Wir haben damit jedem zweiseitig einfachen Ideal gerade eine Darstellungsklasse zugeordnet.

Weiter gilt der Satz: *Die Komponenten $e_{ik}(s)$ einer stetigen Darstellung von $\mathfrak{G}$ sind die (nicht notwendig linear unabhängigen) Basiselemente eines zweiseitigen Ideals in $\mathfrak{o}$.*

Das folgt sofort aus der Darstellungseigenschaft, denn $e_{ik}x(s) = \int e_{ik}(st^{-1})x(t)\,dt$ wird zu $\sum\limits_l e_{il}(s)\int e_{lk}(t^{-1})x(t)\,dt$, analog $x\,e_{ik}(s)$.

Daraus schließt man so, *daß die durch ein zweiseitig einfaches Ideal* $\mathfrak{b}$ *erzeugte Darstellungsklasse irreduzibel ist*: Für $s = \mathrm{o}$ folgt aus (1) und den entsprechenden Gleichungen für die übrigen k, daß $\mathfrak{b}$ Unterideal des von der Darstellung $E'(t^{-1})$ gebildeten Ideals $\mathfrak{b}'$ ist. Da die n^2 Elemente $c_{ik}(s)$ linear unabhängig sind und $\mathfrak{b}'$ ebenfalls höchstens n^2 linear unabhängige Basiselemente hat, ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$. Wenn $E(t)$ reduzibel ist, ist $E'(t^{-1})$ reduzibel. Dem irreduziblen Bestandteil $E_1'(t^{-1})$ von $E'(t^{-1})$ würde aber, wie sich sofort aus den Basiszahlen ergibt, ein echtes zweiseitiges Unterideal von $\mathfrak{b}$ entsprechen, was unmöglich ist.

Die Stetigkeit der durch $\mathfrak{b}$ *gelieferten Darstellungsklasse* folgt ebenfalls daraus, daß die $e_{ik}(s^{-1})$ eine Basis von $\mathfrak{b}$ bilden, sich also linear durch die andere stetige Basis $c_{ik}(s)$ ausdrücken.

Umgekehrt gilt der Hilfssatz: *Die Komponenten $e_{ik}(s)$ einer irreduziblen stetigen Darstellung $E(s)$ sind bis auf einen konstanten Faktor die Matrizeneinheiten eines zweiseitig einfachen Ideals* $\mathfrak{b}$ *in* $\mathfrak{o}$.

Daß $\mathfrak{b}$ Ideal ist, haben wir schon bewiesen. Für die Komponenten einer irreduziblen Darstellung $E(s)$ von $\mathfrak{G}$ gelten die Relationen[19])

$$(2)\qquad \int e_{ik}(s^{-1})\,e_{\varkappa\iota}(s)\,ds = \begin{cases} \dfrac{V}{n} & \text{für } i=\iota,\ k=\varkappa;\ i,k,\iota,\varkappa = 1,2,\dots n, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Diese Relationen lassen sich auch in der Form

$$(3)\qquad \int e_{ik}(sr^{-1})\,e_{\varkappa\iota}(r)\,dr = \begin{cases} \dfrac{V}{n}\,e_{i\iota}(s) & \text{für } k=\varkappa, \\ 0 & \text{für } k \neq \varkappa \end{cases}$$

[19]) W., S. 789 und die dort angegebene Literatur.

schreiben, denn wegen der Darstellungseigenschaft $E(sr^{-1}) = E(s)E(r^{-1})$ wird $\int e_{ik}(sr^{-1})e_{\varkappa\iota}(r)\,dr = \int \sum_j e_{ij}(s)e_{jk}(r^{-1})e_{\varkappa\iota}(r)\,dr$ und unter Berücksichtigung von (2) folgt sofort (3).

Die Relationen (3) bedeuten nun aber nichts anderes, als daß die Größen $\frac{n}{V}e_{ik}(s)$ bei unserer Ringmultiplikation in $\mathfrak{o}$ ein System von Größen $c_{ik}(s)$ bilden, die sich genau so multiplizieren wie die Matrizeneinheiten c_{ik} eines vollen Matrizenringes, d. h. der Ring $\mathfrak{d} = \sum_{i,k} e_{ik}(s)K$ ist ein voller Matrizenring[20]).

Daß die ganze Klasse $E^*(s) = P^{-1}E(s)P$ dasselbe Ideal liefert, folgt daraus, daß die $e^*_{ik}(s)$ Linearkombinationen der $e_{ik}(s)$ sind. Ordnen wir jetzt dem zweiseitig einfachen Ideal $\mathfrak{d}_\beta$ die dadurch erzeugte irreduzible Darstellungsklasse $P^{-1}E(s)P$ zu und dieser Klasse das durch $E'(s^{-1})$ erzeugte zweiseitig einfache Ideal $\mathfrak{d}_\beta$, so haben wir damit eine eineindeutige Zuordnung zwischen allen $\mathfrak{d}_\beta$ und allen irreduziblen stetigen Darstellungsklassen gegeben, aus der die beiden letzten Behauptungen des Hauptsatzes folgen.

Daß jede Darstellung $E(s)$ von $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel ist, folgt so: $E(s)$ bildet ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a}$ mit der Basis $e_{ik}(s)$, das als Unterideal endlichen Ranges eines transzendent reduziblen Ringes vollständig reduzibel ist. Also ist die von dem vollständig reduziblen Darstellungsmodul $\mathfrak{l} = \sum_i e_{ik}(s)K$ gelieferte Darstellung $E'(t^{-1})$ vollständig reduzibel (vgl. N., S. 673), also $E(s)$ selbst.

Wir wollen schließlich noch die bei Weyl und Peter im Vordergrund der Betrachtungen stehenden funktionentheoretischen Eigenschaften der Darstellungen ableiten und sie im Rahmen unserer ringtheoretischen Auffassung deuten.

Es gilt der Satz, daß jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ einer unitären äquivalent ist (Weyl, loc cit., S. 735). Für eine unitäre Darstellung werden die Relationen (2) zu

$$(2') \qquad \int e_{ik}(s)\bar{e}_{\iota\varkappa}(s)\,ds = \begin{cases} \frac{V}{n} & \text{für } i=\iota,\ k=\varkappa,\ i,k,\iota,\varkappa = 1,2,\ldots,n, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Für zwei irreduzible unitäre inäquivalente Darstellungen $E(s)$ und $E^*(s)$ gelten die Relationen

$$(4) \qquad \int e_{ik}(s)\bar{e}^*_{\iota\varkappa}(s)\,ds = 0 \quad \text{für alle } i,k,\iota,\varkappa.$$

---

[20]) Ohne Verwendung der Relationen (2) kann gezeigt werden, weil die durch das Linksideal $\mathfrak{l} = \sum_i c_{ik}(s)K$ erzeugte Darstellung $E'(t^{-1})$ irreduzibel ist, daß $\mathfrak{l}$ einfach und daher auch $\mathfrak{d}$ zweiseitig einfach ist.

Sie folgen z. B. daraus, daß $E(s)$ und $E^*(s)$ verschiedene zweiseitig einfache Ideale erzeugen, daß also das Produkt zweier Elemente aus dem einen und dem zweiten Ideal immer Null gibt.

Die sämtlichen Komponenten einer Menge von inäquivalenten irreduziblen unitären Darstellungen $E_\beta(s)$ bilden also auf $\mathfrak{G}$ ein unitär orthogonales Funktionensystem.

Es kann daher als Basis jedes zweiseitig einfachen Ideals $\mathfrak{b}_\beta$ in $\mathfrak{G}$ ein System von unitär orthogonalen Funktionen $c_{ik}^{(\beta)}(s) = \frac{n}{V} e_{ik}^{(\beta)}(s)$ genommen werden.

Der Ring $\mathfrak{o}$ ist isomorph dem transzendent vollständig reduziblen Ring $\mathfrak{o}^* = \sum_\beta \mathfrak{b}_\beta^*$, wenn β ein Index ist, so daß $\mathfrak{b}_\beta$ die sämtlichen zweiseitig einfachen Ideale von $\mathfrak{o}$ durchläuft. Die Isomorphie zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^*$ ordnet jeder Gruppenzahl $x(s)$ die Summe $\sum_\beta x\, e_\beta(s)$ zu, e_β das Einheitselement von $\mathfrak{b}_\beta^*$.

Überlegen wir uns, wie sich $x\, e_\beta(s)$ durch die Basiselemente $c_{ik}^{(\beta)}(s)$ des Ideals $\mathfrak{b}_\beta^*$ ausdrückt! Es ist jedenfalls $x\, e_\beta(s) = \sum_{ik} a_{ik}^{(\beta)} c_{ik}^{(\beta)}(s)$. Nun ist $x\, e_\beta c_{ki}^{(\beta)}(s) = x\, c_{ki}^{(\beta)}(s) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{(\beta)} c_{ji}^{(\beta)}(s)$, also ist, da $(c_{ik}^{(\beta)}(\circ)) = \frac{n}{V} \mathit{1}$, $\mathit{1}$ die Einheitsmatrix, $\frac{n}{V} a_{ik}^{(\beta)} = x\, c_{ki}^{(\beta)}(\circ) = \int x(s)\, \bar{c}_{ik}^{(\beta)}(s)\, ds$, weil $c_{ki}(s^{-1}) = \bar{c}_{ik}(s)$. $a_{ik}^{(\beta)}$ ist daher der Fourierkoeffizient von x nach $c_{ik}(s)$. Also:

Der Ring $\mathfrak{o}^*$ ist der Ring der Fourierreihen nach dem unitär orthogonalen Funktionensystem $c_{ik}^{(\beta)}(s) = \frac{n}{V} e_{ik}^{(\beta)}(s)$. Die Isomorphie $\mathfrak{o} \simeq \mathfrak{o}^*$ bedeutet die Abgeschlossenheit des Systems im Gebiet der stetigen Gruppenzahlen.

Die Abgeschlossenheit heißt ja, daß eine Gruppenzahl $x(s)$, die auf allen $c_{ik}^{(\beta)}(s)$ orthogonal steht, identisch verschwindet. Dann sind also alle $a_{ik}^{(\beta)}$ Null, es entspricht dem $x(s)$ die Null in $\mathfrak{o}^*$, wegen der Isomorphie $\mathfrak{o} \simeq \mathfrak{o}^*$ muß also $x(s)$ selbst Null sein.

Da $e_{ik}^{(\beta)}(s) = \frac{V}{n} c_{ik}^{(\beta)}(s)$, ist auch das System der $e_{ik}^{(\beta)}(s)$ abgeschlossen.

§ 9.

Der Ring $\bar{\mathfrak{o}}$ der absolut quadratisch integrierbaren Gruppenzahlen.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen überlegen, wie sich die Resultate modifizieren, wenn wir statt der Ringe $\mathfrak{g}_u$ bzw. $\mathfrak{o}$ die Ringe $\bar{\mathfrak{g}}_u$ bzw. $\bar{\mathfrak{o}}$ zugrunde legen, die wir bekommen, wenn wir statt der stetigen Funktionen die samt dem Quadrate ihres absoluten Betrages integrierbaren komplexwertigen Funktionen $x(s)$ auf $\mathfrak{G}$ zulassen.

Wir operieren am einfachsten mit dem Ring $\bar{\mathfrak{o}}$. Summe und Produkt zweier Gruppenzahlen seien genau wie früher definiert. Wir haben uns zu überzeugen, daß sie wieder absolut quadratisch integrierbare Funktionen sind.

Mit x_1 und x_2 ist $x_1 + x_2$ absolut quadratisch integrierbar, weil die Summen der Real- und Imaginärteile quadratisch integrierbar sind[21]).

Das Produkt $xy(s)$ ist nicht nur quadratisch integrierbar, es gilt sogar der Satz[22]):

Das Produkt $xy(s)$ ist eine stetige Gruppenzahl.

Beim Beweise stützen wir uns auf den Satz, daß es für jedes ε zu einer absolut quadratisch integrierbaren Funktion $x(s)$ eine stetige Funktion $g(s)$ gibt, so daß $\int |x(r) - g(r)|^2 dr < \varepsilon$ [23]).

Durch die Substitution $r \to s r^{-1}$, die dr ungeändert läßt, bekommen wir $\int |x(sr^{-1}) - g(sr^{-1})|^2 dr < \varepsilon$.

Wir zerlegen

$$xy(s) = \int x(sr^{-1})\, y(r)\, dr$$
$$= \int \{x(sr^{-1}) - g(sr^{-1})\}\, y(r)\, dr + \int g(sr^{-1})\, y(r)\, dr.$$

Der zweite Summand ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $g(sr^{-1})$ von s auf $\mathfrak{G}$ eine stetige Gruppenzahl. Für den ersten Summanden gilt aber nach der Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung

$$\left| \int \{x(sr^{-1}) - g(sr^{-1})\}\, y(r)\, dr \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \left[\int |y(r)|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\varepsilon} \cdot c.$$

Daraus folgt sofort die Stetigkeit von $xy(s)$.

Ein Nebenresultat ist der Satz: *Jede absolut quadratisch integrierbare Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist stetig*[24]).

Denn aus der Gleichung $\int E(st^{-1})\, E(t)\, dt = E(s) \int E(t^{-1})\, E(t)\, dt$ folgt, daß $e_{pq}(s)$ Linearkombination der stetigen Produkte $\int e_{ik}(st^{-1})\, e_{kl}(t)\, dt$ ist.

Es kann vorkommen, daß für ein Element $x(s)$ aus $\bar{\mathfrak{o}}$ $x\tilde{x}(\bigcirc) = 0$ ist. Dann folgt aus der Schwarzschen Ungleichung für eine beliebige

---

[21]) Zur genaueren Durchführung bedenke man, daß, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die Parameter der Gruppe sind, $x(s) = x(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, $ds = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n$ ist, $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ stetig. Man trennt xf in Real- und Imaginärteil, dann folgt der Satz, weil er für reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher gilt, vgl. z. B. Hobson, The theory of functions of a real variable I, S. 534, zitiert als H.

[22]) Der Grundgedanke des Beweises ist einem Satze von W. H. Young entnommen, vgl. H. II, S. 331.

[23]) Folgt genau so wie oben aus dem entsprechenden Satz für reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher, H. I, S. 584.

[24]) Vgl. die Resultate von J. v. Neumann; Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 3.

Funktion $y(s)$

$$|xy(s)|^2 = |\int x(sr^{-1})y(r)\,dr|^2 \leqq \int |x(sr^{-1})|^2 dr \int |y(r)|^2 dr = 0,$$

denn der erste Faktor geht durch die Substitution $r \to rs^{-1}$ über in $x\tilde{x}(\circ)$. Es ist also $xy(s) \equiv 0$, insbesondere $x^2(s) \equiv 0$. Ebenso wird $yx(s) \equiv 0$ für alle $y(s)$ aus $\bar{\mathfrak{o}}$.

Sämtliche $x(s)$, für die $x\tilde{x}(\circ) = 0$, bilden also ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{c}$, dessen Quadrat verschwindet, $\mathfrak{c}^2 = 0$.

$\mathfrak{c}$ *ist das Radikal von* $\bar{\mathfrak{o}}$.

Denn ist $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Rechtsideal, das nicht in $\mathfrak{c}$ liegt, dann gibt es ein Element $x(s)$ in $\mathfrak{r}$, für das $x\tilde{x}(\circ) \neq 0$. Es verschwinden aber auch die Potenzen $\{x\tilde{x}\}^n(s)$ nicht (es ist $\{x\tilde{x}\}^2(\circ) = \int |x\tilde{x}(r)|^2 dr$ wegen der oben bewiesenen Stetigkeit von $x\tilde{x}(s)$ ungleich Null usf.). Die Elemente $\{x\tilde{x}\}^n$ liegen mit x in $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}$ ist daher kein Nilideal. Für ein Linksideal betrachtet man die Elemente $\{\tilde{x}x\}^n(s)$, die ebenfalls nicht verschwinden, weil $\tilde{x}x(\circ) = \int \tilde{x}(r)x(r)\,dr = x\tilde{x}(\circ)$, wie man durch die Inversion $r \to r^{-1}$ sieht. Es gibt also kein Nilideal, das nicht von $\mathfrak{c}$ umfaßt würde, $\mathfrak{c}$ ist also das Radikal von $\bar{\mathfrak{o}}$.

Funktionentheoretisch bedeutet das Ideal $\mathfrak{c}$ *die Gesamtheit aller der Null äquivalenten Funktionen*, d. h. der Funktionen, die bis auf eine Nullmenge auf $\mathfrak{G}$ überall den Wert Null besitzen.

Ist nämlich $\int |x(s)|^2 ds = 0$, so ist die Funktion äquivalent der Null (das folgt wieder aus dem entsprechenden Satz für reelle Funktionen)[25].

Um die Struktur von $\bar{\mathfrak{o}}$ weiter zu untersuchen, gehen wir genau so vor, wie früher. In einem beliebigen regulären zweiseitigen Ideal $\mathfrak{a}$ gibt es ein Element $x(s)$, so daß $x\tilde{x}(s)$ eine stetige nicht verschwindende Gruppenzahl ist. Damit können wir nach E. Schmidt ein Idempotent konstruieren. Wir schließen analog weiter, die Eigenfunktionen $\varphi_i(s)$ werden, weil sie die Form $\frac{1}{\gamma}\int z(st^{-1})\varphi_i(t)\,dt$ haben, nach unserem Hilfssatz stetig, es umfaßt also jedes reguläre zweiseitige Ideal ein zweiseitig einfaches $\mathfrak{d}_\beta$, als dessen Basiselemente die Komponenten einer **stetigen** Darstellung von $\mathfrak{G}$ genommen werden können.

Wir gehen zum Restklassenring $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{c}$ über, dessen Elemente die Klassen von äquivalenten Funktionen sind. $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{c}$ erfüllt die Voraussetzungen von I, Satz 2, wird also einem transzendent vollständig reduziblen Ring $\bar{\mathfrak{o}}^*$ isomorph, dessen Elemente die Fourierreihen der Klassen von äquivalenten Funktionen aus $\bar{\mathfrak{o}}$ nach den unitär orthogonalen $c_{ik}^{(\beta)}(s)$ des vorigen Paragraphen sind. Denn äquivalente Funktionen haben dieselbe Fourierreihe und Funktionen mit verschiedenen Fourierreihen sind nicht äquivalent.

---

[25]) Vgl. H. I, S. 532.

Die $c_{ik}^{(\beta)}(s)$ bilden genau so wie früher wegen der Isomorphie $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{c} \simeq \bar{\mathfrak{o}}^*$ ein unitär orthogonales abgeschlossenes Funktionensystem in $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{c}$. Aus der *Abgeschlossenheit* folgt[26]) nach dem Satz von Fischer-Riesz, der auch für unsere komplexen Funktionen auf $\mathfrak{G}$ gilt[27]), die *Vollständigkeit* des Systems der $c_{ik}^{(\beta)}(s)$, d. h. das Bestehen der Relation $\sum\limits_{\beta, i, k} |\alpha_{ik}^{(\beta)}|^2 = \int |x(s)|^2 ds$, $\alpha_{ik}^{(\beta)}$ der Fourierkoeffizient von $x(s)$ nach $c_{ik}^{(\beta)}(s)$.

Die Komponenten $c_{ik}^{(\beta)}(s)$ der sämtlichen inäquivalenten irreduziblen unitären Darstellungen von $\mathfrak{G}$ bilden ein vollständiges unitär orthogonales Funktionensystem im Bereiche der absolut quadratisch integrierbaren Funktionen auf $\mathfrak{G}$.

---

[26]) Vgl. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, S. 97.

[27]) Vgl. J. v. Neumann, Math. Begründung der Quantenmechanik, Göttinger Nachrichten 1927, S. 13.

(Eingegangen am 26. 11. 1929.)

Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

Die Elemente der gegebenen Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

seien nichtnegative ganze rationale Zahlen; es bedeute

$$\Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

die k-te Potenz von Ω. Wenn

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

n komplexe Veränderliche sind, so werde mit

$$z' = \Omega^k z$$

die Transformation

$$z'_\alpha = \prod_{\beta=1}^{n} z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n)$$

bezeichnet.

Von arithmetischen Untersuchungen her gelangt man zu folgendem Problem:

„Die Koordinaten des Punktes z seien genügend klein, so daß die Werte

$$E(\Omega^k z)$$

der Potenzreihe

$$E(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

für genügend großes k konvergieren. Man bestimme die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden dieser Werte:

$$E(\Omega^k z)."$$

Für gewisse Klassen von Matrizen Ω läßt sich diese Frage vollständig beantworten. In meiner Arbeit: „Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionsgleichungen", Math. Annalen **101**, zeigte ich:

„Die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) = |\Omega - \varrho E|, \qquad E = \text{Einheitsmatrix},$$

sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel; sie besitze eine Wurzel ϱ größer als Eins und als der absolute Betrag der anderen Wurzeln. Wenn dann keine der Koordinaten von z verschwindet, wenn ferner

$$\Re\left(\sum_{\alpha=1}^{n} Z_\alpha \log z_\alpha\right) < 0$$

ist, wo die positiven Konstanten $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ allein von der Matrix Ω abhängen, so folgt aus dem Verschwinden aller Werte:

$$E(\Omega^k z)$$

mit großem k das identische Verschwinden von $E(z)$."

Der Beweis dieses Satzes ist rein algebraisch und nicht schwer. Bedeutend weniger einfach ist eine Untersuchung im Fall

$$\begin{pmatrix} \varrho & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varrho & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varrho \end{pmatrix} = \varrho E,$$

wenn $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl bedeutet. Dieser Fall soll in der vorliegenden Arbeit behandelt werden; es wird gezeigt:

„Die Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien algebraisch, absolut kleiner als Eins und von Null verschieden. Es bestehe keine Gleichung

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden. Dann folgt aus dem Verschwinden der Werte

$$E(\Omega^k z)$$

mit großem k das identische Verschwinden von $E(z)$."

Der Beweis benutzt als Hauptmittel den Thue-Siegelschen Satz; aus ihm wird folgender Hilfssatz hergeleitet:

„Die n algebraischen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien vom Absolutbetrag Eins. Es bedeute $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Existiert ein Polynom

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv 0$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten und eine positive Konstante $\alpha > 0$, so daß für großes natürliches k die Ungleichung

$$F(z_1^{\varrho^k}, z_2^{\varrho^k}, \ldots, z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha \varrho^k})$$

besteht, so gibt es n ganze rationale Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_n$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so daß

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n} = 1$$

ist."

Mittels dieses Hilfssatzes ist das angegebene Ergebnis sofort zu beweisen. Aus ihm wird im letzten Abschnitt dann noch eine arithmetische Folgerung gezogen.

I.

1. Es sei $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl, ξ eine algebraische Zahl vom Absolutbetrag Eins und Grad h. Zwischen den Basiselementen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$$

des durch ξ erzeugten Zahlkörpers $K(\xi)$ bestehen Gleichungen

$$\omega_\alpha \omega_\beta = \sum_{\gamma=1}^{h} A_\gamma^{(\alpha\beta)} \omega_\gamma \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h)$$

mit ganzen rationalen Zahlen $A_\gamma^{(\alpha\beta)}$; ihr absoluter Betrag habe das Maximum

$$A = \max_{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, h} (|A_\gamma^{(\alpha\beta)}|).$$

Die Zahl ξ gestattet die Darstellung

$$\xi = \frac{a_1 \omega_1 + \ldots + a_h \omega_h}{a_0} \qquad (a_0 \neq 0)$$

mit ganzen rationalen Zahlen a_α. Ebenso ist für jedes natürliche k

$$\xi^{\varrho^k} = \frac{a_1^{(k)} \omega_1 + \ldots + a_h^{(k)} \omega_h}{a_0^{(k)}} \qquad (a_0^{(k)} = a_0^{\varrho^k} \neq 0)$$

mit ganzen rationalen Zahlen $a_\alpha^{(k)}$.

2. Es gibt eine natürliche Zahl C, so daß

$$\max_{\alpha=0,1,\ldots,h} (|a_\alpha^{(k)}|) \leqq C^{\varrho^k}$$

ist.

Denn sind

$$\eta = b_1 \omega_1 + \ldots + b_h \omega_h, \qquad b = \max_{\alpha=1,2,\ldots,h} (|b_\alpha|);$$
$$\zeta = c_1 \omega_1 + \ldots + c_h \omega_h, \qquad c = \max_{\alpha=1,2,\ldots,h} (|c_\alpha|)$$

zwei Zahlen in $K(\xi)$, so ist offenbar

$$\eta\zeta = d_1 \omega_1 + \ldots + d_h \omega_h; \qquad d_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\beta=1}^{h} A_\gamma^{(\alpha\beta)} b_\alpha c_\beta;$$
$$\max_{\gamma=1,2,\ldots,h} (|d_\gamma|) \leqq h^2 A b c.$$

Durch wiederholte Anwendung der letzten Ungleichung ergibt sich somit die Behauptung, wenn

$$C = h^2 A \max_{\alpha=0,1,\ldots,h}(|a_\alpha|)$$

gesetzt wird.

3. Die Zahl η aus $K(\xi)$ sei endlich; sie besitzt eine Darstellung

$$\eta = \frac{b_1\omega_1 + \ldots + b_h\omega_h}{b_0}, \quad b_0 \neq 0; \qquad \left(b = \max_{\alpha=0,1,\ldots,h}(|b_\alpha|)\right)$$

mit ganzen rationalen Zahlen b_α. Dann gibt es eine positive Konstante c_0, so daß entweder

$$\xi^{e^k} - \eta = 0$$

oder

$$|\xi^{e^k} - \eta| \geqq c_1 C^{-he^k}$$

ist, wenn k ins Unendliche wächst.

Denn sei die Zahl

$$\zeta = \xi^{e^k} - \eta = \frac{(a_1^{(k)} b_0 - a_0^{(k)} b_1)\,\omega_1 + \ldots + (a_h^{(k)} b_0 - a_0^{(k)} b_h)\,\omega_h}{a_0^{(k)} b_0}$$

von Null verschieden; dann sind auch ihre in bezug auf $K(\xi)$ Konjugierten

$$\zeta, \zeta', \ldots, \zeta^{(h-1)}$$

ungleich Null. Das Produkt

$$(a_0^{(k)} b_0)^h \zeta\zeta' \ldots \zeta^{(h-1)}$$

ist also eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl, daher mindestens vom Absolutbetrag Eins. Da nach 2. für jedes k

$$|a_0^{(k)} b_0 \zeta^{(\nu)}| \leqq 2b \sum_{\alpha=1}^{h} |\omega_\alpha| C^{e^k} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, h-1)$$

ist, folgt

$$|\zeta| \geqq \left(b^h \{2 \sum_{\alpha=1}^{h} |\omega_\alpha|\}^{h-1} C^{he^k}\right)^{-1}$$

und die Behauptung, wenn c_1 mit

$$c_1 = \left(b^h \left(2 \sum_{\alpha=1}^{h} |\omega_\alpha|\right)^{h-1}\right)^{-1}$$

gleichgesetzt wird.

4. Die Zahl η sei in bezug auf $K(\xi)$ vom genauen Grad $d \geqq 2$. Dann gibt es eine positive Konstante c_2, so daß für großes k

$$|\xi^{e^k} - \eta| \geqq c_2 C^{-2h\sqrt{d}\,e^k}$$

ist.

Diese Behauptung ist die unmittelbare Folge eines Satzes von C. Siegel. Man vergleiche: Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschrift **10**, S. 192.

5. Die Zahl η genüge der Gleichung

$$\eta^{\varrho^\varkappa} = 1,$$

wo $\varkappa$ eine natürliche Zahl bedeutet. Dann existiert eine positive Konstante c_3, so daß entweder

$$\xi^{\varrho^k} - \eta = 0$$

oder

$$|\xi^{\varrho^k} - \eta| \geqq c_3\, C^{-2h\varrho^{k+\frac{\varkappa}{2}}}$$

ist, wenn k ins Unendliche wächst.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt erstens η in $K(\xi)$, so besteht nach 3. eine der Relationen

$$\xi^{\varrho^k} - \eta = 0 \quad \text{oder} \quad |\xi^{\varrho^k} - \eta| \geqq c_1 C^{-h\varrho^k} \geqq c_1 C^{-2h\varrho^{k+\frac{\varkappa}{2}}}.$$

Liegt dagegen η nicht in $K(\xi)$, so ist nach 4.

$$|\xi^{\varrho^k} - \eta| \geqq c_2\, C^{-2h\varrho^{k+\frac{\varkappa}{2}}}.$$

In jedem Fall stimmt also die Behauptung.

6. Satz 1. *Die algebraische Zahl ξ sei vom Absolutbetrag Eins. Es bedeute $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Wenn die natürliche Zahl k ins Unendliche wächst, so gibt es zu jeder noch so kleinen positiven Konstanten ε eine natürliche Zahl $k_0(\varepsilon)$, so daß für $k \geqq k_0$ entweder*

$$\xi^{\varrho^k} = 1$$

oder

$$|\xi^{\varrho^k} - 1| \geqq e^{-\varepsilon\varrho^k}$$

ist.

Es besteht die Zerlegung

$$\xi^{\varrho^k} - 1 = \prod_{q=0}^{\varrho^\varkappa - 1} \left(\xi^{\varrho^{k-\varkappa}} - e^{\frac{2q\pi i}{\varrho^\varkappa}}\right),$$

wo $\varkappa$ eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Da ξ vom Absolutbetrag Eins ist, so sind alle Faktoren in dieser Zerlegung beschränkt. Es gibt eine allein von $\varkappa$ abhängige positive Konstante c_4, so daß für jedes k von den Faktoren

$$\xi^{\varrho^{k-\varkappa}} - e^{\frac{2q\pi i}{\varrho^\varkappa}}$$

höchstens einer absolut kleiner als c_4 sein kann. Nach dem vorigen Abschnitt besteht für ihn eine der Relationen

$$\xi^{\varrho^{k-\varkappa}} - e^{\frac{2q\pi i}{\varrho^\varkappa}} = 0 \quad \text{oder} \quad \left|\xi^{\varrho^k} - e^{\frac{2q\pi i}{\varrho^\varkappa}}\right| \geqq c_3\, C^{-2h\varrho^{k-\frac{\varkappa}{2}}}.$$

Somit ist mit einer positiven Konstanten c_5, die allein von $\xi, \varrho, \varkappa$ abhängt:

$$|\xi^{\varrho^k} - 1| = 0 \quad \text{oder} \quad \geqq c_5\, C^{-2h\varrho^{k-\frac{\varkappa}{2}}}.$$

Sei jetzt ε eine beliebig kleine positive Konstante. Es werde die natürliche Zahl $\varkappa$ so groß gewählt, daß

$$2\,h\,\varrho^{-\frac{\varkappa}{2}} \log C \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Für genügend großes k gilt dann entweder

$$\xi^{\varrho^k} - 1 = 0$$

oder

$$|\xi^{\varrho^k} - 1| \geqq c_5\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}\varrho^k} \geqq e^{-\varepsilon \varrho^k},$$

was zu beweisen war.

II.

7. Es sei $r \geqq 2$ eine natürliche Zahl und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n komplexe Veränderliche.

Die allgemeinste rationale Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = F(x_1^r x_2^r \ldots x_n^r)$$

ist eine Konstante.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ nicht von x_1 abhängt. Sei

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1^\lambda \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{\mu} A_\alpha(x_2 \ldots x_n)\, x_1^\alpha}{\sum\limits_{\beta=0}^{\nu} B_\beta(x_2 \ldots x_n)\, x_1^\beta},$$

wo

$$A_\alpha(x_2 \ldots x_n),\quad \alpha = 0, 1, \ldots, \mu; \qquad B_\beta(x_2 \ldots x_n),\quad \beta = 0, 1, \ldots, \nu$$

Polynome in $x_2, x_3, \ldots, x_n$ sind. Ohne Einschränkung sei

$$A_0(x_2 \ldots x_n) \not\equiv 0, \qquad B_0(x_2 \ldots x_n) \not\equiv 0$$

angenommen. Wegen der Funktionalgleichung ist alsdann

$$x_1^\lambda \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{\mu} A_\alpha(x_2 \ldots x_n)\, x_1^\alpha}{\sum\limits_{\beta=0}^{\nu} B_\beta(x_2 \ldots x_n)\, x_1^\beta} \equiv x_1^{r\lambda} \frac{\sum\limits_{0}^{\mu} A_\alpha(x_2^r \ldots x_n^r)\, x_1^{\alpha r}}{\sum\limits_{\beta=0}^{\nu} B_\beta(x_2^r \ldots x_n^r)\, x_1^{\beta r}}.$$

Das ist aber nur dann möglich, wenn

$$\lambda = r\lambda, \quad \lambda = 0$$

ist und alle Polynome

$$A_\alpha(x_2 \ldots x_n),\quad \alpha \geqq 1; \qquad B_\beta(x_2 \ldots x_n),\quad \beta \geqq 1$$

identisch verschwinden. Somit nimmt $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ die Form an:

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = \frac{A_0(x_2 \ldots x_n)}{B_0(x_2 \ldots x_n)}$$

und ist in der Tat von x_1 unabhängig.

8. Die allgemeinste algebraische Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = F(x_1^r x_2^r \ldots x_n^r)$$

ist eine Konstante.

Die Funktion $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ genügt einer Gleichung

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n)^l + A_1(x_1 x_2 \ldots x_n) F(x_1 x_2 \ldots x_n)^{l-1} + \ldots + A_l(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0;$$

die Koeffizienten

$$A_1(x_1 x_2 \ldots x_n), \ldots, A_n(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

seien dabei rationale Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und die vorige Gleichung werde im Körper der rationalen Funktionen dieser Veränderlichen als irreduzibel angenommen. Aus der Funktionalgleichung ergibt sich die weitere algebraische Gleichung

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n)^l + A_1(x_1^r x_2^r \ldots x_n^r) F(x_1 x_2 \ldots x_n)^{l-1} + \ldots + A_l(x_1^r x_2^r \ldots x_n^r) = 0$$

und diese muß wegen der Irreduzibilität mit der ersten identisch sein. Also genügen ihre Koeffizienten der Gleichung

$$A_\lambda(x_1^r x_2^r \ldots x_n^r) = A_\lambda(x_1 x_2 \ldots x_n) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

und sind daher Konstante, ebenso auch die Funktion $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$.

9. Die allgemeinste von Null verschiedene algebraische Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n)^r = F(x_1^r x_2^r \ldots x_n^r)$$

ist von der Form

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = \eta x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}.$$

Dabei bedeutet η eine $(r-1)$-te Einheitswurzel und

$$e_1, e_2 \ldots e_n$$

n rationale Zahlen.

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$F_l(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_l \frac{\frac{\partial}{\partial x_l} F(x_1 x_2 \ldots x_n)}{F(x_1 x_2 \ldots x_n)} \qquad (l = 1, 2, \ldots n).$$

Durch Differentiation der Funktionalgleichung ergeben sich die Beziehungen

$$F_l(x_1 x_2 \ldots x_n) = F_l(x_1^r x_2^r \ldots x_n^r).$$

Aus ihnen folgt nach 8., daß die algebraischen Funktionen

$$F_l(x_1 x_2 \ldots x_n) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

konstant sind, etwa

$$F_l(x_1 x_2 \ldots x_n) \equiv e_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Dieses System von n Differentialgleichungen für $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ besitzt als allgemeinste Lösung

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = \eta x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$$

mit einer weiteren Konstanten η, die ungleich Null sei. Aus der Funktionalgleichung ergibt sich, daß

$$\eta^{r-1} = 1$$

ist, und weil ferner $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ algebraisch ist, so müssen die Exponenten

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

rationale Zahlen sein.

10. Satz 2: *Die n algebraischen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien vom Absolutbetrag Eins. Es bedeute $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl und α eine positive Konstante. Wenn dann ein Polynom*

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) \not\equiv 0$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten existiert, so daß für großes natürliches k die Ungleichung

$$F(z_1^{\varrho^k} z_2^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha \varrho^k})$$

besteht, so gibt es n ganze rationale Zahlen, $e_1, e_2, \ldots, e_n$, die nicht alle zugleich verschwinden, so daß

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n} = 1$$

ist.

Das Polynom $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ ist offenbar nicht von allen Veränderlichen frei, denn eine nichtverschwindende Konstante kann den Voraussetzungen nicht genügen.

Aus der Menge aller Polynome $F(x_1 x_2 \ldots x_n) \not\equiv 0$, die einer Beziehung

$$F(z_1^{\varrho^k} z_2^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha_F \varrho^k})$$

mit einer positiven Konstanten α_F, die von dem betreffenden Polynom noch abhängen kann, genügen, werde die Polynom-Teilmenge herausgegriffen, für die der größte Index, für den die Veränderliche x_l noch wirklich, also mindestens zur ersten Potenz in $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ vorkommt, gleich einer möglichst kleinen Zahl, etwa gleich g, ist. Diese Teilmenge ist gewiß nicht leer, wenn es überhaupt Polynome gibt, die den Voraussetzungen genügen.

Aus der vorigen Teilmenge werde alsdann ein Polynom $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ herausgegriffen, das die Veränderliche x_g zur niedrigsten, etwa f-ten Potenz enthält: $f \geqq 1$. Auch ein solches Polynom gibt es.

Das Polynom $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ befriedigt für großes k die Ungleichung

$$F^*(x_1 x_2 \ldots x_n) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k})$$

mit einer positiven Konstanten α^*. Es lassen sich zu $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ zwei Polynome $F_1^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ und $F_2^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ mit endlichen Koeffizienten konstruieren, die folgende Eigenschaften haben:

a) Beide Polynome verschwinden nicht identisch.

b) Das Polynom $F_1^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ enthält keine der Veränderlichen $x_g, x_{g+1}, \ldots, x_n$; das Polynom $F_2^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ dagegen ist von den Veränderlichen $x_{g+1}, \ldots, x_n$ frei und enthält x_g zur $(\varrho-1)\,f$-ten Potenz.

c) Das Polynom

$$F^{**}(x_1 x_2 \ldots x_n) = F_1^*(x_1 x_2 \ldots x_n) F^*(x_1^\varrho x_2^\varrho \ldots x_n^\varrho) + F_2^*(x_1 x_2 \ldots x_n) F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

ist von $x_{g+1}, \ldots, x_n$ frei und enthält x_g höchstens zur $(f-1)$-ten Potenz.

Die Zahl k wachse jetzt über alle Grenzen. Alsdann ist

$$F^*(z_1^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k}); \qquad F^*(z_1^{\varrho \varrho^k} \ldots z_n^{\varrho \varrho^k}) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k});$$

$$F_1^*(z_1^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) = O(1), \qquad F_2^*(z_1^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) = O(1)$$

und also auch

$$F^{**}(z_1^{\varrho^k} z_2^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k}).$$

Diese Beziehung kann aber nur dann gelten, wenn $F^{**}(x_1 x_2 \ldots x_n)$ identisch verschwindet. Daher besteht die identische Gleichung:

$$F_1^*(x_1 x_2 \ldots x_n) F^*(x_1^\varrho x_2^\varrho \ldots x_n^\varrho) + F_2^*(x_1 x_2 \ldots x_n)\, F^*(x_1 x_2 \ldots x_n) \equiv 0.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt das Polynom $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ in die Faktoren

$$F^*(x_1 x_2 \ldots x_n) = \varphi_0(x_1 \ldots x_{g-1}) \prod_{l=1}^{f} (x_g - \varphi_l(x_1 \ldots x_{g-1})),$$

wo $\varphi_0(x_1 \ldots x_{g-1})$ ein Polynom, die Ausdrücke

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_{g-1}), \ \ldots, \ \varphi_f(x_1 \ldots x_{g-1})$$

algebraische Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{g-1}$ sind. Analog besteht die Zerlegung

$$F^*(x_1^\varrho x_2^\varrho \ldots x_n^\varrho) = \varphi_0(x_1^\varrho \ldots x_{g-1}^\varrho) \prod_{l=0}^{\varrho f} (x_g - \psi_l(x_1 \ldots x_{g-1})),$$

wo die Ausdrücke

$$\psi_1(x_1 \ldots x_{g-1}), \ \ldots, \ \psi_{\varrho f}(x_1 \ldots x_{g-1})$$

algebraische Funktionen in denselben Veränderlichen sind. Bei geeigneter Wahl der Indizes sind die beiden Reihen algebraischer Funktionen durch folgende Relationen verbunden:

$$\psi_{\varrho(\lambda-1)+\mu}(x_1 \ldots x_{g-1}) = e^{\frac{2\mu\pi i}{\varrho}} \left[\varphi_\lambda(x_1^\varrho \ldots x_{g-1}^\varrho)\right]^{\frac{1}{\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, f \\ \mu = 1, 2, \ldots, \varrho \end{pmatrix}.$$

Die obige Identität besagt aber, daß $F^*(x_1^\varrho x_2^\varrho \ldots x_n^\varrho)$ durch $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ teilbar ist, wenn beide nur als Polynome in x_g aufgefaßt werden; das ist nur dann möglich, wenn jede der Funktionen

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_{g-1}), \ \ldots, \ \varphi_f(x_1 \ldots x_{g-1})$$

mit einer der Funktionen

$$\psi_1(x_1 \ldots x_{g-1}), \ldots, \psi_{\varrho f}(x_1 \ldots x_{g-1})$$

identisch ist. Also ist auch jede der Funktionen

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_{g-1})^\varrho, \ldots, \varphi_f(x_1 \ldots x_{g-1})^\varrho$$

mit einer der Funktionen

$$\varphi_1(x_1^\varrho \ldots x_{g-1}^\varrho), \ldots, \varphi_f(x_1^\varrho \ldots x_{g-1}^\varrho)$$

identisch. Das besagt, daß jede der Funktionen

$$\varphi_l(x_1 \ldots x_{g-1}) \qquad (l = 1, 2, \ldots, f)$$

einer Funktionalgleichung

$$\varphi_l(x_1 x_2 \ldots x_{g-1})^r = \varphi_l(x_1^r x_2^r \ldots x_{g-1}^r) \qquad (l = 1, 2, \ldots, f)$$

genügt, wo r eine natürliche Potenz von ϱ ist. Die Lösung einer solchen Gleichung ist aber entweder Null, was im vorliegenden Fall durch die obigen Minimum-Annahmen ausscheidet; oder jede der algebraischen Funktionen $\varphi_l(x_1 \ldots x_{g-1})$ ist von der Gestalt

$$\varphi_l(x_1 \ldots x_{g-1}) = \eta_l x_1^{e_1^{(l)}} \ldots x_{g-1}^{e_{g-1}^{(l)}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, f)$$

mit rationalen Exponenten

$$e_1^{(l)},\ e_2^{(l)} \ldots e_{g-1}^{(l)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, f),$$

während die Konstanten

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_f$$

gleich Einheitswurzeln sind. Ohne Einschränkung seien letztere etwa als d-te Einheitswurzeln vorausgesetzt.

Die Funktion $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ nimmt somit die Form an:

$$F^*(x_1 x_2 \ldots x_n) = \varphi_0(x_1 \ldots x_{g-1}) \prod_{l=1}^{f} \left(x_g - \eta_l x_1^{e_1^{(l)}} \ldots x_{g-1}^{e_{g-1}^{(l)}}\right)$$

und hieraus ergibt sich die Ungleichung:

$$\varphi_0(z_1^{\varrho^k} \ldots z_{g-1}^{\varrho^k}) \prod_{l=1}^{f} (\eta_l \xi_l^{\varrho^k} - 1) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k});\ \xi_l = z_1^{e_1^{(l)}} \ldots z_{g-1}^{e_{g-1}^{(l)}} z_g^{-1}\ (l = 1, 2 \ldots f).$$

Sei ε eine positive Zahl, die der Ungleichung

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{\alpha^*}{2f}$$

genügt. Ferner werde gegen Satz 2 vorausgesetzt, daß keine der Zahlen

$$\xi_1^{d\varrho^k} - 1,\ \xi_2^{d\varrho^k} - 1,\ \ldots,\ \xi_f^{d\varrho^k} - 1$$

für genügend großes k verschwindet. Nach Satz 1 besitzt jede der Ungleichungen

$$0 < \left|\xi_l^{d\varrho^k} - 1\right| \leqq e^{-\varepsilon\varrho^k} \qquad (l = 1, 2, \ldots, f)$$

nur endlich viele Lösungen; für genügend großes k ist folglich erst recht:

$$\left|\eta_l \xi_l^{\varrho^k} - 1\right| \geqq c_8 e^{-\epsilon \varrho^k} \qquad (l = 1, 2, \ldots, f)$$

und also auch

$$\left|\prod_{l=1}^{f} (\eta_l \xi_l^{\varrho^k} - 1)\right| \geqq c_8^f e^{-\frac{\alpha^*}{2}\varrho^k},$$

wenn c_8 eine gewisse positive Konstante bedeutet. Infolgedessen ist auch:

$$\varphi_0(z_1^{\varrho^k} \ldots z_{g-1}^{\varrho^k}) = O\left(e^{-\frac{\alpha^*}{2}\varrho^k}\right).$$

Diese Ungleichung widerspricht aber den Minimum-Annahmen über das Polynom $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$, so daß man zu einem Widerspruch gelangt. Also muß mindestens eine der Zahlen

$$\eta_l \xi_l^{\varrho^k} - 1 \qquad (l = 1, 2, \ldots, f)$$

für genügend großes k gleich Null werden, wie Satz 2 aussagt.

III.

11. Satz 3. *Die Potenzreihe*

$$E(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n} x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$$

konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes. Die n algebraischen Zahlen

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

seien von Null verschieden und im Innern des Einheitskreises gelegen. Es gebe $m \leqq n$ algebraische Zahlen

$$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 \cdots \mathfrak{z}_m,$$

zwischen denen keine Gleichung

$$\mathfrak{z}_1^{e_1} \mathfrak{z}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{z}_m^{e_m} = 1$$

besteht, wo die Exponenten ganze rationale Zahlen sind, die nicht gleichzeitig verschwinden; es sei

$$z_l = \mathfrak{z}_1^{q_{1l}} \cdots \mathfrak{z}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

und die Matrix

$$(q_{\lambda l}) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, m \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

habe nur ganze rationale Elemente und den genauen Rang m. Weiter bedeute $\varrho \geqq 2$ eine feste natürliche Zahl.

Wenn dann

$$E^*(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_m) \equiv E(x_1 \ldots x_n), \quad x_l = \mathfrak{x}_1^{q_{1l}} \cdots \mathfrak{x}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

als Funktion der Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \cdots \mathfrak{x}_m$$

nicht identisch verschwindet, so gibt es eine positive Konstante γ und eine Folge ins Unendliche wachsender natürlichen Zahlen k, so daß

$$\left|E(z_1^{\varrho^k} \dots z_n^{\varrho^k})\right| \geqq e^{-\gamma \varrho^k}$$

ist. —

Als Funktion der Veränderlichen

$$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 \dots \mathfrak{z}_m$$

wird

$$E(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{\mathfrak{h}_1} \dots \sum_{\mathfrak{h}_m} \mathfrak{B}_{\mathfrak{h}_1 \dots \mathfrak{h}_m} \mathfrak{z}_1^{\mathfrak{h}_1} \dots \mathfrak{z}_m^{\mathfrak{h}_m}$$

oder

$$E(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_R E_R(\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_m);$$

$$E_R(\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_m) = \sum_{\substack{\mathfrak{h}_1 \\ \left|\mathfrak{z}_1^{\mathfrak{h}_1} \dots \mathfrak{z}_m^{\mathfrak{h}_m}\right| = R}} \dots \sum_{\mathfrak{h}_m} \mathfrak{B}_{\mathfrak{h}_1 \dots \mathfrak{h}_m} \mathfrak{z}_1^{\mathfrak{h}_1} \dots \mathfrak{z}_m^{\mathfrak{h}_m}.$$

Offenbar entspricht nur den Gliedern

$$R_0, R_1, R_2, \dots \qquad (1 > R_0 > R_1 > R_2 > \dots \geqq 0)$$

einer gewissen abzählbaren Folge wirklich ein Summand $E_R(\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_m) \mathrel{\not\equiv} 0$.

Jetzt werde angenommen, daß bei geeigneter Wahl der Indizes die Zahlen

$$\log|\mathfrak{z}_1|,\ \log|\mathfrak{z}_2|,\ \dots,\ \log|\mathfrak{z}_{m-h}|$$

in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind, daß dagegen die Zahlen

$$\log|\mathfrak{z}_{m-h+1}|,\ \dots,\ \log|\mathfrak{z}_m|$$

von ihnen linear abhängen. Dann gibt es h komplexe Zahlen

$$\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_h$$

vom Absolutbetrag Eins, die keiner Gleichung

$$\zeta_1^{e_1} \zeta_2^{e_2} \dots \zeta_h^{e_h} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht gleichzeitig verschwinden, genügen, so daß

$$\mathfrak{z}_{m-h+l} = \mathfrak{z}_1^{e_{1,l}} \dots \mathfrak{z}_{m-h}^{e_{m-h,l}} \zeta_l \qquad (l = 1, 2, \dots, h)$$

mit rationalen Exponenten

$$e_{1,l} \dots e_{m-h,l} \qquad (l = 1, 2, \dots, h)$$

ist. Mit ihrer Benutzung geht $E_R(\mathfrak{z}_1^{\varrho^k} \dots \mathfrak{z}_m^{\varrho^k})$ über in

$$E_R(\mathfrak{z}_1^{\varrho^k} \dots \mathfrak{z}_m^{\varrho^k}) = (\mathfrak{z}_1^{\mathfrak{h}_1^0} \dots \mathfrak{z}_{m-h}^{\mathfrak{h}_{m-h}^0})^{\varrho^k} (\zeta_1^{\varkappa_1} \dots \zeta_h^{\varkappa_h})^{-\varrho^k} \mathsf{E}_R(\zeta_1^{\varrho^k} \dots \zeta_h^{\varrho^k}).$$

Dabei ist

$$\left|\mathfrak{z}_1^{\mathfrak{h}_1^0} \dots \mathfrak{z}_{m-h}^{\mathfrak{h}_{m-h}^0}\right| = R;$$

die Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$ sind nichtnegativ und ganz rational, und der Ausdruck $\mathsf{E}_R(\zeta_1^{e^k} \ldots \zeta_k^{e^k})$ ist ein von k unabhängiges Polynom $\mathsf{E}_R(\mathsf{Z}_1 \ldots \mathsf{Z}_h)$ in den Werten

$$\mathsf{Z}_1 = \zeta_1^{e^k} \ldots \mathsf{Z}_h = \zeta_h^{e^k}.$$

Offenbar verschwindet dieses Polynom dann und nur dann identisch, wenn $E_R(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_m)$ selbst identisch verschwindet.

Von jetzt ab sei angenommen, daß die Reihe

$$E(x_1 x_2 \ldots x_n) = E^*(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_m)$$

als Funktion der Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_m$$

nicht identisch verschwindet. Offenbar gibt es dann auch eine Funktion

$$E_{R_\nu}(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_m)$$

vom kleinsten Index, also größtem R_ν, die nicht identisch verschwindet so daß auch

$$\mathsf{E}_{R_\nu}(\mathsf{Z}_1 \ldots \mathsf{Z}_h)$$

von Null verschieden ist. Nun ist

$$E_{R_\mu}(\mathfrak{z}_1^{e^k} \cdots \mathfrak{z}_m^{e^k}) = O(R_\mu^{e^k})$$

und daher für großes k die Summe

$$\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} E_{R_\mu}(\mathfrak{z}_1^{e^k} \cdots \mathfrak{z}_\mu^{e^k})$$

von der Größenordnung

$$O(R_{\nu+1}^{e^k}).$$

Andrerseits ist nach Satz 2 für eine Folge ins Unendliche wachsender natürlicher Zahlen k bei beliebig kleinem festen positiven ε:

$$|\mathsf{E}_{R_\nu}(\zeta_1^{e^k} \ldots \zeta_h^{e^k})| \geq e^{-\varepsilon e^k}$$

und somit auch

$$|E_{R_\nu}(\mathfrak{z}_1^{e^k} \cdots \mathfrak{z}_m^{e^k})| \geq R_\nu^{e^k} e^{-\varepsilon e^k}.$$

Folglich ergibt sich, wenn noch $2\varepsilon = \log \frac{R_\nu}{R_{\nu+1}}$ gewählt wird, für die Folge k:

$$|E(z_1^{e^k} \ldots z_n^{e^k})| = |E^*(\mathfrak{z}_1^{e^k} \cdots \mathfrak{z}_m^{e^k})| \geq (R_\nu R_{\nu+1})^{\frac{1}{2} e^k} + O(R_{\nu+1}^{e^k}) \geq R_{\nu+1}^{e^k},$$

w. z. b. w.

IV.

12. Der letzte Satz entspricht genau dem Satz 1 meiner Arbeit: Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen (Math. Annalen **101**, S. 351). Auf analoge Art wie dort kann auch aus ihm ein Transzendenzsatz erschlossen werden, weshalb ich auf die Durchführung des Beweises verzichte. Das Ergebnis lautet:

Satz 4. *Es sei $\varrho \geqq 2$ eine feste natürliche Zahl,*

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \ldots h_n} x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$$

eine in der Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe in den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit algebraischen Koeffizienten aus einem endlichen Zahlkörper. Die Funktion $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ genüge einer Funktionalgleichung

$$F(x_1^\varrho x_2^\varrho \ldots x_n^\varrho) = \frac{\sum_{l=0}^{m} a_l(x_1 x_2 \ldots x_n) F(x_1 x_2 \ldots x_n)^l}{\sum_{l=0}^{m} b_l(x_1 x_2 \ldots x_n) F(x_1 x_2 \ldots x_n)^l} \qquad (1 \leqq m < \varrho),$$

wo die $a_l(x_1 \ldots x_n)$, $b_l(x_1 \ldots x_n)$ Polynome mit endlichen algebraischen Koeffizienten sind. Die beiden Polynome

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(x_1 x_2 \ldots x_n) u^l, \qquad \sum_{l=0}^{m} b_l(x_1 x_2 \ldots x_n) u^l$$

seien in allen Veränderlichen teilerfremd; mindestens eins besitze den genauen Grad m in u; ihre Resultante in bezug auf u sei gleich $\Delta(x_1 x_2 \ldots x_n)$.

Die m algebraischen Zahlen

$$z_1, z_2, \ldots, z_n; \qquad 0 < |z_l| < 1 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

seien von der Gestalt

$$z_l = \mathfrak{z}_1^{q_{1l}} \ldots \mathfrak{z}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

dabei seien

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_m$$

m algebraische Zahlen, zwischen denen keine Beziehung

$$\mathfrak{z}_1^{e_1} \mathfrak{z}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{z}_m^{e_m} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht gleichzeitig verschwinden, besteht; die Matrix

$$(q_{\lambda l}) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, m \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

besitze ganze rationale Elemente und den genauen Rang m. Ferner sei angenommen, daß keine der Zahlen

$$\Delta(z_1^{\varrho^k} z_2^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

verschwindet. Wenn dann

$$F^*(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m) = F(x_1 x_2 \ldots x_n), \qquad x_l = \mathfrak{x}_1^{q_{1l}} \ldots \mathfrak{x}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

als Funktion der Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_m$$

nicht algebraisch ist, so stellt $F(z_1 z_2 \ldots z_n)$ eine transzendente Zahl dar.

Im Falle $m = 1$ läßt sich sogar zeigen, daß es sich um Nicht-Liouvillesche Zahlen handelt.

13. Aus dem vorigen Satz lassen sich z. B. diese Folgerungen ziehen:

a) Die von Null verschiedenen algebraischen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien im Innern des Einheitskreises gelegen; keiner der Quotienten $\frac{\log z_\alpha}{\log z_\beta}$ sei gleich einer ganzen rationalen Potenz von ϱ. Ferner seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ n von Null verschiedene algebraische Zahlen. Dann stellt der Ausdruck

$$\sum_{l=1}^{n} Z_l \Phi(z_l); \qquad \Phi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^{\varrho^h}$$

eine transzendente Zahl dar.

b) $q(h)$ sei die Quersumme von h im ϱ-adischen System; es sei

$$\Psi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} q(h) x^h.$$

Dann ist unter den gleichen Voraussetzungen wie in a) die Zahl

$$\sum_{l=1}^{n} Z_l \Psi(z_l)$$

transzendent.

Diese Beispiele lassen sich beliebig vermehren.

Krefeld, im Herbst 1928.

(Eingegangen am 8. 5. 1929.)

Über gewisse Differential- und allgemeinere Gleichungen, deren Lösungen fastperiodisch sind.

II. Teil[1]). Der Beschränktheitssatz.

Von

S. Bochner in München.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1.

Einleitung.

Im I. Teil haben wir für Differenzen-Differentialgleichungen der Gestalt

$$L(y) \equiv \sum_{\varrho=0}^{r} \sum_{\sigma=0}^{s} a_{\varrho\sigma} y^{(\varrho)}(x+\delta_\sigma) = f(x), \tag{1}$$

mit komplexen Konstanten $a_{\varrho\sigma}$, reellen Konstanten δ_σ und fastperiodischer rechter Seite $f(x)$, verschiedene Bedingungen dafür aufgestellt, daß Lösungen $y(x)$ existieren, welche mitsamt ihren r ersten Ableitungen fastperiodisch sind. Von anderer Art ist der bereits in I, § 1, 2 formulierte „Beschränktheitssatz", welcher ganz allgemein besagt, daß jede Lösung $y(x)$, welche mitsamt ihren r ersten Ableitungen beschränkt und gleichmäßig stetig ist auch schon mitsamt ihren r ersten Ableitungen fastperiodisch ist. Das Ziel der vorliegenden Note ist es, diesen Satz und eine gewisse nachträgliche Vervollständigung zu beweisen. Der eigentliche Wortlaut des vervoll-

[1]) Der I. Teil mit dem Untertitel „Der Existenzsatz" ist in den Math. Annalen 102 (1929), S. 489—504 erschienen. Wir werden ihn mit „I" zitieren.

ständigten Beschränktheitsatzes findet sich in § 4, an dieser Stelle formulieren wir ihn für die speziellen Fälle reiner Differential- und reiner Differenzengleichungen:

Jede Lösung von

$$a_r y^{(r)}(x) + a_{r-1} y^{(r-1)}(x) + \dots + a_0 y(x) = f(x),$$

welche mitsamt ihren r ersten Ableitungen beschränkt ist, ist mitsamt ihren r ersten Ableitungen fastperiodisch. Dieser Satz ist zuerst von H. Bohr und O. Neugebauer (Gött. Nachr. 1926) bewiesen worden.

Jede Lösung von

$$a_r y(x+\delta_r) + a_{r-1} y(x+\delta_{r-1}) + \dots + a_0 y(x+\delta_0) = f(x),$$

welche beschränkt und gleichmäßig stetig ist, ist fastperiodisch. Ist die charakteristische Funktion

$$a_r e^{i\delta_r\lambda} + \dots + a_0 e^{i\delta_0\lambda}$$

für $-\infty < \lambda < +\infty$ *wesentlich von Null verschieden, so ist jede Lösung, welche beschränkt ist, auch schon gleichmäßig stetig und daher fastperiodisch.* Für den Sonderfall $\delta_0 = 0, \delta_1 = \omega, \delta_2 = 2\omega, \dots, \delta_r = r\omega$ ist dieser Satz zuerst von A. Walther, loc. cit., aufgestellt und bewiesen worden. Es ist hervorhebenswert, daß für die einfachste Differenzengleichung

$$\frac{y(x+\omega) - y(x)}{\omega} = f(x)$$

die charakteristische Funktion der obigen Voraussetzung *nicht* genügt. Die Voraussetzung der gleichmäßigen Stetigkeit ist dann auch nicht zu entbehren; vgl. Walther, Gött. Nachr. 1927.

Für den einfachsten Sonderfall der Gleichung (1), nämlich für die Gleichung

$$y'(x) = f(x), \tag{2}$$

ist der Beschränktheitssatz[2]) zuerst[3]) von P. Bohl aufgestellt und bewiesen worden. Dieser Bohlsche Satz wurde bereits in I wesentlich benutzt; was an Beweismitteln hinzutrat, waren die Betrachtungen über „Multiplikatoren". Mit denselben Hilfsmitteln werden wir auch jetzt operieren, nur daß wir sie auf breiterer Basis anwenden werden. Die Heranziehung von Multiplikatoren beruhte in I auf der Möglichkeit, die als fastperiodisch *voraus-*

---

[2]) In diesem Fall braucht nur die Beschränktheit und nicht auch die gleichmäßige Stetigkeit von $y(x)$ und $y'(x)$ vorausgesetzt zu werden, vgl. § 4.

[3]) Einen anderen Beweis gab J. Favard in Acta Math. **51** (1928), S. 31—81, insbes. § 3.

gesetzten Funktionen $y(x)$ und $f(x)$ durch Fourierreihen darzustellen. Aber gegenwärtig sind die Funktion $y(x)$ und ihre Ableitungen nicht mehr als fastperiodisch, sondern nur noch als beschränkt vorausgesetzt. Die „breitere Basis" ist nunmehr die Darstellung von $y(x)$ durch verallgemeinerte Fourierintegrale, welche für alle beschränkten Funktionen (und für Funktionen noch viel allgemeineren Verhaltens) vorhanden ist und das Rechnen mit Multiplikatoren zuläßt.

§ 2.

Vorbereitendes.

Wir werden das für uns Wichtige über verallgemeinerte Fourierintegrale zusammenstellen und wegen Einzelheiten auf eine Arbeit des Verfassers[4]) verweisen.

1. Alle Funktionen, die wir nachfolgend einführen werden, sind auf jedem endlichen Intervall (nach Lebesgue) meßbar und mitsamt dem Quadrat ihres absoluten Betrages integrierbar und, sofern aus dem Zusammenhang nichts anderes zu ersehen ist, auf einer Punktmenge vom Maße Null unbestimmt gelassen.

Zur Klasse $\mathfrak{K}_0$ zählen wir diejenigen Funktionen $y(x)$, für welche das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|^2\, dx$$

einen endlichen Wert hat und zur (umfassenderen) Klasse $\mathfrak{K}_1$ alle diejenigen Funktionen $y(x)$, für welche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y(x)|^2}{1+x^2}\, dx$$

einen endlichen Wert hat (insbesondere enthält $\mathfrak{K}_1$ alle beschränkten Funktionen). Jede Funktion der Klasse $\mathfrak{K}_0$ kann man nach Plancherel[5]) durch ein Fouriersches Integral

$$y(x) \sim \int e^{ix\lambda} \gamma_0(\lambda)\, d\lambda \tag{3}$$

mit einer wohlbestimmten „0-ten Transformierten" $\gamma_0(\lambda)$ darstellen. Diese

---

[4]) Math. Annalen 97 (1927), S. 635—662. Wir werden diese Arbeit mit „D" zitieren. — Um in ungefährer Übereinstimmung mit der Bezeichnung in I zu bleiben, werden wir die Zeichen $f(x), \alpha, \Gamma_0(\alpha), \Gamma_1(\alpha), \pi(\alpha), P(\xi)$ aus D durch die Zeichen $y(x), \lambda, \gamma_0(\lambda), \gamma_1(\lambda), \Gamma(\lambda), K(\xi)$ ersetzen und in allen Exponentialausdrücken $e^{i\tau}$ mit irgendwelchem reellem τ die imaginäre Einheit i durch $-i$ ersetzen.

[5]) Vgl. I, [5]).

Funktion $\gamma_0(\lambda)$ ist nur für Funktionen aus $\mathfrak{K}_0$ definiert. Man kann aber $\gamma_0(\lambda)$ durch eine andere Funktion ersetzen, welche den Vorzug hat, auch für Funktionen aus $\mathfrak{K}_1$ definierbar zu sein. Es ist dies die bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmte Funktion

$$\gamma_1(\lambda) = \int^{\lambda} \gamma_0(\alpha)\, d\alpha,$$

welche wir die „1-te Transformierte" von $y(x)$ nennen. Kennt man (für eine Funktion aus $\mathfrak{K}_0$) die Transformierte $\gamma_1(\lambda)$, so ist auch die Transformierte $\gamma_0(\lambda)$ und demnach die Darstellung (3) gegeben. Diesen Sachverhalt schreiben wir als die Formel

$$(4) \qquad y(x) \sim \int e^{ix\lambda}\, d\gamma_1(\lambda).$$

Die Transformierte $\gamma_1(\lambda)$ von $y(x)$ läßt sich vermöge einer geeigneten Formel direkt aus $y(x)$ berechnen. Diese Formel liefert aber ein Resultat nicht nur, wenn $y(x)$ zu $\mathfrak{K}_0$, sondern auch, wenn sie zu $\mathfrak{K}_1$ gehört. Von den so herausspringenden Funktionen $\gamma_1(\lambda)$ vermerken wir, daß sie bis auf willkürliche additive Konstanten eindeutig bestimmt sind. Das Zusammengehören einer Funktion $y(x)$ und der Transformierten $\gamma_1(\lambda)$ drücken wir für alle $y(x)$ aus $\mathfrak{K}_1$ durch die Relation (4) aus. Es besteht der wichtige Eindeutigkeitssatz, daß zwei Funktionen $y(x)$ dann und *nur* dann die gleiche Transformierte $\gamma_1(\lambda)$ haben, wenn sie selber (bis auf eine Nullmenge) einander gleich sind; weiterhin kann man an der Darstellung (4) mit Vorteil Rechenoperationen ausführen, von denen wir einige betrachten wollen.

2. Wenn $y(x)$ differenzierbar ist und wenn zugleich mit $y(x)$ auch $y'(x)$ zur Klasse $\mathfrak{K}_1$ gehört, so entsteht die Darstellung von $y'(x)$ aus der Darstellung von $y(x)$ durch „Differentiation"

$$(5) \qquad y'(x) \sim \int e^{ix\lambda} (i\lambda)\, d\gamma_1(\lambda).$$

D. h. die 1-te Transformierte $\delta_1(\lambda)$ von $y'(x)$ ist mit $\gamma_1(\lambda)$ durch die Relation

$$d\delta_1(\lambda) = i\lambda\, d\gamma_1(\lambda)$$

verknüpft. Hierbei ist die Relation

$$(6) \qquad d\delta(\lambda) = \Gamma(\lambda)\, d\gamma(\lambda)$$

dahin zu interpretieren, daß innerhalb eines jeden Intervalls $A < \lambda < B$, in welchem $\Gamma(\lambda)$ differenzierbar ist, die Beziehung

$$(7) \qquad \delta(\lambda) = \Gamma(\lambda)\gamma(\lambda) - \int^{\lambda} \Gamma'(\alpha)\gamma(\alpha)\, d\alpha$$

besteht.

3. Zu der Gleichung (6) ist zu bemerken:

a) Die Relation

$$d\delta(\lambda) = 0$$

ist als eine Relation (6) mit $\Gamma(\lambda) = 0$ aufzufassen, ist also mit

$$\delta(\lambda) = \text{konst.}$$

äquivalent.

b) In jedem Intervall, in welchem $\Gamma(\lambda) \neq 0$, kann man die Relation (6) durch $\Gamma(\lambda)$ dividieren:

$$d\gamma(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} d\delta(\lambda).$$

c) Aus

$$d\delta(\lambda) = \Gamma_1(\lambda) d\gamma(\lambda),$$
$$d\varepsilon(\lambda) = \Gamma_2(\lambda) d\delta(\lambda)$$

folgt

$$d\varepsilon(\lambda) = [\Gamma_1(\lambda)\Gamma_2(\lambda)] d\gamma(\lambda).$$

4. Die Funktion $y(x+\omega)$ gehört für jedes ω wiederum zu $\mathfrak{K}_1$. Ihre Darstellung geht aus (4) hervor, wenn man x durch $x+\omega$ ersetzt,

$$y(x+\omega) \sim \int e^{ix\lambda} e^{i\omega\lambda} d\gamma_1(\lambda). \text{ [6])}$$

Ähnlich gilt für jedes reelle Λ

$$e^{-i\Lambda x} y(x) \sim \int e^{ix(\lambda-\Lambda)} d\gamma_1(\lambda) \equiv \int e^{ix\lambda} d\gamma_1(\lambda+\Lambda). \text{ [6])}$$

Es habe $y(x)$ Ableitungen bis zur r-ten Ordnung, die alle zu $\mathfrak{K}_1$ gehören. Durch Benutzung von 2. und 3. c) erhält man für $y^{(r)}(x+\omega)$ die Darstellung

$$y^{(r)}(x+\omega) \sim \int e^{ix\lambda} (i\lambda)^r e^{i\omega\lambda} d\gamma_1(\lambda).$$

5. Es sei $\Gamma(\lambda)$ eine zweimal differenzierbare Funktion, welche außerhalb eines (genügend großen) endlichen Intervalls verschwindet, und $\gamma_1(\lambda)$ die 1-te Transformierte von $y(x)$. Nach Satz III aus D[7]) existiert eine Funktion der Klasse $\mathfrak{K}_1$ — wir nennen sie $y_\Gamma(x)$ — deren 1-te Transformierte $\delta(\lambda)$ der Relation (6) genügt, und es ist

$$y_\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-x) y(t) dt,$$

---

[6]) Diese Behauptung kommt nicht in D vor. Sie wird in einem anderen Zusammenhang nachgetragen werden.

[7]) Daselbst wird von der Funktion $K(\xi)$ vorausgesetzt, daß sie gerade ist, $K(-t) = K(t)$. Diese Voraussetzung ist aber ganz überflüssig. Sie wird in D kurz vor Schluß des Beweises dazu benutzt, um $K(\xi - x)$ durch $K(x - \xi)$ zu ersetzen. Aber diese Ersetzung hat gar keine Vorteile.

wobei der Kern

$$K(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\lambda} \Gamma(\lambda)\, d\lambda$$

ist (vgl. I, § 2, 5).

6. Hat $y(x)$ beschränkte Ableitungen bis zur r-ten Ordnung, so ist wiederum (I, § 2, 6)

$$y_\Gamma^{(\varrho)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-x)\, y^{(\varrho)}(t)\, dt \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

oder anders geschrieben

$$\frac{d^{(\varrho)}}{dx^\varrho}\{y_\Gamma(x)\} = \left\{\frac{d^\varrho y(x)}{dx^\varrho}\right\}_\Gamma.$$

7. Insbesondere gibt es (D, § 3, 6) gewisse Funktionen $\Gamma_n(\lambda)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, für welche

$$\Gamma_n(\lambda) = 0 \quad \text{für} \quad |\lambda| \geqq 2n,$$

so daß die zugehörigen Kernfunktionen $K_n(\xi)$ den Wert haben

$$K_n(\xi) = \frac{1}{c} \frac{(\sin n\xi)^4}{n^3 \xi^4},$$

wobei

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin n\xi)^4}{n^3 \xi^4}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^4 d\xi.$$

8. Aus der Formel

$$y_n(x) \equiv y_{\Gamma_n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)\, y(t+x)\, dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^4 y\left(x + \frac{\xi}{n}\right) d\xi$$

schließt man unschwer folgendes. Wenn die Funktion $y(x)$ beschränkt und gleichmäßig stetig ist, so sind die Funktionen $y_n(x)$ gleichmäßig gegen $y(x)$ konvergent. Sind überdies die r ersten Ableitungen von $y(x)$ beschränkt und gleichmäßig stetig, so sind auf Grund von 6. für alle ϱ aus $1 \leqq \varrho \leqq r$ auch die Funktionen $y_n^{(\varrho)}(x)$ gleichmäßig gegen $y^{(\varrho)}(x)$ konvergent.

Da der Limes einer gleichmäßig konvergierenden Folge von fastperiodischen Funktionen wiederum fastperiodisch ist, so folgt hieraus: falls jede Funktion $y_n(x)$ mitsamt ihren r ersten Ableitungen fastperiodisch ist, so ist auch die ursprüngliche Funktion mitsamt ihren r ersten Ableitungen fastperiodisch.

§ 3.

Der Beweis des Beschränktheitssatzes.

1. Wir betrachten zuerst den Fall einer homogenen Gleichung

$$L(y) = 0.$$

Die Funktion $L(y)$ ist eine Funktion aus $\mathfrak{K}_1$ mit der Darstellung, vgl. § 2, 4,

$$L(y) \sim \int e^{ix\lambda} G(\lambda) \, d\gamma_1(\lambda),$$

wobei, ähnlich wie in I,

$$G(\lambda) = \sum_{\varrho=0}^{r} \sum_{\sigma=0}^{s} a_{\varrho\sigma} (i\lambda)^{\varrho} e^{i\delta_\sigma \lambda}.$$

Die (reellen) Nullstellen von $G(\lambda)$ bezeichnen wir mit

(8) $$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots .$$

Nach § 2, 3b) ist in jedem Intervall, welches keine Zahl aus (8) enthält,

$$d\gamma_1(\lambda) = 0.$$

Sind die Nullstellen (8) an Zahl endlich, so folgt hieraus leicht (D, § 2, 13), daß $y(x)$ eine (endliche) Summe

(9) $$\sum A_\nu e^{i\Lambda_\nu x}$$

mit konstanten Koeffizienten A_ν ist. Eine solche Funktion ist aber beliebig oft differenzierbar und mit allen Ableitungen fastperiodisch.

Ist die Folge (8) unendlich, so bilden wir vorerst mit $y(x)$ die Funktionen $y_n(x)$, gemäß § 2, 8. Nach § 2, 6 sind sie gleichfalls Lösungen,

$$L(y_n) = 0,$$

und nach § 2, 8 genügt es, unsere Behauptung für die $y_n(x)$ zu beweisen. Die 1-te Transformierte $\gamma(n, \lambda)$ von $y_n(x)$ genügt der Relation

$$d\gamma(n, \lambda) = \Gamma_n(\lambda) \, d\gamma_1(\lambda).$$

Daraus folgt (§ 2, 3c))

$$d\gamma(n, \lambda) = 0 \quad \text{für} \quad |\lambda| > 2n.$$

Es ist also

$$d\gamma(n, \lambda) = 0$$

für alle λ mit Ausnahme der (im Intervall $|\lambda| \leq 2n$ gelegenen) endlich vielen Zahlen aus (8). Also ist $y_n(x)$ eine endliche Summe der Gestalt (9).

2. Den inhomogenen Fall

$$L(y) = f(x)$$
$$f(x) \sim \sum a_{\lambda_\nu} e^{i\lambda_\nu x}$$

werden wir auf den homogenen zurückführen. Wir gehen wiederum zu den Funktionen $y_n(x)$ über, welche jetzt der Gleichung

$$L(y_n) = f_n(x)$$

genügen, wobei

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t-x) f(t)\, dt \sim \sum \Gamma_n(\lambda_\nu) a_{\lambda_\nu} e^{i\lambda_\nu x}.$$

Wir halten n fest.

Schreibt man $G_n(\lambda) = \Gamma_n(\lambda) G(\lambda)$, so ist

$$L(y_n) \sim \int e^{ix\lambda} G_n(\lambda)\, d\gamma_1(\lambda).$$

Es sei Λ eine k-fache Nullstelle von $G(\lambda)$. Wir setzen

$$G_n(\lambda) = \{i(\lambda - \Lambda)\}^k G^*(\lambda),$$

und da $G^*(\lambda)$ außerhalb eines genügend großen Intervalles verschwindet, gibt es eine beschränkte Funktion $y_0(x)$ von der Gestalt

$$e^{i\Lambda x} y_0(x) \sim \int e^{ix\lambda} G^*(\lambda)\, d\gamma_1(\lambda),$$

d. h.

$$y_0(x) \sim \int e^{ix\lambda} G^*(\lambda + \Lambda)\, d\gamma_1(\lambda + \Lambda).$$

Andererseits ist

$$e^{-i\Lambda x} f_n(x) \sim \int e^{ix\lambda} G_n(\lambda + \Lambda)\, d\gamma_1(\lambda + \Lambda)$$
$$\equiv \int e^{ix\lambda} (i\lambda)^k G^*(\lambda + \Lambda)\, d\gamma_1(\lambda + \Lambda).$$

Daraus ergibt sich (vgl. § 2, 2 und D, § 5), daß $e^{-i\Lambda_0 x} f_n(x)$ die k-te Ableitung von $y_0(x)$ ist. Deswegen ist $y_0(x)$ fastperiodisch (I, § 3, 6), und daher ist $e^{-i\Lambda x} f_n(x)$ die k-te Ableitung einer fastperiodischen Funktion.

Da $f_n(x)$ beschränkte Exponenten hat, so gibt es nach dem Satz in I, § 6 eine mitsamt den r ersten Ableitungen fastperiodische Lösung $\bar{y}(x)$ der Gleichung

$$L(y) = f_n(x).$$

Die Differenz

$$Y(x) = y_n(x) - \bar{y}(x)$$

ist eine Lösung von

$$L(y) = 0,$$

und daher nach 1. mitsamt den r ersten Ableitungen fastperiodisch. Die Funktion

$$y_n(x) = \bar{y}(x) + Y(x)$$

ist von derselben Beschaffenheit.

§ 4.

Ein weiterer Satz.

Wir setzten beim Beschränktheitssatz voraus, daß die Lösungsfunktion $y(x)$ und ihre r ersten Ableitungen a) beschränkt und b) gleichmäßig stetig sind. Besitzt eine Funktion eine beschränkte Ableitung, so ist sie eo ipso gleichmäßig stetig. Daher hat die Voraussetzung a) die gleichmäßige Stetigkeit von $y(x), y'(x), \ldots, y^{(r-1)}(x)$ zur Folge, so daß die Voraussetzung b) sich nur auf $y^{(r)}(x)$ bezieht.

Es fragt sich, ob nicht unter Umständen auch $y^{(r)}(x)$ „von selbst" gleichmäßig stetig ist. Man sieht auf den ersten Blick, daß dies der Fall ist, wenn $L(y)$ die Gestalt hat

$$L(y) = y^{(r)}(x) + \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sum_{\sigma=0}^{s} a_{\varrho\sigma} y^{(\varrho)}(x + \delta_\sigma).$$

Denn dann kann man die Gleichung (1) schreiben:

$$y^{(r)}(x) = g(x),$$

wobei die Funktion

$$g(x) = -\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sum_{\sigma=0}^{s} a_{\varrho\sigma} y^{(\varrho)}(x + \delta_\sigma) + f(x)$$

gleichmäßig stetig ist.

Für allgemeine $L(y)$ setzen wir $z(x) = y^{(r)}(x)$, schreiben (1) in der Form

$$a_{r0} z(x + \delta_0) + a_{r1} z(x + \delta_1) + \ldots + a_{rs} z(x + \delta_s) = g(x) \tag{10}$$

und fassen (10) als Differenzengleichung für $z(x)$ auf. Wir wissen, daß $g(x)$ beschränkt und gleichmäßig stetig ist und daß $z(x)$ eine beschränkte Lösung von (10) ist. Dann ist aber $z(x)$ gleichmäßig stetig, wenn wir noch voraussetzen, daß es eine Zahl $\eta > 0$ gibt, so daß

$$\left| \sum_{\sigma=0}^{s} a_{r\sigma} e^{i\delta_\sigma \lambda} \right| \geqq \eta.$$

Denn dann gibt es, wie wir bereits in I benutzt haben, reelle Exponenten μ_ν und Koeffizienten γ_ν mit konvergenter Summe $\sum |\gamma_\nu|$, so daß

$$\left(\sum_{\sigma=0}^{s} a_{r\sigma} e^{i\delta_\sigma \lambda} \right) \left(\sum \gamma_\nu e^{i\mu_\nu \lambda} \right) = 1,$$

d. h. daß

$$\sum_{\delta_\sigma + \mu_\nu = c} a_{r\sigma} \gamma_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } c \neq 0, \\ 1 & \text{für } c = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Mit der Funktion $g(x)$ bilden wir die Reihe

$$\sum \gamma_\nu g(x+\mu_\nu);$$

ihre Summe ist beschränkt und gleichmäßig stetig. Wir ersetzen $g(x)$ durch die linke Seite von (10):

$$\sum_\nu \gamma_\nu \Big(\sum_\sigma a_{r\sigma} z(x+\mu_\nu+\delta_\sigma)\Big). \tag{12}$$

Da $z(x)$ beschränkt ist, kann man die Doppelreihe (12) beliebig umordnen. Auf Grund von (11) hat daher ihre Summe den Wert $z(x)$, also ist $z(x)$ gleichmäßig stetig.

Satz. *Von der linken Seite der Gleichung* (1) *werde vorausgesetzt, daß es eine Zahl* $\eta > 0$ *gibt, derart daß für* $-\infty < \lambda < +\infty$

$$\left| \sum_{\sigma=0}^{s} a_{r\sigma} e^{i\delta_\sigma \lambda} \right| \geqq \eta.$$

Dann ist jede Lösung, welche mitsamt den r ersten Ableitungen beschränkt ist, mitsamt den r ersten Ableitungen fastperiodisch.

(Eingegangen am 15. 3. 1930.)

Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues.

Deuxième Partie: Le théorème fondamental sur la représentation finie.

Von

Nina Bary in Moskau.

Table des matières de la deuxième partie.

Chapitre III. La représentation finie d'une fonction continue arbitraire.

Chapitre III.

La représentation finie d'une fonction continue arbitraire.

I. Théorème fondamental.

18. Le problème de la représentation finie. — Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il èxiste des fonctions continues qui ne peuvent pas être représentées sous la forme de sommes de *deux* superpositions de

fonctions absolument continues. C'est le cas des fonctions ridées. On aurait pu croîre que quel que soit le nombre n, il existe des fonctions continues qui ne peuvent pas être des sommes de n superpositions de fonctions absolument continues. En réalité il n'en est pas ainsi, et le cas $n = 3$ est déjà exceptionnel à ce point de vue, puisque nous verrons que chaque fonction continue peut être représentée comme une somme de *trois* superpositions de fonctions absolument continues. Le présent chapitre est consacré à la démonstration de ce théorème. Comme cette démonstration présente quelques difficultés techniques, nous démontrons d'abord que toute fonction continue peut être décomposée en une somme de deux fonctions dont chacune est quasi-partout dérivable (n° 19). Il en résulte immédiatement qu'il suffit de prendre *quatre* superpositions de fonctions absolument continues pour obtenir la représentation d'une fonction continue arbitraire. Nous démontrons ensuite que le nombre de composantes peut être réduit à *trois*.

19. Décomposition d'une fonction continue arbitraire en deux fonctions quasi-partout dérivables. — Nous allons démontrer maintenant le théorème[1]) suivant:

Théorème. — *Toute fonction continue $F(x)$ est la somme de deux fonctions dont chacune a une dérivée quasi-partout.*

Pour le démontrer, prenons une suite d'ensembles parfaits qu'on construit de la manière suivante: P_1 est un ensemble parfait non dense, mes $P_1 > 0$, situé dans $(0,1)$; soient $\pi_n^{(1)}$ des ensembles parfaits non denses et de mésure positive situés dans les contigus $\delta_n^{(1)}$ à P_1 $(n = 1, 2, \ldots)$; on pose

$$P_2 = P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n^{(1)}.$$

D'une manière générale, l'ensemble P_m sera obtenu en prenant dans les contigus $\delta_n^{(m-1)}$ à P_{m-1} des ensembles parfaits non denses $\pi_n^{(m-1)}$ de mesure positive et en posant

$$P_m = P_{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n^{(m-1)}.$$

On continue ainsi jusqu'à ce que l'on obtienne une suite d'ensembles parfaits $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ emboîtés les uns dans les autres et formant un ensemble partout dense dans l'intervalle $(0, 1)$.

Soit $f_1(x)$ une fonction continue égale à $F(x)$ sur P_1 et qui est un polynome dans chaque contigu $\delta_n^{(1)}$ à P_1; nous supposons que dans $\delta_n^{(1)}$ le polynome $f_1(x)$ diffère de $F(x)$ de $\frac{1}{2^{n+1}}$ au plus $(n = 1, 2, \ldots)$.

[1]) Voir ma Note *Sur la représentation finie des fonctions continues* (*Comptes Rendus* **184** (1927), p. 1112).

Donc, la différence

$$h_1(x) = F(x) - f_1(x)$$

est nulle sur P_1 et l'on a

$$|h_1(x)| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

D'une manière générale, supposons les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$ déjà définies ainsi que $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Supposons que l'on ait

$$h_k(x) = h_{k-1}(x) - f_k(x)\ ^{2)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

où

$$h_k(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_k$$

et

$$|h_k(x)| < \frac{1}{2^{k+n}} \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(k)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

tandis que $f_k(x)$ est un polynome dans chaque contigu $\delta_n^{(k)}$ à P_k.

On pose alors

$$f_{m+1}(x) = h_m(x) \quad \text{sur} \quad P_{m+1}$$

et l'on prend pour $f_{m+1}(x)$ dans les contigus $\delta_n^{(m+1)}$ à P_{m+1} des polynomes tels que la différence

$$h_{m+1}(x) = h_m(x) - f_{m+1}(x),$$

qui est nulle sur P_{m+1}, vérifie dans les $\delta_n^{(m+1)}$ les inégalités

$$|h_{m+1}(x)| < \frac{1}{2^{m+1+n}} \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(m+1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On voit que toutes les conditions sont encore vérifiées.

On obtient ainsi une suite de fonctions continues

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x),\ \ldots.$$

On a, pour chaque m,

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x) + h_m(x).$$

Or, on a évidemment

$$|h_m(x)| < \frac{1}{2^{m+1}},$$

donc, la série $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(x)$ converge uniformément vers la fonction $F(x)$.

Il en résulte que les deux séries

$$f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + \ldots + f_{2m-1}(x) + \ldots$$

et

$$f_2(x) + f_4(x) + f_6(x) + \ldots + f_{2m}(x) \quad + \ldots$$

---

[2]) On pose $h_0(x) = F(x)$.

convergent aussi uniformément. En désignant par $F_1(x)$ et $F_2(x)$ les sommes de la première et de la seconde série respectivement on voit que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont continues et que

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x).$$

Nous allons démontrer que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont quasi-partout dérivables. A cet effet, posons

$$R_{k-1}(x) = f_k(x) + f_{k+2}(x) + f_{k+4}(x) + \dots .$$

On voit bien, puisque $f_k(x) = h_{k-1}(x) - h_k(x)$, que

$$R_{k-1}(x) = h_{k-1}(x) - h_k(x) + h_{k+1}(x) - h_{k+2}(x) + \dots$$

donc

$$R_k(x) = h_k(x) - h_{k+1}(x) + h_{k+2}(x) - h_{k+3}(x) + \dots$$

et que $R_k(x)$ vérifie ainsi les conditions du lemme du n° 12. Donc, en vertu de ce lemme

$$R_k(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_k$$

et

$$R'_k(x) = 0 \quad \text{presque partout sur } P_k.$$

Or, si k est impair, on a évidemment

$$F_1(x) = f_1(x) + f_3(x) + \dots + f_k(x) + R_{k+1}(x).$$

Mais chacune des fonctions $f_j(x)$ pour $j \leqq k$ est un polynome dans les intervalles contigus à P_k, donc la somme

$$f_1(x) + f_3(x) + \dots + f_k(x)$$

a une dérivée en chaque point de l'ensemble différence $P_{k+1} - P_k$, et comme $R'_{k+1}(x) = 0$ presque partout sur P_{k+1}, donc sur $P_{k+1} - P_k$, il en résulte que $F'_1(x)$ existe presque partout sur $P_{k+1} - P_k$, quel que soit k impair.

Il en résulte que $F'_1(x)$ existe quasi-partout. En effet, soit δ un intervalle quelconque intérieur à $(0, 1)$.

Puisque la somme des ensembles P_k est supposée partout dense dans $(0, 1)$, il existe un certain k_0 tel que si $k \geqq k_0$, δ contient des points des P_k. En particulier, δ contient des points d'un certain P_k pour k impair. On peut trouver un intervalle $\delta_n^{(k)}$ contigu à P_k et suffisamment petit pour qu'il soit entièrement contenu dans δ. Mais ce $\delta_n^{(k)}$ contient un ensemble parfait $\pi_n^{(k)}$ de mesure positive, donc une partie de mesure positive de $P_{k+1} - P_k$, k étant toujours impair. Or, dans $P_{k+1} - P_k$, pour k impair $F'_1(x)$ existe. Donc $F'_1(x)$ existe sur un ensemble de mesure positive dans chaque δ intérieur à $(0, 1)$, ce qui veut dire qu'elle existe quasi-partout dans $(0, 1)$.

On démontre, en répétant le même raisonnement mais en supposant k pair, que $F'_2(x)$ existe quasi-partout, c. q. f. d.

Il est intéressant à remarquer que dans cette décomposition d'une fonction continue $F(x)$ en deux fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ quasi-partout dérivables on ne peut pas supposer que ces deux fonctions, ni même l'une d'elles, jouissent de la propriété N. En effet, nous avons vu dans le n° 16 qu'il existe des fonctions continues (c'est le cas des fonctions ridées), qui ne peuvent pas être représentées sous forme d'une somme de deux fonctions dont l'une est quasi-partout dérivable et l'autre jouit de la propriété N.

20. Décomposition de chaque fonction continue en quatre superpositions de fonctions absolument continues. — Nous venons de démontrer que chaque fonction continue $F(x)$ est la somme de deux fonctions quasi-partout dérivables. D'autre part, nous avons vu au n° 13 que chaque fonction quasi-partout dérivable est la somme de deux superpositions de fonctions absolument continues.

Ces deux résultats réunis nous permettent d'énoncer le théorème[3])

Théorème. *Toute fonction continue peut être représentée dans la forme*

$$F(x) = f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)] + f_3[\varphi_3(x)] + f_4[\varphi_4(x)],$$

les f_i et φ_i étant absolument continues.

Ainsi nous voyons qu'il est possible de représenter chaque fonction continue comme une somme *finie* de superpositions de fonctions absolument continues. Il reste à savoir si *quatre* fonctions de la forme $f[\varphi(x)]$, f et φ étant absolument continues sont nécessaires pour une telle représentation dans le cas général.

Nous avons vu au n° 16 qu'il existe des fonctions continues qui ne sont pas représentables dans la forme

$$f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)],$$

les f_i et φ_i étant absolument continues, ni même dans la forme

$$f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)] + \varphi_3(x)$$

toutes les fonctions étant encore absolument continues.

Il reste alors à étudier la question si l'on peut représenter chaque fonction continue $F(x)$ comme une somme de *trois* fonctions, dont chacune est une superposition de fonctions absolument continues. Nous verrons que la réponse à cette question est affirmative. Mais avant de la résoudre nous avons besoin d'une proposition préliminaire.

21. Une proposition préliminaire. — Nous nous proposons de démontrer un théorème concernant l'allure d'une fonction continue arbitraire sur un ensemble parfait de mesure positive ou non. Il s'agit de décom-

[3]) Voir ma Note *Sur la représentation finie des fonctions continues* (*Comptes Rendus* 184 (1927), p. 1112).

poser une fonction donnée $F(x)$ en deux fonctions, dont chacune a sur un ensemble parfait P donné un ensemble de valeurs de mesure nulle. Plus précisément, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème. — *Quelle que soit la fonction continue $F(x)$ et l'ensemble parfait non dense P, il existe deux fonctions continues $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ telles que*

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

dans tout l'intervalle (a, b) où elle est définie,

$$\operatorname{mes} \varphi(P) = \operatorname{mes} \psi(P) = 0,$$
$$\psi(a) = \psi(b) = 0,$$
$$|\psi(x)| < \varepsilon,$$

ε étant fixe mais aussi petit que l'on veut.

Pour le voir, démontrons d'abord que, ε étant donné, il existe toujours un système S formé d'un nombre fini de segments enfermant l'ensemble parfait P, et une fonction continue $\psi(x)$ telle que

$$\psi(a) = \psi(b) = 0,$$
$$|\psi(x)| < \varepsilon,$$

$\psi(x) = \text{const}$ sur chaque segment du système S, que la différence

$$\varphi(x) = F(x) - \psi(x)$$

vérifie l'inégalité

$$\operatorname{mes} \varphi(S) < \varepsilon$$

et qu'enfin on a sur chaque segment du système S l'inégalité $m \leqq \varphi(x) \leqq M$, où m et M sont le minimum et le maximum de $F(x)$ dans $[a, b]$.

Soit k un entier positif tel que

$$(M - m)\frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ les intervalles contigus à P. On peut toujours supposer m assez grand pour que, les m premiers contigus $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ étant enlevés du segment $[a, b]$, l'oscillation de $F(x)$ sur chacun des segments qui restent soit inférieure à $\frac{M-m}{k^2}$. Désignons par S ce système des segments qui restent, S enferme évidemment l'ensemble parfait P.

Soit ϱ_i l'un quelconque des segments du système S et M_i le maximum de $F(x)$ sur ϱ_i. Si ϱ_i a pour extrémité a ou b, nous posons $\psi(x) = 0$ sur ϱ_i. Si ϱ_i est contenu au sens strict à l'intérieur de $[a, b]$, nous remarquons que $M_i - m$ vérifie toujours une et une seule des k inégalités

$$(M - m)\frac{s-1}{k} < M_i - m \leqq \frac{s}{k}(M - m)$$

où s est un nombre entier $1 \leqq s \leqq k$; pour ne pas exclure le cas où $M_i = m$; nous supposerons qu'à l'inégalité pour $s = 1$ on ajoute l'égalité, c'est-à-dire que la première inégalité s'écrit $0 \leqq M_i - m \leqq \frac{1}{k}(M-m)$. Avec cette convention, le nombre s est complètement déterminé par la connaissance du nombre M_i.

Posons

$$\psi(x) = M_i - m - \frac{s}{k}(M-m) \quad \text{dans} \quad \varrho_i.$$

On voit bien que dans chaque ϱ_i on a

$$0 \geqq \psi(x) > -\frac{1}{k}(M-m)$$

donc

$$|\psi(x)| < \varepsilon.$$

En posant $\psi(a) = 0$ et $\psi(b) = 0$, si $\psi(x)$ n'avait pas encore été définie aux points a et b, et en interpôlant $\psi(x)$ linéairement dans les $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$, on voit que $\psi(x)$ est partout définie, nulle aux points a et b, constante dans chaque ϱ_i et inférieure à ε en valeur absolue partout sur $[a, b]$.

Considérons la différence $\varphi(x) = F(x) - \psi(x)$.

Nous avons supposé que

$$\operatorname*{osc}_{\varrho_i} F(x) < \frac{M-m}{k^2} \quad \text{dans chaque } \varrho_i,$$

et nous avons construit $\psi(x)$ de telle manière qu'elle soit constante dans les ϱ_i; donc

$$\operatorname*{osc}_{\varrho_i} \varphi(x) < \frac{M-m}{k^2}.$$

D'ailleurs, le maximum de $\varphi(x)$ dans ϱ_i est évidemment égal à

$$M_i - \left[M_i - m - \frac{s}{k}(M-m)\right] = m + \frac{s}{k}(M-m).$$

Donc, l'ensemble des valeurs de $\varphi(x)$ sur ϱ_i est un segment de longueur $< \frac{M-m}{k^2}$ et dont l'extrémité supérieure est en $m + \frac{s}{k}(M-m)$. Il en résulte que l'ensemble des valeurs de $\varphi(x)$ sur le système S est contenu dans k segments au plus, et les longueurs de ces segments sont $< \frac{M-m}{k^2}$. Ainsi

$$\operatorname{mes} \varphi(S) < \frac{k(M-m)}{k^2} = (M-m)\frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Enfin, $\psi(x)$ étant négatif ou nul, on voit bien que $\varphi(x) \geqq F(x)$ partout, donc $\varphi(x) \geqq m$.

D'autre part, dans chaque ϱ_i, on a $\varphi(x) \leqq M$, puisque le maximum de $\varphi(x)$ est égal à

$$m + \frac{s}{k}(M - m),$$

donc inférieur ou égal à

$$m + \frac{k}{k}(M - m) = M.$$

Ceci étant établi, prenons une suite de nombres ε_n positifs, tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ converge et que sa somme soit inférieure à ε.

D'après ce qui précède, il existe un système S_1 enfermant P et une fonction continue $\psi_1(x)$ constante dans chaque segment du système S_1, nulle aux points a et b, telle que $|\psi_1(x)| < \varepsilon_1$ et que $\varphi_1(x) = F(x) - \psi_1(x)$ vérifie l'inégalité

$$\text{mes}\, \varphi_1(S_1) < \varepsilon_1;$$

d'ailleurs $m \leqq \varphi_1(x) \leqq M$ dans chaque segment du systéme S_1.

La fonction $\varphi_1(x)$ étant continue, on peut faire une pareille construction pour chaque segment du système S_1 et pour la partie de P contenue dans ce segment. Si p_1 est le nombre des segments du système S_1 et $\varrho_i^{(1)}$ l'un quelconque de ces segments, on peut trouver à l'intérieur de $\varrho_i^{(1)}$ un nouveau système $S_i^{(2)}$ et une fonction $\psi_i^{(2)}(x)$ continue, s'annullant aux extrémités de $\varrho_i^{(1)}$, inférieure à $\frac{\varepsilon_2}{p_1}$ en valeur absolue, constante dans chaque segment de $S_i^{(2)}$ et telle que pour la différence

$$\varphi_i^{(2)}(x) = \varphi_1(x) - \psi_i^{(2)}(x)$$

on ait

$$\text{mes}\, \varphi_i^{(2)}(S_i^{(2)}) < \frac{\varepsilon_2}{p_1};$$

d'ailleurs, si $\varrho_j^{(2)}$ est un segment de $S_i^{(2)}$, le minimum de $\varphi_i^{(2)}$ sur $\varrho_j^{(2)}$ est supérieur ou égal a celui de $\varphi_1(x)$ sur $\varrho_i^{(1)}$ et le maximum de $\varphi_i^{(2)}$ sur $\varrho_j^{(2)}$ est inférieur ou égal à celui de $\varphi_1(x)$ sur $\varrho_i^{(1)}$, d'où l'on conclut que l'ensemble

$$\varphi_i^{(2)}(\varrho_j^{(2)})$$

est contenu dans $\varphi_1(\varrho_i^{(1)})$ chaque fois que $\varrho_j^{(2)}$ appartient à $\varrho_i^{(1)}$.

En posant

$$S_2 = S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + \ldots + S_{p_1}^{(2)},$$

on a un système S_2 contenant P et contenu dans S_1.

Posons

$$\psi_2(x) = 0 \quad \text{en dehors de } S_1,$$

$$\psi_2(x) = \psi_i^{(2)}(x) \quad \text{dans } \varrho_i^{(1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p_1).$$

La fonction $\psi_2(x)$ est continue, nulle aux extrémités de $[a, b]$, constante dans chaque segment du système S_2, inférieure à $\frac{\varepsilon_2}{p_1}$ en valeur absolue et telle que pour la différence

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - \psi_2(x)$$

on a

$$\operatorname{mes} \varphi_2(S_2) \leqq \operatorname{mes} \sum_{i=1}^{p_1} \varphi_i^{(2)}(S_i^{(2)}) \leqq p_1 \cdot \frac{\varepsilon_2}{p_1} = \varepsilon_2;$$

d'ailleurs l'ensemble $\varphi_2(S_2)$ est contenu dans $\varphi_1(S_1)$.

Supposons, que l'on ait déjà défini m systèmes $S_1, S_2, \ldots, S_m$ contenant P et contenus les uns dans les autres

$$S_1 > S_2 > \ldots > S_m,$$

et les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_m(x)$. Supposons que l'on ait

$$\psi_k(a) = \psi_k(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$|\psi_k(x)| < \frac{\varepsilon_k}{p_{k-1}} \qquad (k = 2, 3, \ldots, m),$$

où p_{k-1} est le nombre des segments du système S_{k-1}, $\psi_k(x) = \text{const}$ dans chaque segment du système S_k et nulle en dehors de S_{k-1} $(k = 2, 3, \ldots)$, que pour la différence

$$\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x) - \psi_k(x)$$

on a

$$\operatorname{mes} \varphi_k(S_k) \leqq \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

et que l'ensemble $\varphi_k(S_k)$ est contenu dans $\varphi_{k-1}(S_{k-1})$ pour $k = 2, 3, \ldots, m$.

Pour définir $\psi_{m+1}(x)$ on la suppose nulle en dehors de S_m. Dans chacun des p_m segments $\varrho_i^{(m)}$ de S_m on peut trouver un système $S_i^{(m+1)}$ enfermant la partie de P contenue dans $\varrho_i^{(m)}$ et une fonction $\psi_i^{(m+1)}(x)$ continue, nulle aux extrémités de $\varrho_i^{(m)}$, inférieure à $\frac{\varepsilon_{m+1}}{p_m}$ en valeur absolue, constante dans chaque segment du système $S_i^{(m+1)}$ et telle que pour la différence

$$\varphi_i^{(m+1)}(x) = \varphi_m(x) - \psi_i^{(m+1)}(x)$$

on ait

$$\operatorname{mes} \varphi_i^{(m+1)}(S_i^{m+1}) < \frac{\varepsilon_{m+1}}{p_m}$$

et que, si ϱ_j^{m+1} est contenu dans $\varrho_i^{(m)}$ on ait $\varphi_i^{m+1}(\varrho_j^{m+1})$ contenu dans $\varphi_m(\varrho_i^m)$, donc $\varphi_j^{m+1}(S_i^{m+1})$ contenu dans $\varphi_m(\varrho_i^m)$.

En posant

$$\psi_{m+1}(x) = \psi_i^{(m+1)}(x) \quad \text{sur} \quad \varrho_i^m$$

et

$$\varphi_{m+1}(x) = \varphi_m(x) - \psi_{m+1}(x)$$

on voit que $\varphi_{m+1}(x)$ et $\psi_{m+1}(x)$ sont continues, que $\psi_{m+1}(a)=\psi_{m+1}(b)=0$, $|\psi_{m+1}(x)|<\frac{\varepsilon_{m+1}}{p_m}$, $\psi_{m+1}(x)$ est constante dans chaque segment du système $S_{m+1}=S_1^{(m+1)}+S_2^{(m+1)}+\ldots+S_{p_m}^{(m+1)}$, que

$$\operatorname{mes}\varphi_{m+1}(S_{m+1})<p_m\frac{\varepsilon_{m+1}}{p_m}=\varepsilon_{m+1}$$

et qu'enfin $\varphi_{m+1}(S_{m+1})$ est contenu dans $\varphi_m(S_m)$.

Ainsi toutes les conditions sont encore vérifiées. Nous avons ainsi deux suites de fonctions continues

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x),\ \ldots$$

et

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_m(x),\ \ldots.$$

Comme

$$|\psi_m(x)|<\frac{\varepsilon_m}{p_{m-1}}<\varepsilon_m \qquad (m=1,2,\ldots)$$

la série $\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m(x)$ converge absolument et uniformément vers une fonction continue $\psi(x)$.

Or, puisque

$$F(x)=\varphi_1(x)+\psi_1(x)=\varphi_2(x)+\psi_1(x)+\psi_2(x)$$
$$=\ldots=\varphi_m(x)+\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_m(x)=\ldots$$

on voit que $\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x)$ est une fonction continue $\varphi(x)$ telle que

$$F(x)=\varphi(x)+\psi(x).$$

Nous allons démontrer que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ vérifient les conditions du théorème.

Tout d'abord, comme $\psi_m(a)=\psi_m(b)=0$, quel que soit m, on a

$$\psi(a)=\psi(b)=0.$$

Ensuite, puisque $|\psi_m(x)|<\varepsilon_m$ $(m=1,2,3,\ldots)$ et que la série $\Sigma\varepsilon_m$ est convergente et de somme $<\varepsilon$, on a

$$|\psi(x)|<\varepsilon.$$

Considérons maintenant l'ensemble $\psi(P)$. Puisque P est contenu dans S_m quel que soit m, on a

$$\operatorname{mes}\psi(P)\leqq\operatorname{mes}\psi(S_m) \qquad (m=1,2,3,\ldots).$$

Nous savons que $\psi(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_m(x)+\ldots$ et que, si $k\leqq m$, $\psi_k(x)$ est constante dans chaque segment $\varrho_i^{(m)}$ du système S_m. Donc sur un $\varrho_i^{(m)}$ on a

$$\psi(x)=\text{const}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\psi_k(x).$$

Comme $|\psi_k(x)| < \frac{\varepsilon_k}{p_{k-1}}$, où p_{k-1} est le nombre des segments du système S_{k-1}, on a

$$\text{mes}\,\psi(\varrho_i^m) \leqq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{p_{k-1}} < \frac{1}{p_m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k$$

puisque d'après la définition des nombres p_k on voit bien que $p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_k \leqq \cdots$.

Comme la série $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ converge, la quantité

$$\eta_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k$$

tend vers zéro avec m. Or, on a

$$\text{mes}\,\psi(S_m) \leqq \sum_{i=1}^{p_m} \text{mes}\,\psi(\varrho_i^{(m)}) < p_m\left(\frac{1}{p_m}\sum_{k=m+1}^{\infty}\varepsilon_k\right) = \eta_m,$$

et comme dans cette inégalité m est aussi grand que l'on veut, il en résulte

$$\text{mes}\,\psi(P) = 0.$$

Il reste à démontrer que $\text{mes}\,\varphi(P) = 0$. A cet effet, remarquons d'abord que, quel que soit m, l'ensemble $\varphi(P)$ est contenu dans $\varphi(S_m)$.

En effet, soit ξ un point quelconque de P. L'entier m étant fixe, ξ appartient à un certain segment $\varrho_i^{(m)}$ du système S_m. Il suit de la construction même des fonctions $\varphi_m(x)$ que si un segment $\varrho_j^{(m')}$ d'un système $S_{m'}$, $m' > m$, est contenu dans $\varrho_i^{(m)}$, l'ensemble $\varphi_{m'}(\varrho_j^{m'})$ est contenu dans l'ensemble $\varphi_m(\varrho_i^m)$.

Donc, quel que soit m, si $m' > m$, on a toujours $\varphi_{m'}(\xi)$ contenu dans $\varphi_m(\varrho_i^m)$. Comme $\varphi(\xi)$ est la limite des nombres $\varphi_{m'}(\xi)$ quand m' tend vers l'infini et comme $\varphi_m(\varrho_i^m)$ est un segment fermé, il est évident que $\varphi(\xi)$ est contenu dans $\varphi_m(\varrho_i^m)$.

Il correspond donc à chaque point ξ de P un segment ϱ_i^m de S_m tel que $\varphi(\xi)$ est contenu dans $\varphi_m(\varrho_i^m)$. Il en résulte que $\varphi(P)$ est contenu dans $\varphi_m(S_m)$. Or, m étant quelconque, on a

$$\text{mes}\,\varphi(P) < \text{mes}\,\varphi_m(S_m) \leqq \varepsilon_m$$

donc

$$\text{mes}\,\varphi(P) = 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème, c. q. f. d.

En démontrant le théorème précédent nous avons voulu seulement obtenir deux fonctions continues $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ dont la somme est égale à $F(x)$ et dont les valeurs sur P forment des ensembles de mesure nulle. D'ailleurs nous avons exigé que $\psi(x)$ soit inférieure à un ε donné d'avance et nulle aux points a et b. Mais nous n'avons fait aucune hypothèse sur l'allure des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ dans les contigus à P. Cependant, pour

démontrer le théorème fondamental sur la décomposition de chaque fonction continue en trois superpositions de fonctions absolument continues, nous sommes obligés de préciser l'énoncé du théorème précédent, et de démontrer qu'il a encore lieu, quand on fait des hypothèses suplémentaires sur les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Nous allons donc déduire d'abord un corollaire du théorème précédent.

Corollaire. — *Etant donnée une fonction continue quelconque $F(x)$ définie dans un segment $[a, b]$ et un ensemble parfait non dense P, il existe un ensemble parfait Q, contenant P, tel que la différence $Q - P$ est dans chaque contigu à P un ensemble parfait non dense de mesure positive, et deux fonctions continues $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ telles que*

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x) \quad \textit{dans} \quad [a, b]$$

$$\operatorname{mes} \varphi(P) = \operatorname{mes} \psi(P) = 0,$$

$\varphi(x)$ est absolument continue dans chaque contigu à P et constante dans chaque contigu à Q, enfin

$$\psi(a) = \psi(b) = 0$$

et

$$|\psi(x)| < \varepsilon \quad \textit{dans} \quad [a, b]$$

ε étant positif mais aussi petit que l'on veut.

En effet, soient $\bar\varphi(x)$ et $\bar\psi(x)$ deux fonctions vérifiant les énoncés du théorème précédent, pour $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, c'est-à-dire telles que

$$F(x) = \bar\varphi(x) + \bar\psi(x),$$

$$\operatorname{mes} \bar\varphi(P) = \operatorname{mes} \bar\psi(P) = 0,$$

$$|\bar\psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\bar\psi(a) = \bar\psi(b) = 0.$$

Soit δ_n un intervalle contigu à P. Divisons le en un nombre fini d'intervalles égaux assez petits pour que l'oscillation de $F(x)$ dans chacun de ces intervalles ne surpasse pas $\frac{\varepsilon}{2}$. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$ les points de division; si a_n et b_n sont les extrémités de δ_n, on posera $c_0 = a_n$ et $c_{k+1} = b_n$.

Posons

$$\varphi(c_i) = F(c_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

et

$$\varphi(c_0) = \bar\varphi(c_0), \quad \varphi(c_{k+1}) = \bar\varphi(c_{k+1}).$$

Soit Q_i' un ensemble parfait non dense et de mesure positive situé dans (c_i, c_{i+1}), $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. Soit $\omega_i(x)$ une fonction définie dans (c_i, c_{i+1}) qui est égale à 1 sur Q_i' et à 0 en dehors.

Posons

$$\varphi(x) = \varphi(c_i) + \frac{\varphi(c_{i+1}) - \varphi(c_i)}{\text{mes}\, Q_i'} \int_{c_i}^{x} \omega_i(x)\, dx \quad \text{dans} \quad (c_i, c_{i+1}).$$

On voit que $\varphi(x)$ est absolument continue et monotone dans (c_i, c_{i+1}); d'ailleurs elle est absolument continue dans tout l'intervalle δ_n, puisque cet intervalle se compose d'un nombre fini d'intervalles (c_i, c_{i+1}) où elle est absolument continue et aux points de division c_i elle reste continue puisque, en posant dans la formule précédente $x = c_i$, on voit bien que $\varphi(x) = \varphi(c_i)$ et de même pour $x = c_{i+1}$, on a $\varphi(x) = \varphi(c_{i+1})$.

On voit bien que $\varphi(x)$ est constante dans chaque contigu à Q_i' en considérant les contigus par rapport à (c_i, c_{i+1}); en posant

$$Q_n = \sum_{i=1}^{k} Q_i'$$

on voit que $\varphi(x)$ est constante dans les contigus à Q_n par rapport à δ_n.

Enfin, si l'on pose

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}(x) \quad \text{sur} \quad P$$

et si l'on définit Q comme égal à

$$Q = P + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$$

on voit bien que $\varphi(x)$ est continue, absolument continue dans les contigus à P et constante dans les contigus à Q. On a

$$\text{mes}\, \varphi(P) = 0$$

puisque $\varphi(x) = \overline{\varphi}(x)$ sur P.

En posant

$$\psi(x) = F(x) - \varphi(x)$$

on voit que sur P on a $\psi(x) = \overline{\psi}(x)$, donc

$$\text{mes}\, \psi(P) = 0.$$

On a $\psi(a) = \psi(b) = 0$, puisque si a et b appartiennent à P cela résulte des égalités $\overline{\psi}(a) = \overline{\psi}(b) = 0$ et de $\psi(x) = \overline{\psi}(x)$ sur P; si a (ou b) est l'extrémité d'un contigu à P, en a $\varphi(a) = \overline{\varphi}(a)$, donc $\psi(a) = \overline{\psi}(a) = 0$ par hypothèse, et de même pour b.

Il reste à démontrer que l'on a

$$|\psi(x)| < \varepsilon \quad \text{dans} \quad [a, b].$$

En effet, sur P, on a $\psi(x) = \overline{\psi}(x)$, et comme $|\overline{\psi}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dans $[a, b]$, l'inégalité pour $\psi(x)$ est vérifiée sur P.

Considérons maintenant un intervalle δ_n contigu à P. On a dans chaque (c_i, c_{i+1}) l'oscillation de $F(x)$ inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$; $\varphi(x)$ étant mono-

tone et égale à $F(x)$ aux points c_i $(i=1,2,\ldots,k)$, on voit que $\psi(x)$ est nulle aux points c_i $(i=1,2,\ldots,k)$ et a une oscillation inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$, donc $|\psi(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ dans (c_i, c_{i+1}) pour $(i=1,2,\ldots,k-1)$.

Quant aux intervalles (c_0, c_1) et (c_k, c_{k+1}), l'oscillation de $\psi(x)$ est encore égale à celle de $F(x)$, donc inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$; or dans c_0 et c_{k+1} la fonction $\psi(x)$ n'est plus nulle, cependant elle est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$; il en résulte que $|\psi(x)|<\varepsilon$.

Donc, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ vérifient toutes les conditions de l'énoncé, c. q. f. d.

22. Le théorème fondamental. — Ces préliminaires terminés, nous pouvons démontrer le théorème fondamental sur la décomposition des fonctions continues en superpositions de fonctions absolument continues[1]).

Théorème fondamental. — *Toute fonction continue $F(x)$ est la somme de trois fonctions dont chacune est une superposition de fonctions absolument continues,*

$$F(x)=f_1[\varphi_1(x)]+f_2[\varphi_2(x)]+f_3[\varphi_3(x)].$$

Soit P_1 un ensemble parfait non dense, mes $P_1>0$, et $\mathsf{F}_1(x)$ une fonction absolument continue constante dans chaque intervalle $\delta_n^{(1)}$ contigu à P_1 $(n=1,2,\ldots)$.

La différence $F(x)-\mathsf{F}_1(x)$ étant continue, il existe d'après le corollaire du théorème précédent un ensemble parfait P_2 et deux fonctions continues $\Phi_1(x)$ et $\Psi_1(x)$ jouissant des propriétés suivantes:

$$P_2=P_1+\sum P_n^{(2)}$$

où $P_n^{(2)}$ est un ensemble parfait, mes $P_n^{(2)}>0$, situé dans l'intervalle $\delta_n^{(1)}$ contigu à P_1 $(n=1,2,\ldots)$;

$$\Phi_1(x)+\Psi_1(x)=F(x)-\mathsf{F}_1(x),$$
$$\text{mes}\,\Phi_1(P_1)=\text{mes}\,\Psi_1(P_1)=0,$$

$\Phi_1(x)$ est absolument continue dans chaque contigu à P_1 et constante dans chaque contigu à P_2.

Considérons un intervalle $\delta_n^{(1)}$ contigu à P_1; la fonction $\Psi_1(x)$ étant continue et $P_n^{(2)}$ un ensemble parfait, il existe, d'après le corollaire du théorème précédent, un ensemble $Q_n^{(2)}$ contenant $P_n^{(2)}$ et tel que la différence $Q_n^{(2)}-P_n^{(2)}$ est, dans chaque intervalle contigu à $P_n^{(2)}$ un ensemble parfait de mesure positive, et deux fonctions continues $\Psi_n^{(2)}(x)$ et $\omega_n^{(1)}(x)$

[1]) Voir ma Note *Sur la structure analytique d'une fonction continue arbitraire* (*Comptes Rendus* 186 (1928), p. 1414).

telles que

$$\Psi_n^{(2)}(x) + \omega_n^{(1)}(x) = \Psi_1(x) \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(1)},$$

$$\text{mes}\, \Psi_n^{(2)}(P_n^{(2)}) = \text{mes}\, \omega_n^{(1)}(P_n^{(2)}) = 0,$$

$\Psi_n^{(2)}(x)$ est absolument continue dans les contigus à $P_n^{(2)}$ et constante dans les contigus à $Q_n^{(2)}$,

$$|\omega_n^{(1)}(x)| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(1)},$$

$$\omega_n^{(1)}(x) = 0 \quad \text{aux extrémités de} \quad \delta_n^{(1)}.$$

Posons

$$\Psi_2(x) = \Psi_1(x) \quad \text{sur} \quad P_1,$$

$$\Psi_2(x) = \Psi_n^{(2)}(x) \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et

$$\omega_1(x) = \Psi_1(x) - \Psi_2(x).$$

Il est évident que

$$\omega_1(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_1; \quad \omega_1(x) = \omega_n^{(1)}(x) \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et comme $\omega_1(x)$ est nulle aux extrémités de chaque $\delta_n^{(1)}$, elle est partout continue. Il en est donc de même pour $\Psi_2(x)$.

Remarquons, que

$$\text{mes}\, \Psi_2(P_1) = \text{mes}\, \Psi_1(P_1) = 0$$

et que

$$\text{mes}\, \Psi_2(P_n^{(2)}) = \text{mes}\, \Psi_n^{(2)}(P_n^{(2)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

donc, en posant,

$$S^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(2)},$$

on a

$$\text{mes}\, \Psi_2(S^{(2)}) = 0;$$

d'ailleurs $\Psi_2(x)$ est absolument continue dans chaque contigu à $P_2 = P_1 + S^{(2)}$ et constante dans les contigus à $P_3 = P_2 + H^{(2)}$, où $H^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(2)}$.

Posons

$$\Phi_2(x) = \Phi_1(x),$$

$$\mathsf{F}_2(x) = \mathsf{F}_1(x) + \omega_1(x).$$

On a alors

$$\mathsf{F}_2(x) + \Phi_2(x) + \Psi_2(x) = \mathsf{F}_1(x) + \omega_1(x) + \Phi_1(x) + \Psi_1(x) - \omega_1(x)$$

$$= \mathsf{F}_1(x) + \Phi_1(x) + \Psi_1(x) = F(x).$$

Comme $\mathsf{F}_1(x)$ est constante dans chaque intervalle $\delta_n^{(1)}$ contigu à P_1, et comme

$$\text{mes}\, \omega_1(P_n^{(2)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on a

$$\text{mes}\, \mathsf{F}_2(P_n^{(2)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

donc
$$\text{mes}\, \mathsf{F}_2(S^{(2)}) = 0\,.$$
On a d'ailleurs
$$\text{mes}\, \Phi_2(P_1) = \text{mes}\, \Phi_1(P_1) = 0$$
et $\Phi_2(x)$ est absolument continue dans chaque $\delta_n^{(1)}$, et constante dans les contigus $\delta_n^{(2)}$ à P_2.

Ceci étant, considérons un intervalle $\delta_n^{(2)}$ contigu à P_2 et l'ensemble parfait $P_n^{(3)}$, mes $P_n^{(3)} > 0$, qui est la partie de P_3 située dans $\delta_n^{(2)}$.

D'après le corollaire du théorème précédent, il existe un ensemble parfait $Q_n^{(3)}$ contenant $P_n^{(3)}$ et tel que la différence $Q_n^{(3)} - P_n^{(3)}$ est dans chaque contigu à $P_n^{(3)}$ un ensemble parfait de mesure positive et deux fonctions continues $\mathsf{F}_n^{(3)}(x)$ et $\omega_n^{(2)}(x)$ telles que
$$\mathsf{F}_n^{(3)}(x) + \omega_n^{(2)}(x) = \mathsf{F}_2(x) \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(2)},$$
$$\text{mes}\, \mathsf{F}_n^{(3)}(P_n^{(3)}) = \text{mes}\, \omega_n^{(2)}(P_n^{(3)}) = 0\,,$$
$\mathsf{F}_n^{(3)}(x)$ est absolument continue dans les contigus à $P_n^{(3)}$ et constante dans les contigus à $Q_n^{(3)}$,
$$|\omega_n^{(2)}(x)| < \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(2)}\,,$$
$$\omega_n^{(2)}(x) = 0 \quad \text{aux extrémités de} \quad \delta_n^{(2)}.$$

Posons
$$\mathsf{F}_3(x) = \mathsf{F}_2(x) \quad \text{sur} \quad P_2\,,$$
$$\mathsf{F}_3(x) = \mathsf{F}_n^{(3)}(x) \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$
et
$$\omega_2(x) = \mathsf{F}_2(x) - \mathsf{F}_3(x).$$

On voit bien que
$$\omega_2(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_2\,,$$
$$\omega_2(x) = \omega_n^{(2)}(x) \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$
et comme $\omega_2(x)$ est nulle aux extrémités de chaque $\delta_n^{(2)}$, elle est partout continue. Il en est donc de même pour $\mathsf{F}_3(x)$.

On a
$$\text{mes}\, \mathsf{F}_3(S^{(2)}) = \text{mes}\, \mathsf{F}_2(S^{(2)}) = 0$$
et
$$\text{mes}\, \mathsf{F}_3(P_n^{(3)}) = \text{mes}\, \mathsf{F}_n^{(3)}(P_n^{(3)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
donc, en posant
$$S^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(3)}\,,$$
on a
$$\text{mes}\, \mathsf{F}_3(S^{(3)}) = 0\,;$$
d'ailleurs $\mathsf{F}_3(x)$ est absolument continue dans les contigus à P_3 et constante dans les contugus à $P_4 = P_3 + H^{(3)}$, où $H^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(3)}$.

Posons

$$\Psi_3(x) = \Psi_2(x),$$
$$\Phi_3(x) = \Phi_2(x) + \omega_2(x).$$

On a alors

$$\mathsf{F}_3(x) + \Phi_3(x) + \Psi_3(x) = \mathsf{F}_2(x) - \omega_2(x) + \Phi_2(x) + \omega_2(x) + \Psi_2(x)$$
$$= \mathsf{F}_2(x) + \Phi_2(x) + \Psi_2(x) = F(x).$$

Comme $\Phi_2(x)$ est constante dans les contigus $\delta_n^{(2)}$ à P_2 et comme

$$\operatorname{mes} \omega_2(P_n^{(3)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on a

$$\operatorname{mes} \Phi_3(P_n^{(3)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

donc

$$\operatorname{mes} \Phi_3(S^{(3)}) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\operatorname{mes} \Psi_3(S^{(2)}) = \Psi_3(S^{(3)}) = 0$$

et $\Psi_3(x)$ est absolument continue dans chaque $\delta_n^{(2)}$ et constante dans les contigus $\delta_n^{(3)}$ à P_3.

Nous sommes obligés d'indiquer encore un pas de la construction avant de passer au cas général.

Considérons un intervalle $\delta_n^{(3)}$ contigu à P_3 et l'ensemble parfait $P_n^{(4)}$, $\operatorname{mes} P_n^{(4)} > 0$, qui est la partie de P_4 située dans $\delta_n^{(3)}$.

D'après le corollaire du théorème précédent, il existe un ensemble parfait $Q_n^{(4)}$ contenant $P_n^{(4)}$, tel que la différence $Q_n^{(4)} - P_n^{(4)}$ est dans chaque contigu à $P_n^{(4)}$ un ensemble parfait de mesure positive, et deux fonctions continues $\Phi_n^{(4)}(x)$ et $\omega_n^{(3)}(x)$ telles que

$$\Phi_n^{(4)}(x) + \omega_n^{(3)}(x) = \Phi_3(x) \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(3)},$$
$$\operatorname{mes} \Phi_n^{(4)}(P_n^{(4)}) = \operatorname{mes} \omega_n^{(3)}(P_n^{(4)}) = 0,$$

$\Phi_n^{(4)}(x)$ est absolument continue dans les contigus à $P_n^{(4)}$ et constante dans les contigus à $Q_n^{(4)}$,

$$|\omega_n^{(3)}(x)| < \frac{1}{2^{n+3}} \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(3)},$$

$$\omega_n^{(3)}(x) = 0 \quad \text{aux extrémités de} \quad \delta_n^{(3)}.$$

Posons

$$\Phi_4(x) = \Phi_3(x) \quad \text{sur} \quad P_3,$$
$$\Phi_4(x) = \Phi_n^{(4)}(x) \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(3)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et

$$\omega_3(x) = \Phi_3(x) - \Phi_4(x).$$

On voit bien que

$$\omega_3(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_3; \quad \omega_3(x) = \omega_n^{(3)}(x) \quad \text{dans} \quad \delta_n^{(3)},$$

et comme $\omega_3(x)$ est nulle aux extrémités de chaque $\delta_n^{(3)}$, elle est partout continue. Il en est donc de même pour $\Phi_4(x)$.

On a

$$\text{mes}\, \Phi_4(S^{(3)}) = \text{mes}\, \Phi_3(S^{(3)}) = 0$$

et

$$\text{mes}\, \Phi_4(P_n^{(4)}) = \text{mes}\, \Phi_n^{(4)}(P_n^{(4)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

donc, en posant $S^{(4)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n^{(4)}$

$$\text{mes}\, \Phi_4(S^{(4)}) = 0;$$

d'ailleurs $\Phi_4(x)$ est absolument continue dans chaque contigu à P_4 et constante dans les contigus à $P_5 = P_4 + H^{(4)}$, où $H^{(4)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_n^{(4)}$.

Posons

$$\mathsf{F}_4(x) = \mathsf{F}_3(x),$$
$$\Psi_4(x) = \Psi_3(x) + \omega_3(x).$$

On a

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_4(x) + \Phi_4(x) + \Psi_4(x) &= \mathsf{F}_3(x) + \Phi_3(x) - \omega_3(x) + \Psi_3(x) + \omega_3(x)\\ &= \mathsf{F}_3(x) + \Phi_3(x) + \Psi_3(x) = F(x).\end{aligned}$$

Comme $\Psi_3(x)$ est constante dans les contigus à P_3 et comme

$$\text{mes}\, \omega_3(P_n^{(4)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on a

$$\text{mes}\, \Psi_4(P_n^{(4)}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

donc

$$\text{mes}\, \Psi_4(H^{(4)}) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\text{mes}\, \mathsf{F}_4(S^{(3)}) = \text{mes}\, \mathsf{F}_3(S^{(3)}) = 0$$

et

$$\text{mes}\, \mathsf{F}_4(S^{(2)}) = \text{mes}\, \mathsf{F}_3(S^{(2)}) = 0;$$

d'ailleurs $\mathsf{F}_4(x)$ est absolument continue dans chaque $\delta_n^{(3)}$ et constante dans les contigus $\delta_n^{(4)}$ à P_4.

Supposons que l'on a déjà construit les ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_m, P_{m+1}$, tels que

$$P_k = P_{k-1} + S^{(k)} \qquad (n = 2, 3, \ldots, m+1),$$

où

$$S^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(k)}$$

et $P_n^{(k)}$ est un ensemble parfait de mesure positive non dense contenu dans l'intervalle $\delta_n^{(k-1)}$ contigu à P_{k-1}, et que l'on a construit les fonctions continues

$$\mathsf{F}_1(x), \mathsf{F}_2(x), \ldots, \mathsf{F}_m(x),$$
$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_m(x),$$
$$\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots, \Psi_m(x);$$

supposons que l'on ait

$$\mathsf{F}_k(x) + \Phi_k(x) + \Psi_k(x) = F(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

et que, quel que soit $p = 0, 1, 2, \ldots,$

si $k = 3p + 1$

$$\mathsf{F}_{k+1}(x) = \mathsf{F}_k(x) + \omega_k(x),$$
$$\Phi_{k+1}(x) = \Phi_k(x),$$
$$\Psi_{k+1}(x) = \Psi_k(x) - \omega_k(x),$$

$\mathsf{F}_k(x)$ est absolument continue dans les $\delta_n^{(k-1)}$ et constante dans les $\delta_n^{(k)}$,

$$\text{mes}\, \Psi_k(S^{(k)}) = \text{mes}\, \Phi_k(S^{(k)}) = 0;$$

$\Phi_k(x)$ est absolument continue dans les $\delta_n^{(k)}$ et constante dans les $\delta_n^{(k+1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

si $k = 3p + 2$

$$\mathsf{F}_{k+1}(x) = \mathsf{F}_k(x) - \omega_k(x),$$
$$\Phi_{k+1}(x) = \Phi_k(x) + \omega_k(x),$$
$$\Psi_{k+1}(x) = \Psi_k(x),$$

$\Phi_k(x)$ est absolument continue dans les $\delta_n^{(k-1)}$ et constante dans les $\delta_n^{(k)}$,

$$\text{mes}\, \mathsf{F}_k(S^{(k)}) = \text{mes}\, \Psi_k(S^{(k)}) = 0,$$

$\Psi_k(x)$ est absolument continue dans les $\delta_n^{(k)}$ et constante dans les $\delta_n^{(k+1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

si $k = 3p + 3$

$$\mathsf{F}_{k+1}(x) = \mathsf{F}_k(x),$$
$$\Phi_{k+1}(x) = \Phi_k(x) - \omega_k(x),$$
$$\Psi_{k+1}(x) = \Psi_k(x) + \omega_k(x),$$

$\Psi_k(x)$ est absolument continue dans chaque $\delta_n^{(k-1)}$ et constante dans chaque $\delta_n^{(k)}$,

$$\text{mes}\, \Phi_k(S^{(k)}) = \text{mes}\, \mathsf{F}_k(S^{(k)}) = 0,$$

$\mathsf{F}_k(x)$ est absolument continue dans les $\delta_n^{(k)}$ et constante dans les $\delta_n^{(k+1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Quant à $\omega_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ on suppose que quelle que soit la forme de k, on a toujours

$$\omega_k(x) = 0 \qquad \text{dans } P_k,$$
$$|\omega_k(x)| < \frac{1}{2^{n+k}} \text{ dans } \delta_n^{(k)} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

d'où il résulte qu'on a toujours sur P_k

$$\mathsf{F}_{k+1}(x) = \mathsf{F}_k(x), \quad \Phi_{k+1}(x) = \Phi_k(x) \text{ et } \Psi_{k+1}(x) = \Psi_k(x).$$

Toutes ces conditions sont vérifiées si $p=0$, c'est-à-dire pour $k=1$, $k=2$, $k=3$.

Supposons qu'elles soient vérifiées quel que soit $k=1, 2, \ldots, m$ et démontrons qu'elles restent vraies pour $k=m+1$, et cela quelle que soit la forme de k, c'est-à-dire pour $k=3p+1$, $3p+2$, $3p+3$, quel que soit $p=1, 2, 3, \ldots$.

Supposons d'abord qu'on a $m=3p$, donc $m+1=3p+1$ $(p=1, 2, 3, \ldots)$.

Par hypothèse, on a

$$\text{mes}\, \Phi_m(S^{(m)}) = \text{mes}\, \mathsf{F}_m(S^{(m)}) = 0,$$

$\Psi_m(x)$ est absolument continue dans chaque $\delta_n^{(m-1)}$ et constante dans chaque $\delta_n^{(m)}$ et $\mathsf{F}_m(x)$ est absolument continue dans les $\delta_n^{(m)}$ et constante dans les $\delta_n^{(m+1)}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Considérons un intervalle $\delta_n^{(m)}$ contigu à P_m; il contient un ensemble parfait $P_n^{(m+1)}$, $\text{mes}\, P_n^{(m+1)} > 0$. D'après le corollaire du lemme précédent il existe un ensemble $Q_n^{(m+1)}$ contenant $P_n^{(m+1)}$, tel que la différence $Q_n^{(m+1)} - P_n^{(m+1)}$ est dans chaque contigu à $P_n^{(m+1)}$ un ensemble parfait de mesure positive, et deux fonctions continues $\Phi_n^{(m+1)}(x)$ et $\omega_n^{(m)}(x)$ telles que

$$\Phi_m(x) = \Phi_n^{(m+1)}(x) + \omega_n^{(m)}(x)$$

$$\text{mes}\, \Phi_n^{(m+1)}(P_n^{(m+1)}) = \text{mes}\, \omega_n^{(m)}(P_n^{(m+1)}) = 0,$$

que $\Phi_n^{(m+1)}(x)$ est absolument continue dans les contigus à $P_n^{(m+1)}$ et constante dans les contigus à $Q_n^{(m+1)}$, que

$$|\omega_n^{(m)}(x)| < \frac{1}{2^{m+n}} \quad \text{dans } \delta_n^{(m)}$$

et

$$\omega_n^{(m)}(x) = 0 \quad \text{aux extrémités de } \delta_n^{(m)}.$$

Posons

$$\Phi_{m+1}(x) = \Phi_m(x) \qquad \text{dans } P_m,$$

$$\Phi_{m+1}(x) = \Phi_n^{(m+1)}(x) \quad \text{dans les contigus } \delta_n^{(m)} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

On voit bien que pour

$$\omega_m(x) = \Phi_m(x) - \Phi_{m+1}(x),$$

on a

$$\omega_m(x) = 0 \quad \text{sur } P_m,$$

$$\omega_m(x) = \omega_n^{(m)}(x) \quad \text{dans } \delta_n^{(m)},$$

donc $\omega_m(x)$ est nulle aux extrémités des $\delta_n^{(m)}$ et elle est ainsi partout continue; donc il en est de même pour $\Phi_{m+1}(x)$.

D'ailleurs, puisque $\omega_m(x) = \omega_n^{(m)}(x)$ dans $\delta_n^{(m)}$, on a

$$|\omega_m(x)| < \frac{1}{2^{m+n}} \quad \text{dans } \delta_n^{(m)}.$$

Posons

$$\mathsf{F}_{m+1}(x) = \mathsf{F}_m(x),$$
$$\Psi_{m+1}(x) = \Psi_m(x) + \omega_m(x).$$

On a

$$\mathsf{F}_{m+1}(x) + \Phi_{m+1}(x) + \Psi_{m+1}(x) = \mathsf{F}_m(x) + \Phi_m(x) - \omega_m(x) + \Psi_m(x) + \omega_m(x)$$
$$= \mathsf{F}_m(x) + \Phi_m(x) + \Psi_m(x) = F(x).$$

Comme $\mathsf{F}_m(x)$ est absolument continue dans les $\delta_n^{(m)}$ et constante dans les $\delta_n^{(m+1)}$ et $\mathsf{F}_{m+1}(x) = \mathsf{F}_m(x)$, on voit bien que $\mathsf{F}_{m+1}(x)$ est absolument continue dans les $\delta_n^{(m)}$ et constante dans les $\delta_n^{(m+1)}$.

On a

$$\text{mes } \Phi_{m+1}(P_n^{(m+1)}) = \text{mes } \Phi_n^{(m+1)}(P_n^{(m+1)}) = 0$$

donc

$$\text{mes } \Phi_{m+1}(S^{(m+1)}) = 0$$

en désignant par $S^{(m+1)}$ la somme des $P_n^{(m+1)}$.

D'ailleurs $\Phi_{m+1}(x)$ est absolument continue dans les contigus à $P_{m+1} = P_m + S^{(m+1)}$ et constante dans les contigus à $P_{m+2} = P_{m+1} + H^{(m+1)}$, où $H^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_n^{(m+1)}$.

Ainsi toutes les conditions sont vérifiées pour $m+1$ quand elles sont vérifiées pour m, si m est de la forme $m = 3p$ $(p = 1, 2, \ldots)$.

On démontrera de même que toutes les conditions sont vérifiées pour $m+1$ si elles sont vérifiées pour $m = 3p+1$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Il suffira de remplacer dans le raisonnement précédent la lettre F par Φ, Φ par Ψ et Ψ par F. Enfin pour démontrer que les conditions sont vérifiées pour $m+1$ quand elles le sont pour $m = 3p+2$, il suffira de remplacer dans le raisonnement fait pour $m = 3p$ la lettre F par Ψ, Φ par F et Ψ par Φ (ou bien, ce qui revient au même, dans le raisonnement fait pour $m = 3p+1$ remplacer F par Φ, Φ par Ψ et Ψ par F).

Nous avons ainsi défini trois suites de fonctions continues

$$\mathsf{F}_1(x), \mathsf{F}_2(x), \ldots, \mathsf{F}_m(x), \ldots,$$
$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_m(x), \ldots,$$
$$\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots, \Psi_m(x), \ldots.$$

Elles sont uniformément convergentes. En effet, on a, quel que soit m,

$$|\mathsf{F}_{m+1}(x) - \mathsf{F}_m(x)| \leqq |\omega_m(x)|,$$
$$|\Phi_{m+1}(x) - \Phi_m(x)| \leqq |\omega_m(x)|,$$
$$|\Psi_{m+1}(x) - \Psi_m(x)| \leqq |\omega_m(x)|.$$

Or, $\omega_m(x) = 0$ sur P_m et $|\omega_m(x)| < \frac{1}{2^{m+n}}$ dans $\delta_n^{(m)}$, donc

$$|\omega_m(x)| < \frac{1}{2^{m+1}}$$

d'où il résulte que les trois suites convergent absolument et uniformément vers des limites continues $\mathsf{F}(x)$, $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$.

Puisque

$$F(x) = \mathsf{F}_m(x) + \Phi_m(x) + \Psi_m(x) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

on a

$$F(x) = \mathsf{F}(x) + \Phi(x) + \Psi(x).$$

Nous allons démontrer que chacune de ces fonctions est une superposition de deux fonctions absolument continues.

Quel que soit m, on peut écrire

$$\mathsf{F}(x) = \mathsf{F}_m(x) + [\mathsf{F}_{m+1}(x) - \mathsf{F}_m(x)] + \ldots + [\mathsf{F}_{m+p+1}(x) - \mathsf{F}_{m+p}(x)] + \ldots$$

donc

$$\mathsf{F}(x) = \mathsf{F}_m(x) + \alpha_m \omega_m(x) + \ldots + \alpha_{m+p}\omega_{m+p}(x) + \ldots$$

où les α_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont des constantes dont chacune est égale à $-1, 0$ ou $+1$.

On a de même

$$\Phi(x) = \Phi_m(x) + \beta_m \omega_m(x) + \ldots + \beta_{m+p}\omega_{m+p}(x) + \ldots$$

et

$$\Psi(x) = \Psi_m(x) + \gamma_m \omega_m(x) + \ldots + \gamma_{m+p}\omega_{m+p}(x) + \ldots$$

où les β et les γ sont encore susceptibles de prendre les valeurs $-1, 0$ et $+1$, suivant le cas.

Il en résulte que

$$\mathsf{F}(x) = \mathsf{F}_m(x) + R_m^{(1)}(x), \quad \Phi(x) = \Phi_m(x) + R_m^{(2)}(x), \quad \Psi(x) = \Psi_m(x) + R_m^{(3)}(x),$$

où $R_m^{(1)}(x)$, $R_m^{(2)}(x)$ et $R_m^{(3)}(x)$ vérifient les conditions du lemme du n° 12. Donc, en vertu de ce lemme, on a

$$R_m^{(1)}(x) = R_m^{(2)}(x) = R_m^{(3)}(x) = 0 \quad \text{sur} \quad P_m$$

et chacune de ces fonctions a une dérivée nulle presque partout sur P_m. D'ailleurs on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{osc}_{\delta_n^{(m)}} R_m^{(1)}(x) < \frac{1}{2^{m-2}}$$

et la même inégalité pour $R_m^{(2)}$ et $R_m^{(3)}$.

Il en résulte d'abord que

$$\mathsf{F}(x) = \mathsf{F}_m(x), \quad \Phi(x) = \Phi_m(x), \quad \Psi(x) = \Psi_m(x) \quad \text{sur} \quad P_m$$

d'où l'on conclut immédiatement que, quel que soit $p = 0, 1, 2, \ldots$, on a,

$$\begin{aligned} &\text{si } m = 3p+1 \quad \text{mes } \Psi(S^{(m)}) = \text{mes } \Phi(S^{(m)}) = 0,\\ &\text{si } m = 3p+2 \quad \text{mes } \mathsf{F}(S^{(m)}) = \text{mes } \Psi(S^{(m)}) = 0,\\ &\text{si } m = 3p+3 \quad \text{mes } \Phi(S^{(m)}) = \text{mes } \mathsf{F}(S^{(m)}) = 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs, si $m = 3p+1$, $\mathsf{F}_m(x)$ est absolument continue dans chaque $\delta_n^{(m-1)}$, donc elle a une dérivée presque partout sur $S^{(m)}$ et jouit de la propriété N sur cet ensemble. Il suit des propriétés indiquées de $R_m^{(1)}(x)$ et de l'égalité $\mathsf{F}(x) = \mathsf{F}_m(x) + R_m^{(1)}(x)$ que $\mathsf{F}(x)$ a une dérivée presque partout sur $S^{(m)}$ et jouit de la propriété N sur cet ensemble.

On démontre de même que $\Phi(x)$ a une dérivée presque partout sur $S^{(m)}$ et jouit de la propriété N sur $S^{(m)}$ pour $m = 3p+2$ et qu'il en est de même pour $\Psi(x)$ quand $m = 3p+3$. Soit E l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucun des ensembles $P_1, S^{(2)}, \ldots, S^{(m)}, \ldots$.

La fonction $\mathsf{F}(x)$ peut ne pas avoir de dérivée sur les $S^{(m)}$ pour $m = 3p+2$ et $m = 3p+3$, sur E et sur un ensemble e_1 de mesure nulle contenu dans la somme des $S^{(m)}$ pour tous les m de la forme $m = 3p+1$.

Puisque

$$\text{mes } \mathsf{F}(S^{(m)}) = 0$$

quand $m = 3p+2$ ou $3p+3$ et puisque $\mathsf{F}(x)$ jouit de la propriété N sur les $S^{(m)}$ pour $m = 3p+1$, donc mes $\mathsf{F}(e_1) = 0$, il suffira de démontrer que mes $\mathsf{F}(\mathsf{E}) = 0$ pour voir que $\mathsf{F}(x)$ est une superposition de fonctions absolument continues.

De même, en remarquant que

$$\text{mes } \Phi(S^{(m)}) = 0$$

pour $m = 3p+1$ et $m = 3p+3$ et que $\Phi(x)$ est presque partout dérivable sur les $S^{(m)}$ pour $m = 3p+2$ et jouit de la propriété N sur ces ensembles, il suffit de démontrer que mes $\Phi(\mathsf{E}) = 0$ pour voir que $\Phi(x)$ est une superposition de fonctions absolument continues.

Enfin

$$\text{mes } \Psi(S^{(m)}) = 0$$

pour $m = 3p+1$ et $m = 3p+2$ et $\Psi(x)$ est presque partout dérivable et jouit de la propriété N pour les $S^{(m)}$ quand $m = 3p+3$, donc il ne reste qu'à démontrer l'égalité mes $\Psi(\mathsf{E}) = 0$ pour voir que $\Psi(x)$ est une superposition de fonctions absolument continues.

Or, on sait que

$$\mathsf{F}(x) = \mathsf{F}_m(x) + R_m^{(1)}(x)$$

et que pour $m = 3p+1$ la fonction $\mathsf{F}_m(x)$ est constante dans les contigus $\delta_n^{(m)}$ à P_m.

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(m)}}{\mathrm{osc}}\, \mathsf{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(m)}}{\mathrm{osc}}\, R_m^{(1)}(x) < \frac{1}{2^{m-2}}$$

et comme $\mathrm{mes}\, \mathsf{F}(\mathsf{E}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\delta_n^{(m)}}{\mathrm{osc}}\, \mathsf{F}(x)$ pour chaque m et, en particulier, pour tous les $m = 3p+1$, on a

$$\mathrm{mes}\, \mathsf{F}(\mathsf{E}) < \frac{1}{2^{3p-1}} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

donc

$$\mathrm{mes}\, \mathsf{F}(\mathsf{E}) = 0.$$

Pour démontrer les égalités $\mathrm{mes}\, \Phi(\mathsf{E}) = 0$ et $\mathrm{mes}\, \Psi(\mathsf{E}) = 0$ il suffirait de remplacer $m = 3p+1$ par $m = 3p+2$ et $m = 3p+3$ respectivement, la lettre F par Φ et Ψ respectivement et enfin $R_m^{(1)}$ par $R_m^{(2)}$ ou $R_m^{(3)}$. Ceci achève la démonstration du théorème, c. q. f. d.

II. Les transformations monotones.

23. Généralités. — Le théorème fondamental sur la représentation de chaque fonction continue sous forme d'une somme de trois superpositions de fonctions absolument continues résoud complètement le problème de la représentation des fonctions continues au moyen de fonctions *absolument continues*.

Il est très naturel maintenant de poser le problème sur la représentation des fonctions continues au moyen de fonctions *à variation bornée* les plus générales. Dans le présent Mémoire nous ne nous proposons pas de donner une solution complète de ce problème. Nous allons donner ici quelques résultats particuliers qui s'y rattachent. En considérant ces résultats comme une introduction à la solution complète du problème de la représentation des fonctions continues au moyen de fonctions à variation bornée, nous allons indiquer quelques formes mixtes, c'est-à-dire des représentations de fonctions continues au moyen de fonctions absolument continues et à variation bornée simultanément.

L'intérêt de la représentation des fonctions continues au moyen de fonctions à variation bornée tient à ce que le nombre de ces dernières est réduit en comparaison avec le cas des fonctions absolument continues. En effet nous allons démontrer qu'au lieu de *trois* il suffira de prendre la somme de *deux* superpositions de fonctions à variation bornée pour obtenir la représentation d'une fonction continue arbitraire.

Les premiers problèmes qu'on rencontre dans cette voie sont naturellement les suivants. Tout d'abord, on sait qu'il est inutile de considérer des superpositions de trois fonctions absolument continues puisqu'elles se réduisent à celles de deux fonctions de la même nature. D'une manière

analogue, il serait intéressant de démontrer que les superpositions de plusieurs fonctions à variation bornée n'ont un sens que jusqu'à une certaine limite; cette limite dépassée, les superpositions multiples ne donnent rien de nouveau. D'autre part, il y a des raisons à croire qu'une superposition double $f[\varphi(x)]$ de fonctions à variation bornée ne peut représenter une fonction continue arbitraire, mais il est probable que toute fonction continue peut être mise sous la forme d'une superposition triple $f\{\varphi[\psi(x)]\}$ de fonctions à variation bornée.

Ces problèmes intéressants sont ceux qu'on rencontre les premiers dans la voie indiquée. Dans ce Mémoire nous ne donnons pas leurs solutions, mais nous allons considérer d'abord quelques cas particuliers de superpositions et indiquer ensuite une méthode de déformation des axes de coordonnées qui nous amènera aux formes mixtes.

24. Théorèmes préliminaires. — Le but de ce paragraphe est de donner la démonstration de quelques propositions qui serviront de base à la méthode de déformation des axes de coordonnées ainsi qu'à la considération des fonctions de la forme $f[\varphi(x)]$, f étant monotone et φ à variation bornée.

Nous commençons par la démonstration du lemme

Lemme. — *Étant donné un ensemble parfait non dense et d'ailleurs quelconque P situé sur le segment $[0, 1]$ de l'axe OT, les nombres a et b étant quelconques, pourvu que $a < b$, et ε_n étant des nombres arbitrairement petits mais fixes $(n = 1, 2, \ldots)$, il existe une fonction continue et croissante $x = \varphi(t)$ telle que*

$$\varphi(0) = a, \quad \varphi(1) = b,$$
$$\varphi(b_n) - \varphi(a_n) \leqq \varepsilon_n,$$

où (a_n, b_n) sont les contigus à P $(n = 1, 2, \ldots)$.

Supposons d'abord que $\operatorname{mes} P > 0$. Si nous réussissons à résoudre le problème pour une suite $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ telle que $\eta_n < \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, il est a fortiori résolu pour la suite ε_n. Nous pouvons donc supposer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < b - a,$$

car dans le cas contraire nous n'aurions qu'à prendre des η_n vérifiant cette condition et tels que $\eta_n < \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Soit

$$\alpha = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{b - a};$$

on a donc $\alpha > 0$.

Posons

$$g(t) = \frac{\alpha}{\operatorname{mes} P} \quad \text{sur} \quad P,$$

$$g(t) = \frac{\varepsilon_n}{(b-a)\,\delta_n} \quad \text{sur} \quad \delta_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

où $\delta_n = (a_n, b_n)$ est un contigu à P.

On voit bien que $g(t)$ est sommable puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(b-a)\,\delta_n} \cdot \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{b-a} = 1 - \alpha.$$

D'ailleurs on a

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\delta_n} g(t)\,dt + \int_P g(t)\,dt = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\operatorname{mes} P} \operatorname{mes} P = 1.$$

En posant

$$\varphi(t) = a + (b-a) \int_0^t g(t)\,dt$$

on voit que $\varphi(t)$ est absolument continue et d'ailleurs croissante puisque $g(t)$ est partout positive; on a évidemment

$$\varphi(0) = a, \qquad \varphi(1) = b.$$

Or

$$\varphi(b_n) - \varphi(a_n) = (b-a) \int_{a_n}^{b_n} g(t)\,dt = (b-a) \frac{\varepsilon_n}{(b-a)\,\delta_n} \delta_n = \varepsilon_n,$$

donc, pour le cas où $\operatorname{mes} P > 0$, le lemme est démontré.

Si $\operatorname{mes} P = 0$, on remarque que tous les ensembles parfaits non denses sont semblables[5]). Il existe donc une fonction continue et croissante $u = \omega(t)$, $\omega(0) = 0$, $\omega(1) = 1$, telle que les valeurs de $\psi(t)$ sur P forment un ensemble Q, $\operatorname{mes} Q > 0$. Soit δ_n' l'intervalle contigu à Q qui correspond à δ_n. Nous venons de démontrer qu'il existe une fonction continue et croissante $x = \varphi(u)$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, telle que

$$\varphi(b_n') - \varphi(a_n') \leqq \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où $\delta_n' = (a_n', b_n')$.

Posons

$$\psi(t) = \varphi[\omega(t)].$$

On voit bien que $\psi(t)$ est continue et croissante, que $\psi(0) = a$, $\psi(1) = b$ et que

$$\psi(b_n) - \psi(a_n) = \varphi(b_n') - \varphi(a_n') \leqq \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ce qui achève la démonstration du lemme, c. q. f. d.

---

[5]) Voir par exemple Ch. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse 1, 3e édition, p. 55.

Ce lemme nous permet de démontrer un théorème, qui sera utile chaque fois qu'on aura à faire la transformation d'un ensemble, qui est non dénombrable dans chaque intervalle, en un ensemble de mesure égale à 1 par une transformation biunivoque et bicontinue d'un segment en lui-même.

Théorème. — *Soit*

$$P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$$

une suite d'ensembles parfaits non denses situés dans le segment $[0, 1]$ *de l'axe* OT *et tels que*

$$P_{m+1} = P_m + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(m+1)} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

où $P_k^{(m+1)}$ *est un ensemble parfait non dense situé dans l'intervalle* $\delta_n^{(m)}$ *contigu à* P_m. *On suppose d'ailleurs que la somme* $\sum_{m=1}^{\infty} P_m$ *est partout dense dans* $[0, 1]$.

Dans ces conditions, quels que soient les nombres $\varepsilon_n^{(m)}$ $(n = 1, 2, \ldots;$ $m = 1, 2, \ldots)$, *il existe une fonction continue et croissante* $x = \varphi(t)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ *telle que pour les contigus* $\delta_n^{(m)} = (a_n^{(m)}, b_n^{(m)})$ *on a*

$$\varphi(b_n^{(m)}) - \varphi(a_n^{(m)}) < \varepsilon_n^{(m)} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Remarquons d'abord que si le théorème est démontré pour des $\eta_n^{(m)}$ tels que $\eta_n^{(m)} < \varepsilon_n^{(m)}$, il l'est *a fortiori* pour les $\varepsilon_n^{(m)}$. Donc, on peut supposer la série double

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(m)}$$

convergente, car dans le cas contraire on remplacerait les $\varepsilon_n^{(m)}$ par des nombres $\eta_n^{(m)}$ tels que $\eta_n^{(m)} < \varepsilon_n^{(m)}$, et qui vérifient cette condition.

En vertu du lemme précédent il existe une fonction continue et croissante $\varphi_1(t)$, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(1) = 1$, telle que

$$\varphi_1(b_n^{(1)}) - \varphi_1(a_n^{(1)}) < \varepsilon_n^{(1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Posons $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$ sur P_1 et aux points 0 et 1; $\varphi_2(t)$ est donc ainsi définie en particulier aux extrémités $a_n^{(1)}$ et $b_n^{(1)}$ de chaque $\delta_n^{(1)}$. Par hypothèse, $P_n^{(2)}$ est un ensemble parfait non dense situé dans $\delta_n^{(1)}$. En vertu du même lemme, on peut définir $\varphi_2(t)$ dans $\delta_n^{(1)}$ de telle manière qu'elle soit continue et croissante, égale a $\varphi_1(a_n^{(1)})$ et $\varphi_1(b_n^{(1)})$ dans $a_n^{(1)}$ et $b_n^{(1)}$ respectivement et que les différences de ses valeurs aux extrémités des contigus à $P_n^{(2)}$ soient aussi petites que l'on voudra.

En remarquant que les contigus à chaque $P_n^{(2)}$ sont en même temps les contigus à P_2 et en faisant une pareille construction dans chaque $\delta_n^{(1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ on voit bien qu'on peut obtenir une fonction $\varphi_2(t)$ con-

tinue et croissante telle que

$$\varphi_2(b_n^{(2)}) - \varphi_2(a_n^{(2)}) < \varepsilon_n^{(2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Supposons que les fonctions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ ont déjà été définies, qu'elles sont continues, croissantes, que l'on a

$$\varphi_k(0) = 0, \quad \varphi_k(1) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\varphi_{k+1}(t) = \varphi_k(t) \quad \text{sur} \quad P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

et que

$$\varphi_k(b_n^{(k)}) - \varphi_k(a_n^{(k)}) < \varepsilon_n^{(k)} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, m \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Posons $\varphi_{m+1}(t) = \varphi_m(t)$ sur P_m et aux points 0 et 1. En vertu du lemme précédent on peut définir $\varphi_{m+1}(t)$ sur chaque $\delta_n^{(m)}$ contigu à P_m comme une fonction continue et croissante prenant aux extrémités $a_n^{(m)}$ et $b_n^{(m)}$ de $\delta_n^{(m)}$ les valeurs $\varphi_m(a_n^{(m)})$ et $\varphi_m(b_n^{(m)})$ et telle que les différences de ses valeurs aux extrémités des contigus à l'ensemble $P_n^{(m+1)}$ situé dans $\delta_n^{(m)}$ soient aussi petites que l'on voudra. Comme les contigus à chaque $P_n^{(m+1)}$ sont en même temps les contigus à P_{m+1}, on voit bien qu'on peut définir $\varphi_{m+1}(t)$ de telle manière que l'on ait

$$\varphi_{m+1}(b_n^{(m+1)}) - \varphi_{m+1}(a_n^{(m+1)}) < \varepsilon_n^{(m+1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ainsi la fonction $\varphi_{m+1}(t)$ est encore continue croissante, $\varphi_{m+1}(0) = 0$, $\varphi_{m+1}(1) = 1$ et elle vérifie les inégalités nécessaires.

Ceci étant, considérons la suite des fonctions continues et croissantes

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t), \ldots.$$

Cette suite est uniformément convergente. En effet, la différence

$$|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)|,$$

qui est nulle sur P_m, vérifie dans chaque $\delta_n^{(m)}$ l'inégalité

$$|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)| < \varphi_m(b_n^{(m)}) - \varphi_m(a_n^{(m)}) < \varepsilon_n^{(m)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

puisque $\varphi_{m+1}(t)$ et $\varphi_m(t)$ sont monotones et coïncident pour $a_n^{(m)}$ et $b_n^{(m)}$.

Donc, on a partout dans $(0, 1)$

$$|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)| < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(m)}$$

et comme nous avons supposé la série à double entrée $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(m)}$ convergente, il en résulte que la suite $\varphi_m(t)$ converge uniformément.

Posons

$$\varphi(t) = \lim_{m \to \infty} \varphi_m(t).$$

La fonction $\varphi(t)$ est donc continue et l'on a évidemment $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

Puisque toutes les $\varphi_m(t)$ sont croissantes, $\varphi(t)$ est évidemment non décroissante. Mais en démontre aussitôt qu'elle est essentiellement croissante. En effet, s'il n'en était pas ainsi, elle serait constante dans un certain intervalle δ. Or, la somme $\sum_{m=1}^{\infty} P_m$ étant supposée partout dense et chaque ensemble P_m étant contenu dans P_{m+1}, on voit bien qu'il existe un nombre m assez grand pour que δ contienne des points de P_m. Soit t_1 et t_2 deux points de P_m contenus dans δ, on suppose $t_1 < t_2$. La fonction $\varphi_m(t)$ étant croissante, on a

$$\varphi_m(t_1) < \varphi_m(t_2).$$

Comme sur P_m on a $\varphi_{m+1}(t) = \varphi_m(t)$ et, d'une manière générale $\varphi_{m+p}(t) = \varphi_m(t)$ quel que soit $p = 1, 2, \ldots$, puisque P_{m+p} contient P_m quel que soit p, il en résulte que $\varphi(t) = \varphi_m(t)$ sur P_m. Donc $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ ce qui contredit à l'hypothèse que $\varphi(t)$ est constante sur δ.

Donc $\varphi(t)$ est croissante.

Et comme $\varphi(t) = \varphi_m(t)$ sur P_m, on a

$$\varphi(b_n^{(m)}) - \varphi(a_n^{(m)}) < \varepsilon_n^{(m)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ce qui achève la démonstration du théorème, c. q. f. d.

Voici une conséquence immédiate du théorème précédent: *si* E *est un ensemble mesurable B situé dans le segment* $[0, 1]$ *de l'axe* OT *et non dénombrable dans chaque intervalle* δ *intérieur à* $[0, 1]$ *il existe une fonction* $x = \varphi(t)$ *continue et croissante telle que* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ *et que*

$$\operatorname{mes} \varphi(\mathsf{E}) = 1.$$

En d'autres termes, on peut faire une transformation biunivoque et bicontinue du segment $[0, 1]$ en lui même de telle manière que E se transforme en un ensemble de mesure égale à 1.

Pour le voir, il suffit de rappeller que, d'après un théorème connu de MM. Hausdorff et Alexandroff, chaque ensemble non dénombrable mesurable B contient un ensemble parfait.

Donc E contient un ensemble parfait P_1; dans chaque contigu $\delta_n^{(1)}$ à P_1 l'ensemble E est par hypothèse non dénombrable; soient $P_n^{(2)}$ les ensembles parfaits contenus dans E et tels que $P_n^{(2)}$ est situe dans $\delta_n^{(1)}$; on désigne par P_2 la réunion de P_1 et de $\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(2)}$, on prend dans chaque contigu $\delta_n^{(2)}$ à P_2 un ensemble parfait $P_n^{(3)}$ contenu dans E et on continue ainsi indéfiniment.

On choisit ensuite des nombres $\varepsilon_n^{(m)}$ tels que la série double $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(m)}$ converge et on construit une fonction $\varphi(t)$ vérifiant les conditions du théorème précédent.

Soit E l'ensemble des points n'appartenant pas à $\varphi(P_m)$ quel que soit m. Il est facile à voir que

$$\operatorname{mes} E = 0.$$

En effet, si E n'appartient pas à $\varphi(P_m)$ il est contenu dans les contigus à cet ensemble. Or, puisque

$$\varphi(b_n^{(m)}) - \varphi(a_n^{(m)}) < \varepsilon_n^{(m)}$$

où $(a_n^{(m)}, b_n^{(m)})$ est le n-ième contigu à P_m, on voit bien que le n-ième intervalle contigu à $\varphi(P_m)$ est inférieur à $\varepsilon_n^{(m)}$. Donc

$$\operatorname{mes} E < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(m)}.$$

Cette inégalité étant vraie quel que soit m, et comme la série double $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(m)}$ converge, il en résulte immédiatement $\operatorname{mes} E = 0$.

Or, la somme des P_m est contenue dans E. Donc, quel que soit m, $\varphi(P_m)$ est contenu dans $\varphi(\mathsf{E})$. Nous venons de démontrer que l'ensemble E des points qui n'appartiennent pas à $\varphi(P_m)$, quel que soit m, est de mesure nulle. Donc, $\operatorname{mes} \varphi(P_m)$ tend vers 1 quand m croît indéfiniment. Il en résulte

$$\operatorname{mes} \varphi(\mathsf{E}) = 1,$$

c. q. f. d.

25. Les transformations des fonctions à variation bornée. — Nous passons maintenant à l'étude des fonctions qu'on obtient à partir des fonctions à variation bornée après avoir fait une déformation monotone de l'axe OY. En d'autres termes, nous allons considérer les fonctions de la forme $f[\varphi(x)]$, f étant monotone et φ à variation bornée, et poser le problème quelles sont les fonctions continues que l'on peut représenter dans cette forme.

Le premier cas que nous allons considérer est celui où la fonction f est monotone et telle que son inverse est absolument continue, et la fonction $\varphi(x)$ est absolument continue.

Dans tous les cas que nous étudierons, nous donnerons une solution complète du problème particulier posé en indiquant une condition nécessaire et suffisante.

Nous commençons par démontrer le théorème suivant:

Théorème I. — *Soit $F(x)$ une fonction continue,* E *l'ensemble des points où sa dérivée $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie et $E = F(\mathsf{E})$. Pour qu'il existe une fonction $g(y)$ absolument continue et croissante telle que la fonction composée*

$$\varphi(x) = g[F(x)]$$

soit absolument continue, il faut et il suffit que dans chaque intervalle δ de l'axe OY la partie de E contenue dans δ soit de mesure inférieure à la longueur de δ.

La condition est nécessaire. — Soit δ un intervalle de l'axe OY et E_δ la partie de E contenue dans δ. Supposons que

$$\operatorname{mes} E_\delta = \operatorname{mes} \delta .$$

Nous avons d'après l'hypothèse faite

$$F(x) = \mathsf{F}[\varphi(x)]$$

où $\varphi(x)$ est absolument continue et $\mathsf{F}(u)$ une fonction croissante dont l'inverse $u = g(y)$ est absolument continue. Soit e l'ensemble des points où $\varphi'(x)$ n'existe pas et $e' = \varphi(e)$; on a

$$\operatorname{mes} e = 0$$

donc

$$\operatorname{mes} e' = 0 .$$

Soit $\bar{e}'$ l'ensemble des points u pour lesquels $\mathsf{F}'(u)$ n'existe pas et $\bar{e}$ l'ensemble des points x pour leusqels $\varphi(x)$ appartient à $\bar{e}'$; on a $\operatorname{mes} \bar{e}' = 0$.

L'ensemble E des points où $F'(x)$ n'existe pas est éyidemment contenu dans $e + \bar{e}$. En effet, si x_0 n'apparient ni a e, ni a $\bar{e}$, en posant $u_0 = \varphi(x_0)$, on a

$$F'(x) = \mathsf{F}'(u_0)\varphi'(x_0)$$

donc x_0 n'appartient pas à E.

On a

$$E = F(\mathsf{E}) = \mathsf{F}[\varphi(\mathsf{E})]$$

et comme E est contenu dans $e + \bar{e}$, $\varphi(\mathsf{E})$ est contenu dans $e' + \bar{e}'$, donc

$$\operatorname{mes} \varphi(\mathsf{E}) = 0$$

puisque $\operatorname{mes} e' = \operatorname{mes} \bar{e}' = 0$.

En posant $\mathsf{E}' = \varphi(\mathsf{E})$, on voit que

$$\mathsf{E}' = g(E)$$

puisque $E = \mathsf{F}(\mathsf{E}')$ et $g(y)$ est la fonction inverse de $\mathsf{F}(u)$.

Nous avons supposé que dans un intervalle δ de l'axe OY on a $\operatorname{mes} E_\delta = \operatorname{mes} \delta$. Comme $g(E_\delta)$ est contenu dans $g(E)$, donc dans E' et comme $\operatorname{mes} \mathsf{E}' = 0$, on a

$$\operatorname{mes} g(E_\delta) = 0 ;$$

d'ailleurs, comme $\operatorname{mes}(\delta - E_\delta) = 0$, on a de même

$$\operatorname{mes} g(\delta - E_\delta) = 0 ,$$

puisque $g(y)$ est absolument continue. Donc

$$\operatorname{mes} g(\delta) = 0 ,$$

ce qui prouve que $g(y)$ est constante dans δ. Or ceci est impossible puisque nous avons supposé que $g(y)$ est croissante (c. q. f. d.).

La condition est suffisante. — Supposons que l'on ait dans chaque intervalle δ de l'axe OY l'inégalité

$$\operatorname{mes} E_\delta < \operatorname{mes} \delta.$$

Soit $\omega(y)$ une fonction définie par les conditions

$$\omega(y) = 0 \quad \text{sur} \quad E,$$
$$\omega(y) = 1 \quad \text{en dehors de } E.$$

Cette fonction est bornée et non négative. Posons

$$\psi(y) = \int_m^y \omega(y)\,dy,$$

m étant le minimum de $F(x)$. Cette fonction est absolument continue et croissante. En effet, elle ne peut être décroissante puisque $\omega(y)$ est non négative. Elle ne peut être constante puisque dans chaque intervalle δ de l'axe OY l'ensemble $\delta - E_\delta$ est de mesure positive et sur cet ensemble $\omega(y) = 1$.

Posons

$$\Phi(x) = \psi[F(x)].$$

Soit E' l'ensemble des points où $\Phi'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie. On voit que si $\bar{e}$ est l'ensemble des points y, où $\psi'(y)$ n'existe pas ou n'est pas finie et e l'ensemble des points x pour lesquels $F(x)$ appartient à $\bar{e}$, E' est contenu dans $e + \mathsf{E}$. Donc $F(\mathsf{E}')$ est contenu dans $\bar{e} + E$ et $\Phi(\mathsf{E}')$ contenu dans $\psi(\bar{e}) + \psi(E)$. Or $\operatorname{mes} \bar{e} = 0$, donc $\operatorname{mes} \psi(\bar{e}) = 0$ puisque ψ est absolument continue. D'autre part, comme $\omega(y) = 0$ sur E, on a

$$\operatorname{mes} \psi(E) = 0.$$

Donc

$$\operatorname{mes} \Phi(\mathsf{E}') = 0.$$

Donc $\Phi(x)$ est une superposition de fonctions absolument continues. Plus précisément, il existe[6]) une fonction absolument continue croissante, et même à nombres dérivés bornés $f(u)$ telle que

$$\varphi(x) = f[\Phi(x)]$$

est absolument continue. Or, on a

$$\varphi(x) = f\{\psi[\mathsf{F}(x)]\} = g[F(x)]$$

[6]) Voir à la fin du n° 5 un théorème qui se déduit du théorème fondamental sur les superpositions de fonctions absolument continues.

où $g(y)$ est croissante puisque f et ψ le sont, et même à nombres dérivés bornés, car il en est de même pour f et ψ, c. q. f. d.

Il est à remarquer que *la fonction $g(y)$ est à nombres dérivés bornés*, ce qui nous sera utile dans la suite.

Remarquons encore que si $m \leqq F(x) \leqq M$, on peut toujours supposer $g(m) = m$ et $g(M) = M$. En effet, si $g(y)$ est une fonction croissante à nombres dérivés bornés et telle que

$$\varphi(x) = g[F(x)]$$

est absolument continue, si $g(m) = \alpha$, $g(M) = \beta$, il suffit de poser

$$\bar{g}(y) = \frac{1}{\beta - \alpha}[(M - m)g(y) + m\beta - M\alpha]$$

pour avoir une fonction $\bar{g}(y)$ croissante, à nombres dérivés bornés, telle que $\bar{g}(m) = m$, $\bar{g}(M) = M$ et que la fonction

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{g}[F(x)]$$

est encore absolument continue. En effet, on a

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{M - m}{\beta - \alpha}\varphi(x) + C^{te}.$$

Enfin, il nous reste à remarquer que pour l'ensemble E des points où la dérivée $F'(x)$ n'existe pas, on a

$$\operatorname{mes} \bar{\varphi}(\mathsf{E}) = 0.$$

En effet comme $\omega(y) = 0$ sur E, on a $\operatorname{mes} \psi(E) = 0$ donc

$$\operatorname{mes} \Phi(\mathsf{E}) = \operatorname{mes} \psi[F(\mathsf{E})] = \operatorname{mes} \psi(E) = 0.$$

Or $\varphi(x) = f[\Phi(x)]$ et f est absolument continue. Donc

$$\operatorname{mes} \varphi(\mathsf{E}) = \operatorname{mes} f[\Phi(\mathsf{E})] = 0$$

enfin, en vertu de l'égalité $\bar{\varphi}(x) = A\varphi(x) + B$ où A et B sont des constantes, on a de même

$$\operatorname{mes} \bar{\varphi}(\mathsf{E}) = 0.$$

En réunissant toutes les remarques faites, on peut dire que *si $F(x)$ est une fonction continue, $m \leqq F(x) \leqq M$, si E est l'ensemble des points où $F'(x)$ n'existe pas où n'est pas finie, $E = F(\mathsf{E})$ et l'ensemble E est dans chaque intervalle δ de l'axe OY de mesure inférieure à la longueur de cet intervalle, il existe une fonction continue $g(y)$ croissante et à nombres dérivés bornés, telle que $g(m) = m$, $g(M) = M$ et que la fonction*

$$\varphi(x) = g[F(x)]$$

est absolument continue; d'ailleurs

$$\operatorname{mes} \varphi(\mathsf{E}) = 0.$$

C'est dans cette forme que nous aurons à appliquer ce théorème dans la suite.

On voit bien que le théorème I pourrait être énoncé dans la forme suivante.

Pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit représentable dans la forme

$$F(x) = \mathsf{F}[\varphi(x)],$$

F étant une fonction monotone dont l'inverse est absolument continue et $\varphi(x)$ une fonction absolument continue, il faut et il suffit que $F(x)$ vérifie la condition suivante: si E est l'ensemble des points où $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie et $E = F(\mathsf{E})$, dans chaque intervalle δ de l'axe OY la partie de E contenue dans δ est de mesure inférieure à la longueur de δ.

Nous passons maintenant à la considération du cas où dans la superposition $f[\Phi(x)]$ la fonction f est monotone et absolument continue tandis que la fonction $\Phi(x)$ est à variation bornée. Afin d'obtenir la condition nécessaire et suffisante pour la représentation d'une fonction continue dans cette forme, nous avons besoin d'un théorème de M. Banach[7]) sur les fonctions à variation bornée.

Etant donnée une fonction continue quelconque $y = f(x)$, M. Banach désigne par le symbole $N(t, f)$ ou brièvement par $N(t)$ le nombre des racines x de l'équation $t = f(x)$, s'il est fini, et le nombre $+\infty$ dans le cas contraire. M. Banach démontre le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit à variation bornée est que $N(t)$ soit intégrable au sens de M. Lebesgue. Si $f(x)$ est à variation bornée, la variation totale de $f(x)$ est égale à $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} N(t)\,dt$.

Voici la démonstration de M. Banach. Soit $f(x)$ une fonction continue definie dans un intervalle (a, b). Divisons cet intervalle en 2^p parties égales (p étant un entier positif quelconque). Désignons par δ_k l'intervalle

$$a + (k-1)\frac{b-a}{2^p} < x \leqq a + k\frac{b-a}{2^p} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2^p).$$

Posons $L_k(t) = 1$ ou $L_k(t) = 0$ suivant que $f(x)$ prend ou non la valeur t dans l'intervalle δ_k, et soit

$$N_p(t) = L_1(t) + L_2(t) + \ldots + L_{2^p}(t).$$

Ainsi $N_p(t)$ est le nombre de tous les intervalles δ_k dans lesquels $f(x)$ prend la valeur t (au moins une fois).

---

[7]) S. Banach, *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* (*Fundam. Math.* 7, p. 225—236.)

Il est évident que

$$N_m(t) \leqq N_n(t) \quad \text{si} \quad m < n,$$

d'où résulte l'existence de la limite

$$\lim_{p \to \infty} N_p(t) = \bar{N}(t).$$

Nous allons démontrer que $N(t) = \bar{N}(t)$. En effet, t étant un nombre réel donné et m un entier positif $\leqq N(t)$, il résulte de la définition de $N(t)$ qu'il existe m points $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ de (a, b) tels que $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_m) = t$.

Si d est le plus petit des $m - 1$ nombres

$$x_{k+1} - x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m - 1)$$

on a évidemment pour tout p naturel tel que $\frac{1}{2^p} < d$ l'inégalité

$$N_p(t) \geqq m,$$

donc $\bar{N}(t) \geqq m$. Or, m étant un entier positif quelconque $\leqq N(t)$, il en résulte $\bar{N}(t) \geqq N(t)$.

D'autre part, on a évidemment $N_p(t) \leqq N(t)$ pour chaque entier positif p, donc $\bar{N}(t) \leqq N(t)$.

Ainsi nous avons démontré que $\bar{N}(t) = N(t)$, et $\bar{N}(t)$ étant évidemment mesurable d'après sa définition même, il en est de même pour $N(t)$.

Cela posé remarquons que si m_k et M_k désignent le minimum et le maximum de $f(x)$ dans l'intervalle δ_k, on a évidemment

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_k(t)\, dt = M_k - m_k.$$

Il en résulte aussitôt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_p(t)\, dt = \sum_{k=1}^{2^p} \int_{-\infty}^{+\infty} L_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{2^p} (M_k - m_k).$$

Or, si $f(x)$ est à variation bornée et si V est sa variation totale, nous avons pour chaque entier positif p l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{2^p} (M_k - m_k) \leqq V.$$

Il suit des formules précédentes que dans ce cas $N(t)$ est sommable au sens de M. Lebesgue entre $-\infty$ et $+\infty$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(t)\, dt = \lim_{p \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_p(t)\, dt = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{2^p} (M_k - m_k) = V.$$

Supposons maintenant que $N(t)$ est une fonction sommable entre $-\infty$ et $+\infty$. D'après les formules précédentes il en résulte pour tout entier positif p

$$\sum_{k=1}^{2^p}(M_k - m_k) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} N(t)\,dt,$$

or ceci prouve que $f(x)$ est à variation bornée, c. q. f. d.

Ce théorème démontré, M. Banach en déduit immédiatement que *toute fonction continue et à variation bornée jouit de la propriété* (T_1) [8]. En effet, ceci resulte du théorème précédent et de la sommabilité de $N(t)$.

Nous pouvons maintenant revenir à l'étude des fonctions de la forme $f[\varphi(x)]$, f étant monotone et φ à variation bornée et en particulier au cas où f est monotone et *absolument continue.*

Théorème II. — *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit représentable dans la forme*

$$F(x) = f[\Phi(x)].$$

f étant absolument continue et monotone et $\Phi(x)$ à variation bornée il faut et il suffit que $F(x)$ jouisse de la propriété T_1 de M. Banach, c'est-à-dire que l'ensemble E des points y pour lesquels l'équation $y = F(x)$ a une infinité de racines soit de mesure nulle, $\operatorname{mes} E = 0$.

La condition est nécessaire. — D'après le théorème cité de M. Banach la fonction $\Phi(x)$ jouit de la propriété T_1. Comme $f(u)$ est monotone, à chaque point y correspond un et un seul point u lié à y par la relation

$$y = f(u).$$

Donc, pour que l'équation $y_0 = F(x)$ ait une infinité de racines il faut et il suffit que l'équation

$$u_0 = \Phi(x)$$

ait une infinité de racines, où l'on suppose $y_0 = f(u_0)$.

Il en résulte que si E_u est l'ensemble des points u pour lesquels $u = \Phi(x)$ a une infinité de racines et E_y l'ensemble des points pour lesquels $y = F(x)$ a une infinité de racines, on a

$$E_y = f(E_u).$$

Puisque $\Phi(x)$ jouit de la propriété (T_1), on a

$$\operatorname{mes} E_u = 0.$$

Or, $f(u)$ est absolument continue, donc

$$\operatorname{mes} f(E_u) = 0.$$

---

[8]) Pour la définition des fonctions jouissant de la propriété (T_1) voir le n° 2.

On voit donc que

$$\text{mes}\, E_y = 0$$

d'où il résulte que $F(x)$ jouit de la propriété T_1 (c. q. f. d.).

La condition est suffisante. — Supposons que $F(x)$ jouisse de la propriété T_1. Donc, l'ensemble E des points y pour lesquels l'équation $y = F(x)$ a une infinité de racines est de mesure nulle,

$$\text{mes}\, E = 0\,.$$

Désignons par E_n l'ensemble des points y pour lesquels l'équation $y = F(x)$ a précisément n racines. Si m et M sont le minimum et le maximum de $F(x)$, le segment $[m, M]$ de l'axe OY est la somme des ensembles E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et de l'ensemble E

$$[m, M] = E + \sum_{n=1}^{\infty} E_n,$$

quelques uns des ensembles E_n pouvant être vides.

On a donc, puisque $\text{mes}\, E = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}\, E_n = M - m\,.$$

Soit $g(y)$ une fonction définie par les conditions:

$$g(y) = \frac{1}{n} \text{ sur } E_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Comme $\text{mes}\, E = 0$, la fonction $g(y)$ est définie presque partout sur $[m, M]$. Elle est bornée, puisque $0 < g(y) \leq 1$.

Posons

$$u = \omega(y) = \int_m^y g(y)\, dy\,.$$

Il est évident que $\omega(y)$ est absolument continue et croissante; sa dérivée est égale à $g(y)$ presque partout, donc presque partout positive.

Il en résulte (n° 4) que la fonction inverse de $u = \omega(y)$ que nous désignerons par $y = f(u)$ est monotone et absolument continue.

En posant

$$\Phi(x) = \omega[F(x)]\,,$$

on a

$$F(x) = f[\Phi(x)]$$

et il reste à démontrer que $\Phi(x)$ est à variation bornée.

Or, $\omega(y)$ étant monotone, on voit bien que l'ensemble E des points u pour lesquels $u = \Phi(x)$ a une infinité de racines n'est autre chose que l'ensemble des valeurs de $\omega(y)$ sur E, donc

$$\mathsf{E} = \omega(E).$$

Comme $\text{mes}\, E = 0$ et $\omega(y)$ est absolument continue, on a

$$\text{mes}\, \mathsf{E} = 0.$$

On voit de même que E_n étant l'ensemble des points u pour lesquels $u = \Phi(x)$ a précisément n racines, on a

$$\mathsf{E}_n = \omega(E_n).$$

Comme $g(y) = \frac{1}{n}$ sur E_n, on voit bien que $\text{mes}\, \mathsf{E}_n = \text{mes}\, \omega(E_n) = \frac{1}{n} \text{mes}\, E_n$.

Il en résulte que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n \,\text{mes}\, \mathsf{E}_n$ converge, puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \,\text{mes}\, \mathsf{E}_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n} \text{mes}\, E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}\, E_n = M - m.$$

Donc la fonction $N_\Phi(u)$ de M. Banach, qui est égale au nombre des racines de l'équation $u = \Phi(x)$ quand ce nombre est fini, et à ∞ dans le cas contraire, est sommable. D'après le théorème cité de M. Banach il en résulte que $\Phi(x)$ est à variation bornée, c. q. f. d.

Nous allons maintenant considérer le cas le plus général des fonctions de la forme

$$f[\varphi(x)].$$

f étant monotone et φ à variation bornée. Nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème III. — *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit représentable dans la forme*

$$F(x) = \mathsf{F}[\Phi(x)],$$

où F est une fonction continue et essentiellement croissante et $\Phi(x)$ à variation bornée, il faut et il suffit que l'ensemble des points y_0 tels que l'équation $y_0 = F(x)$ a un nombre fini de racines soit non dénombrable dans chaque intervalle de l'axe OY entre le minimum et le maximum de $F(x)$.

La condition est nécessaire. — En vertu du théorème cité de M. Banach, comme $\Phi(x)$ est à variation bornée, l'ensemble E des points u pour lesquels l'équation $u = \Phi(x)$ a une infinité de racines est de mesure nulle. Donc, son ensemble complémentaire CE est évidemment non dénombrable dans chaque intervalle entre le minimum et le maximum de $\Phi(x)$.

Or, $\mathsf{F}(x)$ est essentiellement croissante, donc, à deux points u_1 et u_2 différents correspondent deux points $y_1 = \mathsf{F}(u_1)$ et $y_2 = \mathsf{F}(u_2)$ essentiellement distincts. Il en résulte que l'ensemble des points y pour lesquels $y = F(x)$ a un nombre fini de racines est l'image de CE faite par la fonction $\mathsf{F}(u)$,

c'est-à-dire il est identique à $\mathsf{F}(CE)$. Il en résulte que cet ensemble est partout non dénombrable, c. q. f. d.

La condition est suffisante. — Désignons par E l'ensemble des points y pour lesquels l'équation $y = F(x)$ a une infinité de racines. Par hypothèse $C\mathsf{E}$ est partout non dénombrable. Il est d'ailleurs mesurable B [9]). Donc, en vertu d'un théorème du n° 24 il existe une fonction $g(y)$ continue et croissante telle que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et que

$$\operatorname{mes} g(C\mathsf{E}) = 1,$$

donc

$$\operatorname{mes} g(\mathsf{E}) = 0. \text{ }^{10)}$$

Il en résulte que la fonction

$$\Psi(x) = g[F(x)]$$

jouit de la propriété T_1 de M. Banach. En effet, l'ensemble des points t pour lesquels l'équation $t = \Psi(x)$ à une infinité de racines est évidemment identique à $g(\mathsf{E})$ puisque $g(y)$ est croissante.

Or, en vertu du théorème précédent, si $\Psi(x)$ jouit de la propriété (T_1) elle est représentable dans la forme

$$\Psi(x) = f[\Phi(x)]$$

où f est absolument continue croissante et $\Phi(x)$ à variation bornée.

Mais $g(y)$ étant croissante, sa fonction inverse $y = \omega(t)$ l'est aussi. Donc

$$F(x) = \omega[\Psi(x)] = \omega\{f[\Phi(x)]\} = \mathsf{F}[\Phi(x)]$$

et comme $\mathsf{F} = \omega[f]$ et ces deux fonctions sont essentiellement croissantes, le théorème est démontré, c. q. f. d.

Il est important de remarquer que nous avons trouvé la condition pour qu'une fonction continue soit représentable dans la forme

$$\mathsf{F}[\Phi(x)]$$

où F est *essentiellement* croissante et $\Phi(x)$ à variation bornée. Si F pouvait être seulement *non décroissante*, la condition ne serait déjà plus la même. On peut, en effet, construire une fonction $F(x)$ de la forme $\mathsf{F}[\Phi(x)]$ où F est non décroissante et $\Phi(x)$ même absolument continue,

---

[9]) La proposition: *l'ensemble des valeurs qu'une fonction continue prend une infinité de fois est un ensemble mesurable B* est contenue dans le théorème I de la Note de M. Banach, *Sur les lignes rectifiables* (*Fund. Math.* 7 (1925), p. 226—227). Elle se trouve aussi dans la Note de M. Vitali, *Sulle funzioni continue* (*Fund. Math.* 7 (1926), p. 178).

[10]) Nous supposons pour simplifier $0 \leq F(x) \leq 1$, ce qui évidemment ne restreint pas la généralité.

telle que chaque droite parallèle à l'axe OX coupe la courbe $y = F(x)$ en un ensemble de points non dénombrable[11]).

Il en résulte qu'*il existe des fonctions de la forme* $f[\varphi(x)]$, *f et φ étant à variation bornée qui ne peuvent pas être représentées dans la forme* $\mathsf{F}[\Phi(x)]$, F *étant* croissante *et Φ à variation bornée.*

Nous savons que dans le cas des fonctions absolument continues il n'en était pas ainsi (n° 5), c'est-à-dire qu'une superposition de deux fonctions absolument continues pouvait toujours être mise sous la forme d'une autre superposition de fonctions de la même nature, la fonction extérieure étant d'ailleurs *croissante.* Ce fait nous a permis de démontrer (n° 9) qu'une superposition triple de fonctions absolument continues se réduit à une superposition double de ces fonctions. On ne sait pas si une pareille proposition a lieu dans le cas des fonctions à variation bornées et il est probable que la réponse est négative.

26. Les déformations des axes de coordonnées. — Les propositions préliminaires du paragraphe précédent étant terminées, il est temps de passer à la méthode de déformation des axes de coordonnées. Le problème principal qu'on se pose est le suivant: étant donnée une fonction continue $F(x)$ reconnaître s'il est possible par une déformation monotone de l'axe OX ou de l'axe OY transformer la fonction $F(x)$ donnée en une autre fonction jouissant d'une certaine propriété particulière et précieuse.

Nous allons démontrer que chaque fonction continue peut être rendue presque partout dérivable par des déformations monotones et continues des axes de coordonnées.

Nous commençons par l'étude du cas où l'on fait une déformation de l'axe de la variable indépendante.

On a le théorème[12]):

Théorème. — *Quelle que soit la fonction continue $F(x)$ définie dans* $[0, 1]$ *il existe une fonction continue et croissante* $x = \varphi(t)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$,

---

[11]) Pour avoir une telle fonction on prend sur le segment $[0, 1]$ de l'axe OU un ensemble parfait P de mesure nulle et on construit une fonction $u = \Phi(x)$ telle que chaque droite parallèle à OX passant par un point de P coupe la courbe $u = \varphi(x)$ en un ensemble parfait, tandis que les autres droites ne coupent la courbe qu'en un nombre fini de points. En choisissant convenablement les longueurs des intervalles contigus à P on peut effectuer cette construction de telle manière que $\Phi(x)$ soit à variation bornée (même absolument continue). On prend pour $\mathsf{F}(u)$ une fonction non décroissante et constante dans chaque intervalle contigu à P. On voit bien que pour la fonction $F(x) = \mathsf{F}[\Phi(x)]$ chaque droite parallèle à OX coupe la courbe $y = F(x)$ en un ensemble non dénombrable de points.

[12]) Voir ma Note *Sur quelques formes mixtes de la représentation finie d'une fonction continue arbitraire* (*Comptes rendus* **188** (1929), p. 980).

telle que la fonction composée

$$\Phi(t) = F[\varphi(t)]$$

est presque partout dérivable dans le segment $[0,1]$ *de l'axe* OT.

En d'autres termes, chaque fonction continue peut être transformée en une fonction presque partout dérivable par une transformation biunivoque et bicontinue du segment $[0,1]$ de l'axe OX en lui-même.

Pour le voir, prenons sur le segment $[0,1]$ de l'axe OT l'ensemble P_1 de Cantor[13]); soient $\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \dots, \delta_n^{(1)}, \dots$ ses intervalles contigus. Prenons dans chaque $\delta_n^{(1)}$ un ensemble $P_n^{(2)}$ de Cantor, soit

$$P_2 = P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(2)}$$

et $\delta_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ ses intervalles contigus.

D'une manière générale, si les ensembles $P_1, P_2, \dots, P_m$ sont déjà définis, en désignant par $\delta_n^{(m)}$ les contigus à P_m on prend dans $\delta_n^{(m)}$ un ensemble $P_n^{(m+1)}$ de Cantor et on pose

$$P_{m+1} = P_m + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(m+1)}.$$

La fonction $F(x)$ étant continue, il existe, quel que soit ε, un nombre η tel que l'oscillation de $F(x)$ sur chaque intervalle δ de longueur inférieure à η soit $< \varepsilon$. En particulier, il existe un $\eta_n^{(m)}$ tel que sur chaque intervalle de longueur $< \eta_n^{(m)}$ l'oscillation de $F(x)$ soit $< \frac{1}{3^{3m}} \delta_n^{(m)}$ $(m = 1, 2, \dots,\ n = 1, 2, \dots)$.

En vertu du théorème du n° 24 il existe une fonction $\varphi(t)$ continue et croissante, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, telle que pour $\delta_n^{(m)} = (a_n^{(m)}, b_n^{(m)})$ on a

$$\varphi(b_n^{(m)}) - \varphi(a_n^{(m)}) < \eta_n^{(m)} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{pmatrix}$$

donc

$$\operatorname*{osc}_{\delta_n^{(m)}} F[\varphi(t)] < \frac{1}{3^{3m}} \delta_n^{(m)}$$

d'ou il résulte

$$\operatorname*{osc}_{\delta_n^{(m)}} \Phi(t) < \frac{1}{3^{3m}} \delta_n^{(m)}.$$

Nous en déduirons que $\Phi'(t) = 0$ presque partout.

En effet, P_1 et tous les $P_n^{(m)}$ $(m = 1, 2, \dots,\ n = 1, 2, \dots)$ sont des ensembles de Cantor, donc de mesure nulle. Si E est l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucun de ces ensembles, on a évidemment $\operatorname{mes} \mathsf{E} = 1$.

[13]) On sait que l'ensemble de Cantor s'obtient en divisant un segment en trois parties égales dont on enlève la centrale; puis en divisant chaque partie restante en trois parties égales et en enlevant les parties centrales et ainsi de suite indéfiniment.

D'autre part, soit $\delta_n^{(m)}$ un intervalle contigu à P_m; il contient l'ensemble de Cantor $P_n^{(m+1)}$. D'après la construction même des ensembles de Cantor, on peut enfermer $P_n^{(m+1)}$ en 2^m segments égaux dont chacun est de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^m \delta_n^{(m)}$. Désignons par $R_n^{(m)}$ la réunion de ces segments; on a

$$\text{mes}\, R_n^{(m)} = \left(\frac{2}{3}\right)^m \delta_n^{(m)}$$

et en posant $R_m = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(m)}$, on a

$$\text{mes}\, R_m = \left(\frac{2}{3}\right)^m \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(m)} = \left(\frac{2}{3}\right)^m$$

puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(m)}$ est la somme des contigus à P_m qui est de mesure nulle.

Soit e l'ensemble de tous les points t qui appartiennent à une infinité de R_m. Il est bien évident que $\text{mes}\, e = 0$. En effet, si

$$\overline{R}_m = R_m + R_{m+1} + \dots$$

on voit bien que les ensembles $\overline{R}_m$ sont emboités les uns dans les autres

$$\overline{R}_1 > \overline{R}_2 > \dots > \overline{R}_m > \dots .$$

Si e n'est pas enfermé dans un certain $\overline{R}_{m_0}$, il existe un point t_0 de e qui n'appartient pas à $\overline{R}_m$ dès que m est assez grand, $m > m_0$. Donc, t_0 n'appartient qu'à un nombre fini de R_m, ce qui contredit à la définition même de e.

Donc, quel que soit m, l'ensemble e est contenu dans $\overline{R}_m$. Mais on a

$$\text{mes}\, \overline{R}_m \leqq \sum_{k=m}^{\infty} \text{mes}\, R_k = \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left(\frac{2}{3}\right)^m,$$

ainsi $\text{mes}\, e \leqq 3\left(\frac{2}{3}\right)^m$, m étant quelconque, donc

$$\text{mes}\, e = 0.$$

Soit maintenant t_0 un point de E qui n'appartient pas à e. Comme $\text{mes}\, \mathsf{E} = 1$ et $\text{mes}\, e = 0$, on voit que presque chaque point du segment $[0, 1]$ de l'axe OT est un point de $\mathsf{E} - e$. Si nous démontrons que pour chaque point t_0 de $\mathsf{E} - e$ la dérivée $\Phi'(t_0)$ existe, le théorème sera démontré.

Soit donc t_0 un point de $\mathsf{E} - e$. Comme t_0 n'appartient pas à e, il existe un nombre m_0 assez grand tel que, pour chaque $m \geqq m_0$, t_0 n'appartient pas à R_m. Comme t_0 appartient à E, il n'appartient à aucun des P_m quel que soit m. Donc, il est la limite d'une suite d'intervalles

$$\delta_{k_1}^{(1)}, \delta_{k_2}^{(2)}, \dots, \delta_{k_m}^{(m)}, \dots$$

emboîtés les uns dans les autres.

Considérons la quantité

$$\frac{\Phi(t)-\Phi(t_0)}{t-t_0}.$$

Quand t tend vers t_0 en restant dans $\delta_{k_m}^{(m)}$, on a

$$|\Phi(t)-\Phi(t_0)|<\frac{1}{3^{3m}}\delta_{k_m}^{(m)}.$$

Or, le point t_0 n'appartient à aucun R_m dès que $m \geqq m_0$, donc, quand t, en parcourant $\delta_{k_m}^{(m)}$ s'approchera de l'intervalle $\delta_{k_{m+1}}^{(m+1)}$ contenant t_0, la distance entre t et t_0 sera encore au moins égale à l'un des segments de $R_{k_{m+1}}^{(m+1)}$, donc

$$|t-t_0| \geqq \frac{1}{3^{m+1}}\delta_{k_{m+1}}^{(m+1)}.$$

Or, d'après les propriétés des ensembles de Cantor et d'après la définition des $R_k^{(m)}$, le plus petit des intervalles contigus à $P_{k_m}^{(m+1)}$ qui sont extérieurs à $R_{k_m}^{(m)}$ est au moins égal à $(\frac{1}{3})^m \delta_k^{(m)}$. Ainsi

$$\delta_{k_{m+1}}^{(m+1)} \geqq \left(\frac{1}{3}\right)^m \delta_{k_m}^{(m)}$$

donc

$$|t-t_0| \geqq \frac{1}{3^{2m+1}}\delta_{k_m}^{(m)}.$$

Il en résulte évidemment

$$\left|\frac{\Phi(t)-\Phi(t_0)}{t-t_0}\right| < \frac{\frac{1}{3^{3m}}\delta_{k_m}^{(m)}}{\frac{1}{3^{2m+1}}\delta_{k_m}^{(m)}} = \frac{1}{3^{m-1}}.$$

Quand t tend vers t_0, le nombre m croit indéfiniment, donc la seconde partie de l'inégalité tend vers zéro, d'où il suit

$$\Phi'(t_0)=0,$$

c. q. f. d.

Remarque. — Nous avons démontré que toute fonction continue peut être rendue presque partout dérivable par une déformation monotone de l'axe OX. Nous avons trouvé que la dérivée obtenue est presque partout nulle. On pourrait se demander s'il est possible d'obtenir en faisant une pareille déformation une fonction dont la dérivée existe presque partout mais diffère de zéro. La réponse, dans le cas général, est *négative*. En effet, si $F(x)$ est une fonction continue telle que chaque droite parallèle à l'axe OX coupe la courbe $y=F(x)$ en un ensemble parfait de points[14]), chaque droite parallèle à l'axe OT coupera la courbe $y=F[\varphi(t)]=\Phi(t)$

[14]) On obtient de telles fonctions en considérant l'une des composantes d'une courbe péanienne convenablement construite.

en un ensemble parfait de points, quelle que soit la fonction monotone $\varphi(t)$. Dans ce cas, quel que soit t_0, si $\Phi'(t_0)$ existe, il est évident qu'elle ne peut être que nulle.

Passons maintenant au problème de la deformation de l'axe de la variable dépendante. Il est nécessaire de démontrer d'abord quelques lemmes préliminaires.

Lemme I. — *$F(x)$ étant une fonction continue quelconque, $0 \leqq F(x) \leqq 1$, et P un ensemble parfait de mesure positive tel que $P' = F(P)$ est non dense, il existe une fonction continue $g(y)$, croissante et à nombres dérivés bornés, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ telle que la fonction composée*

$$\Phi(x) = g[F(x)]$$

a une dérivée nulle presque en chaque point de P et que mes $\Phi(P) = 0$.

Pour le voir, prenons une fonction $F_1(x)$ égale à $F(x)$ sur P et qui, dans chaque contigu à P, est un polynome. On supposera que dans le contigu δ_n on a

$$|F(x) - F_1(x)| < \varepsilon_n,$$

où la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ converge, et que $0 \leqq F_1(x) \leqq 1$.

L'ensemble $P' = F(P) = F_1(P)$ étant, par hypothèse, non dense, sa mesure est dans chaque intervalle δ de l'axe OY inférieure à la longueur de cet intervalle. Or, en dehors de P la fonction $F_1(x)$ est partout dérivable.

En vertu du théorème I du n° 25 [15]) il existe donc une fonction $g(y)$ continue croissante et à nombres dérivés bornés telle que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et que la fonction

$$\varphi(x) = g[F_1(x)]$$

est absolument continue et vérifie l'égalité

$$\text{mes}\, \varphi(P) = 0.$$

Comme $\varphi(x)$ est absolument continue, elle est presque partout dérivable et puisque mes $\varphi(P) = 0$ on a évidemment

$$\varphi'(x) = 0 \quad \text{presque partout sur } P.$$

Posons

$$\Phi(x) = g[F(x)]$$

et

$$r(x) = \Phi(x) - \varphi(x).$$

On voit bien que $\Phi(x) = \varphi(x)$ sur P puisque $F(x) = F_1(x)$ sur P. Il en résulte

$$\text{mes}\, \Phi(P) = 0.$$

---

[15]) Voir également les remarques faites après la démonstration de ce théorème.

Puisque $\Phi(x)=\varphi(x)$ sur P, on a sur P

$$r(x)=0.$$

D'ailleurs

$$r(x)=\Phi(x)-\varphi(x)=g[F(x)]-g[F_1(x)]$$

Comme $g(y)$ est à nombres dérivés bornés et $|F(x)-F_1(x)|<\varepsilon_n$ dans δ_n, où $\sum\varepsilon_n$ converge, on voit bien que les oscillations de $r(x)$ dans les intervalles contigus à P forment une série convergente. Il en résulte que

$$r'(x)=0 \quad \text{presque partout sur } P$$

donc

$$\Phi'(x)=0 \quad \text{presque partout sur } P,$$

c. q. f. d.

Lemme II. — *Soit $F(x)$ une fonction continue, $0\leqq F(x)\leqq 1$, P un ensemble parfait de mesure positive tel que $F'(x)=0$ presque partout sur P et* mes $F(P)=0$. *Soit π un ensemble parfait de mesure positive tel que l'ensemble $\pi'=F(\pi)$ soit non dense et sans point commun avec $P'=F(P)$.*

Dans ces conditions, étant donnée une suite de nombres positifs ε_n tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ converge, il existe une fonction continue $g(y)$ croissante et à nombres dérivés bornés, telle que $g(0)=0$, $g(1)=1$ et que la fonction composée

$$\Phi(x)=g[F(x)]$$

vérifie les conditions

$$\Phi(x)=F(x) \quad \text{sur} \quad P,$$

$$|\Phi(x)-F(x)|<\varepsilon_n \quad \text{sur le contigus } \delta_n \text{ à } P \qquad (n=1,2,\ldots),$$

$$\Phi'(x)=0 \quad \text{presque partout sur } Q=P+\pi$$

et

$$\text{mes}\,\Phi(Q)=0.$$

Pour le démontrer, nous considérons d'abord une fonction $\mathsf{F}(x)$ telle que

$$\mathsf{F}(x)=F(x) \quad \text{sur} \quad Q,$$

que $\mathsf{F}(x)$ est dans chaque contigu Δ_n à Q partout dérivable et à dérivée non nulle, que l'on ait dans le contigu Δ_n à Q l'inégalité

$$|\mathsf{F}(x)-F(x)|<\varepsilon_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

et qu'enfin dans chaque contigu δ_n à P le minimum et le maximum de $\mathsf{F}(x)$ sont les mêmes que ceux de $F(x)$ (il en résulte en particulier que l'on a $0\leqq\mathsf{F}(x)\leqq 1$ partout). On voit sans peine que $\mathsf{F}(x)$ vérifie les mêmes conditions que $F(x)$. En effet, puisque $\mathsf{F}(x)=F(x)$ sur Q; on a $\mathsf{F}(\pi)=\pi'$ et $\mathsf{F}(P)=P'$. D'ailleurs $\mathsf{F}'(x)=0$ presque partout sur P

puisque la différence $\mathsf{F}(x) - F(x)$ qui est nulle sur Q a dans les contigus Δ_n à Q une somme d'oscillations convergente, donc la dérivée de $[\mathsf{F}(x)-F(x)]$ est nulle presque partout sur Q, et *a fortiori* sur P, et comme $F'(x)=0$ presque partout sur P, il en est de même pour $\mathsf{F}(x)$. Or, la fonction $\mathsf{F}(x)$ est de plus partout dérivable hors de Q.

Supposons que le théorème est déjà démontré pour $\mathsf{F}(x)$ et la suite ε_n, c'est-à-dire supposons qu'il existe une fonction $g(y)$ continue croissante et à nombres dérivés bornés telle que $g(0)=0$, $g(1)=1$ et que pour la fonction composée

$$f(x)=g[\mathsf{F}(x)]$$

on a

$$f(x)=\mathsf{F}(x) \quad \text{sur} \quad P,$$

$$|f(x)-\mathsf{F}(x)|<\varepsilon_n \quad \text{sur l'intervalle } \delta_n \text{ contigu à } P \qquad (n=1,2,\ldots),$$

$$f'(x)=0 \quad \text{presque partout sur } Q$$

et

$$\text{mes} f(Q)=0.$$

Nous allons démontrer que la fonction $g(y)$ vérifie toutes les conditions du lemme.

En effet, posons

$$\Phi(x)=g[F(x)];$$

nous démontrerons que $\Phi(x)$ jouit de toutes les propriétés nécessaires.

Tout d'abord, comme $\mathsf{F}(x)=F(x)$ sur Q, on a $f(x)=\Phi(x)$ sur Q. Or, Q contient P, donc $f(x)=\Phi(x)$ sur P. Mais sur P on a $f(x)=\mathsf{F}(x) = F(x)$, donc

$$\Phi(x)=F(x) \quad \text{sur} \quad P.$$

Soit

$$R(x)=f(x)-\Phi(x),$$

on a

$$R(x)=0 \quad \text{sur} \quad Q.$$

D'ailleurs, $R(x)=g[\mathsf{F}(x)]-g[F(x)]$. On a dans le contigu Δ_n à Q l'inégalité $|\mathsf{F}(x)-F(x)|<\varepsilon_n$, où $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ converge; d'autre part, $g(y)$ est à nombres dérivés bornés. Il en résulte immédiatement que les oscillations de $R(x)$ dans les intervalles Δ_n contigus à Q forment une série convergente. Donc, d'après le théorème plusieurs fois cité de M. Denjoy on a

$$R'(x)=0 \quad \text{presque partout sur } Q.$$

Comme nous avons supposé que $f'(x)=0$ presque partout sur Q, on a donc

$$\Phi'(x)=0 \quad \text{presque partout sur } Q.$$

D'ailleurs, comme $\Phi(x)=f(x)$ sur Q et $\text{mes} f(Q)=0$ on a $\text{mes}\,\Phi(Q)=0$.

Soit maintenant
$$h(y)=g(y)-y.$$
On a
$$|h[\mathsf{F}(x)]|=|g[\mathsf{F}(x)]-\mathsf{F}(x)|=|f(x)-\mathsf{F}(x)|<\varepsilon_n \quad \text{sur} \quad \delta_n.$$
Or, sur δ_n le maximum et le minimum de $\mathsf{F}(x)$ sont, par hypothèse, les mêmes que ceux de $F(x)$; donc, l'ensemble des valeurs de $\mathsf{F}(x)$ et de $F(x)$ sur δ_n sont les mêmes. Il en résulte que $|h[F(x)]|<\varepsilon_n$ sur δ_n puisqu'il en est ainsi pour $|h[\mathsf{F}(x)]|$.

Or, on a
$$|h[F(x)]|=|g[F(x)]-F(x)|=|\Phi(x)-F(x)|$$
et nous avons ainsi démontré que
$$|\Phi(x)-F(x)|<\varepsilon_n \quad \text{dans} \quad \delta_n \qquad (n \leqq 1, 2, \ldots).$$
Ainsi $g(y)$ et $\Phi(x)$ vérifient toutes les conditions de l'énoncé du lemme.

Tout revient donc à démontrer le lemme pour la fonction $\mathsf{F}(x)$.

Soit $Q'=P'+\pi'$. Si x appartient à π, on voit que $\mathsf{F}(x)$ appartient à π'. Si x appartient à P, $\mathsf{F}(x)$ appartient à P'. Donc, si x appartient à Q, $\mathsf{F}(x)$ appartient à Q'.

Soit y_0 un point n'appartenant pas à Q'. L'équation $y_0=\mathsf{F}(x)$ n'a qu'un nombre fini de racines car, si elle en avait une infinité, elles auraient un points limite x_0, et en ce point $\mathsf{F}'(x_0)$ serait indéterminée ou nulle. Or, x_0 n'appartient pas à Q, puisque $y_0=\mathsf{F}(x_0)$ n'appartient pas à Q'; donc $\mathsf{F}'(x)$ existe est diffère de zéro puisque la fonction $\mathsf{F}(x)$ a une dérivée non nulle en chaque point qui n'appartient pas à Q.

Il en résulte que $y_0=\mathsf{F}(x)$ a un nombre fini de racines chaque fois que y_0 n'appartient pas à Q'.

Cela posé, désignons par $M(y_0)$ le maximum de $|\mathsf{F}'(x)|$ pour tous les x tels que $\mathsf{F}(x)=y_0$, et posons
$$\psi(y)=\frac{1}{M(y)} \quad \text{si } y \text{ n'appartient pas à } Q' \text{ et } M(y)\geqq 1,$$
$$\psi(y)=1 \quad \text{si } y \text{ n'appartient pas à } Q' \text{ et } M(y)<1,$$
enfin
$$\psi(y)=0 \quad \text{si } y \text{ appartient à } Q'.$$
Ainsi $\psi(y)$ est partout définie non négative et bornée puisque $0\leqq\psi(y)\leqq 1$.

Par hypothèse, π' et P' n'ont aucun point commun, donc π' est contenu dans un nombre *fini* d'intervalles contigus à P'. D'ailleurs, chaque partie de π' contenue dans un contigu. δ'_n à P' est un ensemble parfait, soient $\delta'_{n_1}, \delta'_{n_2}, \ldots, \delta'_{n_s}$ les contigus à P' qui contiennent des points de π' (il n'y en a qu'un nombre fini); on peut indiquer dans chacun de ces δ'_{n_i}

une partie centrale, soit σ_i, telle que les extrémités de σ_i sont à l'intérieur (au sens strict) de δ'_{n_i} et que tous les points de π' appartenant à δ'_{n_i} sont à l'intérieur (au sens strict) de σ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Considérons un σ_i pour i fixe. Il n'existe qu'un nombre *fini* d'intervalles δ_n contigus à P tels que les valeurs de $\mathsf{F}(x)$ sur ces δ_n appartiennent à σ_i. A chaque intervalle δ_n correspond dans l'énoncé du lemme un certain ε_n. Divisons σ_i en un nombre fini d'intervalles assez petits pour que leurs longueurs ne surpassent pas ε, où ε est le plus petit des ε_n correspondant aux δ_n pour lesquels il existe des points x tels que $\mathsf{F}(x)$ appartient à σ_i. Soient $a_1^{(i)} a_2^{(i)} \ldots a_p^{(i)}$ les points de division de σ_i; on suppose que $a_1^{(i)}$ et $a_k^{(i)}$ coïncident avec les extrémités de σ_i.

Posons

$$g(y) = y$$

si y appartient à P', si $y = 0$ ou $y = 1$, si y appartient à un δ'_n ne contenant aucun point de π', enfin sur les parties des δ'_n contenant π' qui restent quand on a enlevé les σ correspondants. En d'autres termes, $g(y) = y$ partout en dehors des σ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Sur σ_i on pose

$$g(y) = a_k^{(i)} + \frac{a_{k+1}^{(i)} - a_k^{(i)}}{\int\limits_{a_k^{(i)}}^{a_{k+1}^{(i)}} \psi(y)\,dy} \int\limits_{a_k^{(i)}}^{y} \psi(y)\,dy \quad \text{dans } (a_k^{(i)}, a_{k+1}^{(i)}) \quad (k = 1, 2, \ldots, p-1)$$

et cela pour $i = 1, 2, \ldots, s$.

On voit bien que

$$g(a_k^{(i)}) = a_k^{(i)}, \qquad g(a_{k+1}^{(i)}) = a_{k+1}^{(i)}$$

donc $g(y)$ est partout continue. Elle est croissante, puisque $\psi(y)$ est non négative et d'ailleurs dans chaque intervalle de l'axe OY elle est positive en un ensemble de mesure positive, puisque elle n'est nulle que sur Q' et $Q' = P' + \pi'$ donc il est partout non dense.

D'ailleurs, $g(y)$ a des nombres dérivés bornés, puisque $0 \leqq \psi(y) \leqq 1$ et qu'il n'existe qu'un nombre fini de segments σ_i dont chacun est divisé en un nombre fini d'intervalles (a_k^i, a_{k+1}^i), donc les facteurs

$$C_k^{(i)} = \frac{a_{k+1}^{(i)} - a_k^{(i)}}{\int\limits_{a_k^{(i)}}^{a_{k+1}^{(i)}} \psi(y)\,dy}$$

sont en nombre fini et ont, par conséquent, un maximum C.

Désignons par $e_k^{(i)}$ l'ensemble des points de $(a_k^{(i)}, a_{k+1}^{(i)})$ en lesquels $g'(y) \neq C_k^{(i)} \psi(y)$. Il est évident que $\operatorname{mes} e_k^{(i)} = 0$. Donc, la somme e de tous les $e_k^{(i)}$ pour tous les $(a_k^{(i)}, a_{k+1}^{(i)})$ d'un σ_i $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ et pour tous les σ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ est un ensemble de mesure nulle.

Or, pour chaque point d'un σ_i n'appartenant pas à e la dérivée $g'(y)$ est égale à $\psi(y)$ multipliée par une constante inférieure à C. Donc

$$|g'(y)| < C|\psi(y)|$$

si y appartient à un σ_i quelconque sans appartenir à un ensemble e, $\operatorname{mes} e = 0$.

Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = g[\mathsf{F}(x)].$$

Tout d'abord, $f(x) = \mathsf{F}(x)$ sur P, puisque si x_0 appartient à P, $y_0 = \mathsf{F}(x_0)$ appartient à P' et, par conséquent, $g(y_0) = y_0$, donc $f(x_0) = \mathsf{F}(x_0)$.

Si δ_n est un contigu à P tel que l'ensemble $\mathsf{F}(\delta_n)$ ne contient aucun point des σ_i, on a $g(y) = y$ sur $\mathsf{F}(\delta_n)$, donc $f(x) = \mathsf{F}(x)$ sur δ_n et la différence $f(x) - \mathsf{F}(x)$ étant nulle est nécessairement inférieure à ε_n quelque soit ε_n donné d'avance.

Si δ_n est tel que $\mathsf{F}(\delta_n)$ a des points sur un σ_i, d'après la construction même de $g(y)$ on a $|g(y) - y| < \varepsilon_n$ sur ce σ_i. En effet, $g(y)$ est croissante, donc le maximum de $g(y)$ sur un $(a_k^{(i)}, a_{k+1}^{(i)})$ est au point $a_{k+1}^{(i)}$, or $g(a_{k+1}^{i}) = a_{k+1}^{(i)}$. Donc, sur $(a_k^{(i)}, a_{k+1}^{(i)})$ on a $|g(y) - y| \leqq a_{k+1}^{(i)} - a_k^{(i)} < \varepsilon \leqq \varepsilon_n$, puisque σ_i a été divisé en un nombre fini d'intervalles assez petits pour que la longueur de chacun d'eux soit plus petite que ε, où ε est le plus petit des nombres ε_n correspondants aux intervalles δ_n pour lesquels les ensembles $\mathsf{F}(\delta_n)$ contiennent des points de σ_i.

En posant $h(y) = g(y) - y$ on a donc

$$|h(y)| < \varepsilon_n \quad \text{sur} \quad \delta_n$$

donc

$$|f(x) - \mathsf{F}(x)| = |g[\mathsf{F}(x)] - \mathsf{F}(x)| = |h[F(x)]| < \varepsilon_n \quad \text{sur} \quad \delta_n.$$

Il reste à démontrer que $f'(x) = 0$ presque partout sur $Q = P + \pi$ et que $\operatorname{mes} f(Q) = 0$.

On a pour y appartenant à Q' l'égalité $\psi(y) = 0$, d'où il résulte

$$\operatorname{mes} g(Q') = 0.$$

Or, si x appartient à Q, $\mathsf{F}(x)$ appartient à Q', donc

$$\operatorname{mes} f(Q) = \operatorname{mes} g[\mathsf{F}(Q)] = \operatorname{mes} g(Q') = 0.$$

Passons à la dérivée de $f(x)$ sur Q.

On a pour l'ensemble P l'égalité $f(x) = \mathsf{F}(x)$. Comme $\mathsf{F}'(x) = 0$ presque partout sur P et comme la différence $f(x) - \mathsf{F}(x)$ qui est nulle sur P a dans les contigus δ_n à P une somme d'oscillations inférieure à $\sum \varepsilon_n$, donc convergente, il en résulte de suite que

$$f'(x) = 0 \quad \text{presque partout sur } P.$$

Il reste à le démontrer pour π. A cet effet considérons un certain σ_i et tous les points x tels que $\mathsf{F}(x)$ appartient à σ_i. Ils constituent deux ensembles fermés tels que $\mathsf{F}(x)=\alpha_i$ et $\mathsf{F}(x)=\beta_i$, où α_i et β_i sont les extrémités de σ_i, et une infinité dénombrable d'intervalles contigus à ces ensembles fermés. Les ensembles fermés ne contiennent aucun point de π puisque nous avons supposé que α_i et β_i n'appartiennent pas à π'. Quant aux intervalles contigus $\bar{\delta}$ à ces ensembles fermés, chacun d'eux est à l'intérieur d'un certain contigu à P.

Soit $\bar{\delta}$ l'un quelconque de ces intervalles; nous allons démontrer que $f(x)$ est absolument continue dans $\bar{\delta}$. Comme π est contenu dans la somme de ces $\bar{\delta}$, il en résultera que $f'(x)$ existe presque partout sur π. D'ailleurs, $f(x)=g[\mathsf{F}(x)]$; quand x appartient à π, $\mathsf{F}(x)$ appartient à π', donc à Q'. Or, sur Q' on a $\psi(y)=0$, donc $\operatorname{mes} g(Q')=0$; ainsi

$$\operatorname{mes} f(\pi)=\operatorname{mes} g[\mathsf{F}(\pi)]=\operatorname{mes} g(\pi')=0.$$

Comme $f'(x)$ existe presque partout sur π, il en résulte que

$$f'(x)=0 \quad \text{presque partout sur } \pi.$$

Tout revient donc à démontrer que $f(x)$ est absolument continue dans chaque $\bar{\delta}$.

Nous avons déjà vu que $\operatorname{mes} f(\pi)=0$; donc, si l'on désigne par $\pi_{\bar{\delta}}$ la partie de π contenue dans $\bar{\delta}$, on a $\operatorname{mes} f(\pi_{\bar{\delta}})=0$.

D'autre part, en dehors d'un ensemble e de mesure nulle, pour chaque y appartenant à un certain σ on a

$$|g'(y)|<C|\psi(y)|.$$

Soit e_0 l'ensemble des points de $\bar{\delta}$ pour lesquels $\mathsf{F}(x)$ appartient à e. L'ensemble $f(e_0)=g[\mathsf{F}(e_0)]$ est contenu dans $g(e)$, et comme $\operatorname{mes} e=0$ et $g(y)$ est une fonction à nombres dérivés bornés, on a $\operatorname{mes} g(e)=0$, donc $\operatorname{mes} f(e_0)=0$.

Soit maintenant x_0 un point de $\bar{\delta}$ qui n'appartient ni à $\pi_{\bar{\delta}}$; ni à e_0. En ce point x_0 la dérivée $\mathsf{F}'(x_0)$ existe, puisque x_0 n'appartient ni à π, ni à P, donc n'appartient pas à Q, et $\mathsf{F}'(x)$ existe partout en dehors de Q. D'ailleurs, puisque x_0 n'appartient pas à e_0, $y_0=\mathsf{F}(x_0)$ n'appartient pas à e, donc $|g'(y_0)|<C|\psi(y_0)|$. Il en résulte que

$$|f'(x_0)|<C|\psi(y_0)|\,|\mathsf{F}'(x_0)|.$$

Or, comme x_0 n'appartient pas à Q, y_0 n'appartient pas à Q'. Par conséquent,

$$\psi(y_0)=\frac{1}{M(y_0)} \quad \text{si} \quad M(y_0)\geqq 1,$$
$$\psi(y_0)=1 \quad \text{si} \quad M(y_0)<1$$

et $M(y_0)$ est le maximum de $|\mathsf{F}'(x)|$ pour tous les x tels que $\mathsf{F}(x) = y_0$. En particulier, on a $|\mathsf{F}'(x_0)| \leqq |M(y_0)|$, donc

$$|\psi(y_0)|\,|\mathsf{F}'(x_0)| \leqq 1.$$

Il en résulte que pour chaque x de $\bar{\delta}$ tel que x n'appartient ni à e_0 ni à $\pi_{\bar{\delta}}$, on a

$$|f'(x)| < C$$

et comme nous avons vu que $\operatorname{mes} f(\pi_{\bar{\delta}}) = 0$ et $\operatorname{mes} f(e_0) = 0$, il en résulte en vertu du lemme du n° 4 que $f(x)$ est absolument continue dans $\bar{\delta}$, ce qui achève la démonstration, c. q. f. d.

Ces préliminaires terminés, nous pouvons démontrer le théorème suivant[16]).

Théorème. — *Quelle que soit la fonction continue $F(x)$, $0 \leqq F(x) \leqq 1$, il existe une fonction continue et croissante $g(y)$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ telle que la fonction composée*

$$g[F(x)] = \mathsf{F}(x)$$

a une dérivée nulle presque partout.

En d'autres termes, quelle que soit la fonction continue $F(x)$, $0 \leqq F(x) \leqq 1$, on peut la transformer en une fonction presque partout dérivable par une transformation biunivoque et bicontinue du segment $[0, 1]$ de l'axe OY en lui-même.

Pour démontrer ce théorème, prenons dans le segment $[0, 1]$ de l'axe OX (nous supposons que $F(x)$ est définie sur ce segment, ce qui ne restreint pas la généralité) une suite d'ensembles parfaits

$$\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_n,\ \ldots$$

de mesure positive, tels que $\operatorname{mes} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = 1$ et que les ensembles $\pi_n' = F(\pi_n)$ soient non denses et sans point commun deux à deux[17]).

---

[16]) Voir ma Note *Sur quelques formes mixtes de la représentation finie d'une fonction continue arbitraire* (*Comptes rendus* **188** (1929), p. 980).

[17]) Il est facile d'obtenir de tels ensembles; a cet effet, prenons sur le segment $[0, 1]$ de l'axe OY une suite d'ensembles parfaits non denses $\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_n', \ldots$ sans points communs deux à deux et tels que $\operatorname{mes} \Sigma \pi_n' = 1$. Soit π_n l'ensemble de tous les points x pour lesquels $F(x)$ appartient à π_n' $(n = 1, 2, \ldots)$; π_n est évidemment parfait. Si l'on a $\operatorname{mes} \Sigma \pi_n = 1$, le problème est résolu; supposons donc qu'il n'en est pas ainsi. Soit E le complémentaire de $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n$ par rapport au segment $[0, 1]$ de l'axe OX; on a $\operatorname{mes} \mathsf{E} > 0$. Prenons dans E un ensemble parfait non dense $\bar{\pi}_1$, $\operatorname{mes} \bar{\pi}_1 > 0$, dont l'image $\bar{\pi}_1' = F(\bar{\pi}_1)$ est parfait. On voit bien que $\bar{\pi}_1'$ n'a pas de points communs avec les π_n' $(n = 1, 2, \ldots)$; il est ainsi de mesure nulle, donc non dense. Il est bien évident qu'on peut supposer que $\bar{\pi}_1$ est l'ensemble de *tous* les points x tels que $F(x)$ appartient à $\bar{\pi}_1'$.

(Voir la fin de cette note [17]) à la page suivante.)

Posons

$$P_1 = \pi_1, \quad P_2 = \pi_1 + \pi_2, \quad \ldots, \quad P_n = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n, \ \ldots$$

et $P'_n = F(P_n)$. Soient $\delta_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ les intervalles contigus à P_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Soient enfin $\varepsilon_k^{(n)}$ des nombres positifs tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{(n)}$ converge.

En vertu du lemme I il existe une fonction $g_1(y)$ continue et croissante, $g_1(0) = 0$, $g_1(1) = 1$ telle que la fonction composée

$$F_1(x) = g_1[F(x)]$$

a une dérivée nulle presque partout sur P_1 et que $\operatorname{mes} F_1(P_1) = 0$.

En vertu du lemme II il existe une fonction $g_2(y)$ continue et croissante, $g_2(0) = 0$, $g_2(1) = 1$ telle que la fonction composée

$$F_2(x) = g_2[F_1(x)]$$

vérifie les conditions

$$F_2(x) = F_1(x) \quad \text{sur} \quad P_1,$$

$$|F_2(x) - F_1(x)| < \varepsilon_n^{(1)} \quad \text{dans le contigu } \delta_n^{(1)} \text{ à } P_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$F'_2(x) = 0 \quad \text{presque partout sur } P_2$$

et

$$\operatorname{mes} F_2(P_2) = 0.$$

Supposons les fonctions $g_1(y), g_2(y), \ldots, g_m(y)$ déjà définies et telles que ce sont des fonctions continues croissantes, $g_k(0) = 0$, $g_k(1) = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ que

$$g_k[F_{k-1}(x)] = F_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

et que les fonctions F_k vérifient les conditions

$$F_{k+1}(x) = F_k(x) \quad \text{dans } P_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, m-1),$$

$$|F_{k+1}(x) - F_k(x)| < \varepsilon_n^{(k)} \quad \text{dans le contigu } \delta_n^{(k)} \text{ à } P_k \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\left.\begin{array}{l} F'_k(x) = 0 \quad \text{presque partout sur } P_k, \\ \operatorname{mes} F_k(P_k) = 0 \end{array}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

En vertu du lemme II il existe une fonction continue croissante $g_{m+1}(y)$, $g_{m+1}(0) = 0$, $g_{m+1}(1) = 1$ telle que la fonction composée

$$g_{m+1}[F_m(x)] = F_{m+1}(x)$$

Cela posé, on choisit dans $E - \bar{\pi}_1$ un ensemble parfait non dense $\bar{\pi}_2$, $\operatorname{mes} \bar{\pi}_2 > 0$, on voit que l'image $\bar{\pi}'_2 = F(\bar{\pi}_2)$ est sans points communs avec les π'_n et $\bar{\pi}'_1$; il est donc de mesure nulle, et ainsi non dense.

En continuant ce procédé on obtient sur le segment $[0, 1]$ une suite d'ensembles parfaits non denses $\pi_1, \bar{\pi}_1, \pi_2, \bar{\pi}_2, \ldots, \pi_n, \bar{\pi}_n, \ldots$ tels que $\operatorname{mes} \Sigma(\pi_n + \bar{\pi}) = 1$ et que leurs images sont des ensembles parfaits non denses et sans points communs deux à deux.

verifie les conditions

$$F_{m+1}(x) = F_m(x) \quad \text{sur} \quad P_m,$$

$$|F_{m+1}(x) - F_m(x)| < \varepsilon_n^{(m)} \quad \text{dans le contigu} \quad \delta_n^{(m)} \text{ à } P_m \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$F'_{m+1}(x) = 0 \quad \text{presque partout sur} \quad P_{m+1},$$

$$\text{mes}\, F_{m+1}(P_{m+1}) = 0.$$

On voit bien que $g_{m+1}(y)$ et $F_{m+1}(x)$ vérifient les mêmes conditions que les $g_k(y)$ et $F_k(x)$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$.

On définit ainsi une suite de fonctions continues

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_m(x),\ \ldots.$$

Cette suite est uniformément convergente puisque la différence $|F_{m+1}(x) - F_m(x)|$ est nulle sur P_m est inférieure à $\varepsilon_n^{(m)}$ dans le contigu $\delta_n^{(m)}$ à P_m, la série double $\sum\sum \varepsilon_n^{(m)}$ étant par hypothèse convergente.

Posons

$$\mathsf{F}(x) = \lim_{m \to \infty} F_m(x),$$

nous voyons que $\mathsf{F}(x)$ est continue.

On démontre facilement que

$$\mathsf{F}(x) = g[F(x)],$$

$g(y)$ étant une fonction continue et croissante telle que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. En effet, on a

$$F_1(x) = g_1[F(x)]$$

$$F_2(x) = g_2\{g_1[F(x)]\} = \bar{g}_2[F(x)]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_m(x) = \bar{g}_m[F(x)]$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

où $\bar{g}_m(y) = g_m\{g_{m-1} \cdots [g_2(g_1(y))]\}$, donc $\bar{g}_m(y)$ est continue, croissante et $\bar{g}_m(0) = 0$, $\bar{g}_m(1) = 1$.

Comme les fonctions $F_m(x)$ tendent vers la limite $\mathsf{F}(x)$ il est évident que les fonctions $\bar{g}_m(y)$ ont une limite que nous désignerons par $g(y)$. On a évidemment $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et

$$\mathsf{F}(x) = g[F(x)].$$

Les fonctions $\mathsf{F}(x)$ et $F(x)$ étant continues, il en est de même pour $g(y)$. Puisque toutes les fonctions $\bar{g}_m(y)$ sont croissantes, $g(y)$ est évidemment non décroissante; d'ailleurs elle n'est constante dans aucun intervalle. En effet, on a évidemment sur P_m

$$\mathsf{F}(x) = F_m(x)$$

d'où il résulte que pour tout y de $P'_m = F(P_m)$ on a

$$g(y) = \bar{g}_m(y)$$

donc $g(y)$ croît sur P'_m. Or, la somme des P'_m est d'après sa construction même partout dense dans le segment $[0,1]$ de l'axe OY, puisqu'il en est évidemment ainsi pour la somme des π'_m. Ainsi quel que soit l'intervalle δ contenu dans le segment $[0,1]$ de l'axe OY il existe un P'_m qui a des points dans δ. La fonction $g(y)$ étant croissante dans P'_m, elle ne peut être constante dans δ.

Il reste à démontrer que $\mathsf{F}'(x)=0$ presque partout. Or, $\mathsf{F}(x)$ étant la limite des $F_m(x)$ on peut écrire

$$\mathsf{F}(x)=F_m(x)+[F_{m+1}(x)-F_m(x)]+\dots$$

ou bien

$$\mathsf{F}(x)=F_m(x)+R_m(x)$$

où $R_m(x)$ vérifie toutes les conditions du lemme du n° 12. Donc $R'_m(x)=0$ sur P_m presque partout, et comme on a de même presque partout sur P_m l'égalité $F'_m(x)=0$, il en résulte

$$\mathsf{F}'(x)=0 \quad \text{presque partout sur } P_m.$$

Comme dans ce raisonnement m est quelconque et comme la somme $\sum_{m=1}^{\infty} P_m$ est de mesure égale à 1, il en résulte que l'égalité $\mathsf{F}'(x)=0$ a lieu presque partout dans $[0,1]$, c. q. f. d.

Remarque. — Ici, comme dans le cas de la déformation de l'axe OX, la dérivée, dans le cas général, est nécessairement *nulle* presque partout.

27. La représentation mixte d'une fonction continue arbitraire. — Les théorèmes du paragraphe précédent nous permettent d'indiquer deux formes nouvelles dans lesquelles on peut présenter chaque fonction continue[18]). Nous leur avons donné le nom de *formes mixtes* parce qu'elles contiennent simultanément des fonctions absolument continues et à variation bornée.

Tout d'abord, d'après le théorème sur la déformation de l'axe OX, quelle que soit la fonction continue $F(x)$ il existe une fonction monotone $x=\psi(t)$ telle que

$$\Phi(t)=F[\psi(t)]$$

a une dérivée $\Phi'(t)$ presque partout.

Désignons par $t=g(x)$ la fonction inverse de $x=\psi(t)$; $g(x)$ est donc aussi monotone. On a

$$F(x)=\Phi[g(x)].$$

[18]) Voir ma Note *Sur quelques formes mixtes dans la représentation finie d'une fonction continue arbitraire* (*Comptes Rendus* **188** (1929), p. 980).

Or, $\Phi(x)$ étant presque partout dérivable, elle est une somme de deux superpositions de fonctions absolument continues (n° 13). Donc

$$\Phi(t) = f_1[\varphi_1(t)] + f_2[\varphi_2(t)]$$

les f_i et φ_i étant absolument continues. D'ailleurs on sait que f_1 et f_2 peuvent être supposées croissantes (n° 5).

Or, une fonction à variation bornée de fonction monotone est encore à variation bornée, d'où il résulte que

$$\omega_1(x) = \varphi_1[g(x)] \quad \text{et} \quad \omega_2(x) = \varphi_2[g(x)]$$

sont des fonctions à variation bornée. Il en résulte que

$$F(x) = \Phi[g(x)] = f_1[\omega_1(x)] + f_2[\omega_2(x)],$$

donc *toute fonction continue* $F(x)$ *peut être représentée dans la forme*

$$F(x) = f_1[\omega_1(x)] + f_2[\omega_2(x)]$$

où f_1 *et* f_2 *sont des fonctions absolument continues et croissantes,* $\omega_1(x)$ *et* $\omega_2(x)$ *des fonctions à variation bornée.*

On peut remarquer que d'après le théorème II du n° 25 toute fonction de la forme $f[\omega(x)]$, f étant absolument continue et monotone et $\omega(x)$ à variation bornée, est une fonction jouissant de la propriété T_1 de M. Banach. Donc, *toute fonction continue peut être considérée comme la somme de deux fonctions jouissant de la propriété* T_1.

Le théorème sur la déformation de l'axe OY nous donne une autre forme mixte. Comme il existe pour chaque fonction continue $F(x)$ une fonction monotone $g(y)$ telle que la fonction composée

$$\Phi(x) = g[F(x)]$$

est presque partout dérivable, en désignant par $y = \psi(u)$ la fonction inverse de $g(y)$, on a

$$F(x) = \psi[\Phi(x)],$$

ψ étant monotone et $\Phi(x)$ presque partout dérivable. On a donc (n° 13)

$$\Phi(x) = f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)]$$

les f_i et φ_i étant absolument continues. Il en resulte que *toute fonction continue* $F(x)$ *peut être représentée dans la forme*

$$F(x) = \psi\{f_1[\varphi_1(x)] + f_2[\varphi_2(x)]\},$$

ψ *étant une fonction monotone, et les* f_i *et* φ_i *absolument continues.*

On peut remarquer que, dans le cas général, la fonction ψ ne peut pas être supposée *absolument continue* puisque, d'après le dernier théorème du n° 16, une fonction ridée ne serait plus représentable dans la forme indiquée.

Conclusion.

Nous avons considéré dans ce Mémoire la représentation des fonctions continues arbitraires au moyen d'un nombre fini de fonctions absolument continues ainsi que certaines représentations au moyen de fonctions à variation bornée. Cette dernière question est loin d'être résolue et nous avons posé les problèmes qui s'y rattachent.

Il est très important de remarquer que partout dans ce travail nous n'avons parlé que de l'*existence* des représentations d'une forme donnée: il y a dans nos constructions trop d'arbitraire dans le choix des éléments initiaux et des paramètres, et cet arbitraire n'est pas éliminé quand on passe à la limite. C'est pourquoi ce travail ne considère pas le problème de la recherche de certaines notions opératoires simples qui permettraient d'obtenir immédiatement des représentations canoniques finies d'une fonction continue. Un exemple classique d'une telle représentation canonique est la décomposition de chaque fonction à variation bornée en différence de deux fonctions monotones. Les notions de variation totale positive et variation totale négative permettent d'obtenir cette décomposition immédiatement. Or, dans ces notions il y a d'abord de l'arbitraire dans le choix des points de division du segment, mais cet arbitraire est éliminé à la limite.

Ainsi le problème de la recherche du nombre minimum d'opérations nécessaires pour représenter une fonction continue arbitraire sous forme finie reste à résoudre.

(Eingegangen am 18. 10. 1929.)

Untersuchungen über den Integralbegriff.

Von

A. Kolmogoroff in Moskau.

Das Hauptziel der vorliegenden Untersuchungen besteht in der Klärung der logischen Natur der Integrationsprozesse. Wenn dabei außer der Vereinigung der verschiedenen bereits vorhandenen Theorien auch eine Verallgemeinerung des Integralbegriffes entstanden ist, so liegt der Grund dafür wohl darin, daß öfters die Verallgemeinerung eines Begriffes zum Verständnis seines eigentlichen Inhaltes notwendig ist[1]). Ich glaube übrigens, daß diese Verallgemeinerungen auch mancher Anwendungen fähig sind, obwohl ich den Fortschritt, der durch die allgemeinere Auffassung erreicht werden dürfte, hauptsächlich in der Einfachheit und Klarheit erblicke, die die neuen Begriffe mit sich bringen.

Mein Interesse für die allgemeinen Probleme der Integrationstheorie verdanke ich Herrn Professor N. Lusin. Ich möchte überdies meinen Dank Herrn V. Glivenko aussprechen, mit dem ich zahlreiche Besprechungen hatte, die sich auf den Inhalt dieser Arbeit bezogen und denen ich manche interessante Bemerkung entnommen habe.

Erstes Kapitel.

Einleitende Betrachtungen.

§ 1.

Das, was unter dem Wort „Integration" heutzutage verstanden wird, ist eigentlich kein logischer Begriff im strengen Sinne, es ist vielmehr ein Sammelbegriff für ziemlich viele Operationen, deren jede eine eigene Definition besitzt. Diese Operationen haben in ihrer Mehrzahl die gemeinsame Eigenschaft, daß im Falle der Integration einer stetigen Funktion sie das Integral im klassischen Sinne ergeben.

[1]) Vgl. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, préface à la deuxième édition.

Es scheint mir durchaus wahrscheinlich zu sein, daß diese Mannigfaltigkeit von Definitionen nicht auf eine natürliche Weise beseitigt werden kann, daß also das Problem eines natürlichen und gleichzeitig alle bisherigen Integraldefinitionen als Spezialfälle umfassenden Integralbegriffes als ein ziemlich aussichtsloses zu betrachten ist.

Insbesondere glaube ich, daß man bei einem Versuch einerseits die Integraldefinitionen vom Stieltjesschen Typ für auf abstrakten Mengen definierte Funktionen (so, wie sie neuerdings von Fréchet[2]) gegeben sind) und andererseits das Denjoysche Integral in einem umfassenderen Integralbegriff einzuordnen, notwendig auf Schwierigkeiten prinzipieller Art stoßen würde: ein solcher Begriff müßte ja — da er für Funktionen gelten soll, die auf beliebigen abstrakten Mengen definiert sind — nur solche Konstruktionen benutzen, die auf den allgemeinen Eigenschaften von Mengen und Funktionen beruhen, während er gleichzeitig die den Ordnungsrelationen auf der Zahlengeraden entspringenden Eigentümlichkeiten des Denjoyschen Integrationsverfahrens nicht außer acht lassen darf.

Die Möglichkeit, den Verallgemeinerungsprozeß eines mathematischen Begriffes gleichzeitig in mehreren Richtungen zu führen, darf nicht als etwas Neues betrachtet werden: man begegnet ihr zum Beispiel, wenn man verschiedene Elemente des Begriffes der natürlichen Zahl zu Ausgangspunkten grundsätzlich verschiedener Verallgemeinerungsprozesse macht und so einerseits transfinite Ordnungs- bzw. Kardinalzahlen, andererseits die reellen Zahlen erhält.

Die Integration im Sinne von Denjoy (von ihm selbst „Totalisation“ genannt) ist eine Verallgemeinerung des klassischen Integrationsverfahrens, welches dabei als Konstruktion der primitiven Funktion zu der gegebenen aufgefaßt wird. Das ist ein — und zwar ein völlig motivierter und natürlicher — Verallgemeinerungsweg, welcher, wenn man will, als das letzte Glied einer mit der Newtonschen Auffassung des Integrals beginnenden Kette betrachtet werden kann.

Ein anderer und noch häufiger beschrittener Weg geht von der allgemeinen und einigermaßen vagen Idee aus, der zufolge die Integration als ein Summationsprozeß aufzufassen ist, welcher mit unendlich vielen unendlich kleinen Größen zu tun hat, die den unendlich kleinen Teilchen des Integrationsbereiches entsprechen. Diese Idee, der man auch das Wort „Integral“ verdankt, wurde in einer ziemlich mysteriösen, dafür aber völlig allgemeinen Form von Leibniz gegeben und erhielt einen den heutigen Mathematiker einigermaßen befriedigenden Ausdruck zum erstenmal bei

---

[2]) *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait.* Bull. de la Soc. Math. de France **43** (1915), p. 248.

Cauchy; die Mehrzahl der so überaus zahlreichen späteren Arbeiten, die sich mit dem Integrationsproblem befassen, kann als eine allmähliche Entwicklung dieser Idee von Leibniz betrachtet werden. Zu dem aus dieser Quelle fließenden Strom mathematischer Begriffe gehört auch die Fréchetsche Integraldefinition, die wir als Seitenstück zum Denjoyschen Integral bereits erwähnt haben.

Die Herstellung einer möglichst allgemeinen Integraldefinition, welche in einer den modernen Forderungen nach Strenge entsprechenden Form den Leibnizschen Integralbegriff realisiert und dabei seinen universellen Charakter, soweit wie möglich, bewahrt, ist Zweck der vorliegenden Arbeit,

Die beiden Richtungen, in denen die Verallgemeinerung des Integralbegriffes sich bis jetzt entwickelte, sind nicht die einzigen, die man vernünftigerweise und unter Beibehaltung hinreichend vieler Eigenschaften des klassischen Integrals einschlagen könnte. Ich möchte insbesondere bemerken, daß, wenn man sich vom Problem der Bestimmung des Mittelwertes einer Funktion leiten läßt — dessen Lösung in klassischen Fällen bekanntlich durch ein Integral gegeben wird —, man zu einer neuen äußerst allgemeinen Operation gelangt, welche u. a. in ganz konkreten Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie mit Nutzen angewandt werden kann. Diese Operation (die natürlich die klassische Integration als Spezialfall enthält) hoffe ich zum Gegenstand einer weiteren Arbeit zu machen und will hier nur noch auf die bemerkenswerte Tatsache hinweisen, daß selbst für eine reelle Funktion $f(x)$ einer reellen Variablen der sich als einzig natürlich darbietende Mittelwert auf der Einheitsstrecke mit dem Denjoyschen Intgral (genommen über dieselbe Strecke) nicht übereinzustimmen braucht.

Diese Sachlage, bei der man mit zwei Integraldefinitionen zu tun hat, die beide als natürliche und wichtige Verallgemeinerungen der klassischen Definition zu betrachten sind und dennoch für eine und dieselbe Funktion zwei verschiedene Werte liefern können, begründet, wie mir scheint, die am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Ansicht über die Hoffnungslosigkeit eines alle sinnvollen Integraldefinitionen umfassenden universellen Integralbegriffes.

Aber auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit begegnen wir zwei Definitionen — nämlich den Integraldefinitionen der Kapitel II und III, welche für einige Funktionen nicht übereinstimmende Werte liefern (siehe Kap. III, Nr. 14).

Es sei allerdings bemerkt, daß die Fälle des Nichtübereinstimmens der beiden letztgenannten Integraldefinitionen nur durch ad hoc konstruierte Mengenfunktionen realisiert werden, von welchen man nicht weiß, ob ihre Integration überhaupt ein Interesse beanspruchen darf.

§ 2.

Sei x eine im Intervall (a, b) variierende Größe. Leibniz setzt voraus, daß jedem Wert von x eine unendlich kleine Größe dy zugeordnet ist; indem man alle diese dy addiert, erhält man die Leibnizsche *Summa Omnium* oder das Integral von dy über die Strecke (a, b). Der Sinn dieser Definition war selbst für die Mathematiker des XVIII. Jahrhunderts nicht genügend klar, so daß man sich bis Cauchy genötigt sah, unter Aufgabe des Leibnizschen Ansatzes die Integration als Umkehrung der Differentiation zu definieren.

Cauchy hat als erster die Leibnizsche Definition aus der Sprache der Metaphysik in die Sprache der Mathematik übersetzt und so die Möglichkeit gegeben — sei es auch nur im Spezialfall $dy = f(x)\,dx$ — auf dem Wege einer tatsächlichen Rechnung das Integral

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

als Limes der bekannten Summenausdrücke

$$(2) \qquad \Sigma f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

zu ermitteln.

Wir bezeichnen die Intervalle (x_{i-1}, x_i) mit Δ_i, die Länge des Intervalls Δ mit $l(\Delta)$ und mit $f(\Delta)$ eine mehrdeutige Intervallfunktion, die für jedes Intervall Δ alle Werte annimmt, welche $f(x)$ in Δ durchläuft; dann erhält der Ausdruck (2) die Gestalt

$$(3) \qquad \Sigma f(\Delta_i)\, l(\Delta_i) = \Sigma \varphi(\Delta_i).$$

Die Leibnizsche Idee wird also folgendermaßen verwirklicht: Für jeden x-Wert in (a, b) ein unendlich kleines dy zu bestimmen, heißt eine Intervallfunktion $\varphi(\Delta)$ festzulegen, welche *unendlich klein* wird, wenn Δ sich in den Punkt x zusammenzieht; die Summe aller dy zu finden, bedeutet den Limes der Summenausdrücke (3) bei unendlich fein werdenden Zerlegungen der Strecke (a, b) in die Teilstrecken zu ermitteln.

Es treten folgende vier Verallgemeinerungsmöglichkeiten für das Cauchysche Integrationsverfahren auf:

1. Anstatt der Intervallfunktion $\varphi(\Delta) = f(\Delta)\, l(\Delta)$ kann man beliebige Intervallfunktionen $\varphi(\Delta)$ in Betracht ziehen;

2. der Integrationsbereich kann in beliebige (endlich- oder abzählbarviele) Mengen — und nicht notwendig in Intervalle — zerlegt werden;

3. der Integrationsbereich braucht nicht notwendig eine Strecke der Zahlengerade zu sein, es können vielmehr aus Elementen beliebiger Natur

bestehende Mengen als Bereiche, über die integriert wird, zugelassen werden;

4. schließlich kann man auch die Werte der Funktion $\varphi(\Delta)$ unter den Elementen eines beliebigen Vektorraumes und nicht notwendig unter den reellen Zahlen wählen.

In der ersten dieser vier Richtungen ist in der Gestalt des Stieltjesschen Integrals und seiner unmittelbaren Verallgemeinerungen ein großer Fortschritt erreicht worden: anstatt der Länge $l(\Delta)$ wurde eine beliebige additive Intervallfunktion eingeführt. Allerdings finden wir die allgemeine Fragestellung zuerst bei J. C. Burkill[8]), welcher 1924 für eine beliebige Intervallfunktion $\varphi(\Delta)$ das Integral

$$\int_a^b d\varphi(\Delta)$$

als den Limes der Summenausdrücke

$$\sum \varphi(\Delta_i)$$

bei unendlich fein werdenden Zerlegungen von (a, b) in Teilstrecken Δ_i definiert hat. Burkill hat sich dabei auf die Betrachtung eindeutiger Funktionen $\varphi(\Delta)$ beschränkt, wodurch ihm die Möglichkeit genommen wurde, die klassische Cauchysche Integraldefinition als Spezialfall der seinigen zu erhalten.

In der vorliegenden Arbeit werden dagegen in systematischer Weise mehrdeutige Funktionen zugelassen, und es werden — ebenfalls systematisch — die Funktionen $f(x)$ durch Intervall- — sogar allgemeiner — durch Mengenfunktionen $f(E)$ ersetzt, welche als ihren Wert auf E den Inbegriff der dortselbst von $f(x)$ angenommenen Werte annehmen; erst dieser Weg liefert uns eine allgemeine Integrationstheorie, die unter dem Integralzeichen nur *eine* Mengenfunktion kennt. Die Zerspaltung der zu integrierenden Funktion in zwei Faktoren: eine Punkt- und eine Mengenfunktion, welche bis heute sämtliche Integrationstheorien beherrschte, erscheint somit als eine künstliche und unmotivierte Einschränkung, welche gleichzeitig die Allgemeinheit der Probleme und die Einfachheit der Methode unnötig beeinträchtigt.

Den wichtigsten Fortschritt auf dem zweiten Wege verdankt man bekanntlich Lebesgue, welcher das Integral (1) als den Limes von Summenausdrücken

$$\sum f(E_i)\, m(E_i) \tag{4}$$

---

[8]) *The derivates of functions of intervals*, Fund. Math. 5 (1924), p. 321.

definiert hat; die E_i sind dabei meßbare Mengen, in die die Strecke (a, b) zerlegt wird, und $m(E)$ ist das Maß der Menge E. Lebesgue verlangt in seiner Definition, daß der Ausdruck (4) für Zerlegungen von einer näher präzisierten Art gegen einen Limes konvergiert. Die allgemeine Definition des Grenzwertes eines von einer Zerlegung der Strecke (a, b) abhängenden Ausdruckes bei „unbeschränkter Fortsetzung" der Zerlegung (vgl. Kap. II, Nr. 8) ist aber von E. H. Moore[4]) gegeben worden. E. H. Moore weist selbst darauf hin, daß der von ihm eingeführte Limesbegriff eine besonders einfache Form der Lebesgueschen Integraldefinition ermöglicht und zu Verallgemeinerungen desselben führt. Einige Verallgemeinerungen des klassischen Stieltjesschen Integrals hat auf diese Weise H. L. Smith[5]) erhalten.

Was die Allgemeinheit der zulässigen Integrationsbereiche betrifft, so hat — nach einer Reihe von Untersuchungen verschiedener Autoren — Fréchet in der bereits zitierten Arbeit endgültig festgestellt, daß die ganze allgemeine Integrationstheorie ohne jegliche Einschränkung dieser Allgemeinheit entwickelt werden kann.

Das, was in diesen ersten drei Richtungen in der Theorie der Integration bis jetzt gemacht worden ist, wurde bei der Aufstellung der in der vorliegenden Arbeit aufgestellten Definition berücksichtigt. Dagegen ist der noch übrig bleibende vierte Weg — die Integration von Funktionen, deren Werte einem willkürlichen Vektorraum angehören — bewußt außer Betracht gelassen. Die Mehrzahl der Resultate läßt sich auch für diesen Fall verallgemeinern; jedoch würde die Durchführung dieser Verallgemeinerung die Darstellung unnötig überlasten.

§ 3.

Im vorigen Paragraphen haben wir denjenigen Entwicklungsweg des Integralbegriffes verfolgt, welcher mit der Leibnizschen Idee der Summa Omnium beginnt; dabei haben wir gesehen, daß diese ganze Entwicklungslinie eine konsequente und zwangläufige Entfaltung der ursprünglichen Leibnizschen Idee war, obgleich manche neuere Definitionen sehr weit von der Anfangsidee entfernt zu sein scheinen.

Anders steht die Sache mit dem Begriff des *unbestimmten Integrals*: die das unbestimmte Integral als Funktion eines Punktes betrachtende klassische Auffassung hängt wesentlich mit der Integration über ein lineares

---

[4]) E. H. Moore and H. L. Smith, A general Theory of Limity. Amer. Journ. of Math. **44** (1922), p. 102—121; vgl. auch Schatunowsky, Einführung in die Analysis, 1923 (russisch).

[5]) On the existence of Stieltjes Integral, Trans. of the Amer. Math. Soc. **27** (1925), p. 491—515.

Intervall zusammen, und kann nicht einmal für den Fall mehrfacher Integrale verallgemeinert werden. Erst in der letzten Zeit ist man zu der allgemeineren und gleichzeitig einfacheren Auffassung gekommen, die im unbestimmten Integral eine Funktion der Menge, über die integriert wird, erblickt. Wir werden im folgenden nur mit der letztgenannten Auffassung zu tun haben.

Im Falle des Stieltjes-Radonschen Integrals handelt es sich um zwei additive Mengenfunktionen $\varphi(E)$ und $\psi(E)$ und eine Punktfunktion $f(x)$, die miteinander durch folgende Relation

$$\psi(E) = \int_E f(x)\, d\varphi(E), \tag{1}$$

$$\frac{d\psi(E)}{d\varphi(E)} = f(x) \tag{2}$$

verbunden sind. Die zweite dieser Relationen findet dabei nur „fast überall" statt. Es ist dazu noch zu bemerken, daß der Begriff der Ableitung einer Mengenfunktion in bezug auf eine andere wesentlich von den geometrischen Eigenschaften des Raumes, in welchem die entsprechenden Mengen liegen, abhängt. Immerhin wird in einem Anhang zu dieser Arbeit gezeigt, daß auch im Falle eines auf einer abstrakten Menge (ohne jegliche Erklärung geometrischer Begriffe) definierten Integrals vom Stieltjes-Typ man die Ableitung (2) so definieren kann, daß (2) aus (1) folgt.

Die mit den Formeln (1), (2) zusammenhängende allgemeine Auffassung des Integralbegriffes wird insbesondere von Lebesgue vom Standpunkt ihrer grundlegenden Bedeutung für Probleme der *Physik* hervorgehoben. Wir werden jedoch sehen, daß, *rein logisch* gesprochen, dieser Integralbegriff sich als Spezialfall in das allgemeine Integrationsverfahren

$$\psi(E) = \int_E \varphi(dE) \tag{3}$$

mit einer im allgemeinen nicht additiven Mengenfunktion $\varphi(E)$ einordnet. Ich hoffe in einer späteren Arbeit zu zeigen, daß diese noch allgemeinere Auffassung auch *mathematisch* gerechtfertigt ist, und daß sie namentlich in der Maßtheorie und in der allgemeinen Theorie der Quadratur der Flächen von großem Nutzen ist.

Im Falle (3), wo zwei Mengenfunktionen auftreten, von denen nur die eine additiv ist, kann die Integration natürlich mit keinem Differentiationsverfahren verbunden werden. Nichtsdestoweniger sind die beiden Funktionen φ und ψ auch in diesem Fall durch eine Relation verbunden, die einen ausgesprochenen differentialen Charakter hat, und die wir im folgenden unter dem Namen der *Differentialäquivalenz* einführen werden.

Zweites Kapitel.

Erste Integrationstheorie. (Abzählbare Zerlegungen.)

§ 1.

Definitionen und einleitende Betrachtungen.

1. Ein Mengensystem mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt von je zwei Mengen des Systems wieder dem System angehört, soll ein *M-Bereich* (= ein multiplikativer Bereich) heißen und durch $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden*).

2. Jede *Zerlegung* einer zum gegebenen M-Bereich gehörenden Menge E in endlich- oder abzählbarviele disjunkte Summanden aus demselben Bereich:

$$E = \sum_n E_n$$

soll durch

$$\mathfrak{D} E = \sum_n E_n$$

bezeichnet werden; die Mengen E_n heißen dabei Elemente der Zerlegung $\mathfrak{D}$.

3. Jede Zerlegung $\mathfrak{D} E$ mit den Elementen E_n induziert in einer Teilmenge E' von E eine eindeutig bestimmte Zerlegung

$$\mathfrak{D} E' = \sum_n E'_n = \sum_n E' \cdot E_n,$$

welche mit demselben Symbol $\mathfrak{D}$ bezeichnet wird.

4. Eine Zerlegung $\mathfrak{D}' E$ heißt *Fortsetzung* der Zerlegung $\mathfrak{D} E$, falls jedes Element E'_n von $\mathfrak{D}'$ in einem Element E von $\mathfrak{D}$ als Teilmenge enthalten ist; in Zeichen: $\mathfrak{D}' > \mathfrak{D}$. Offenbar folgt aus $\mathfrak{D}'' > \mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}' > \mathfrak{D}$ die Ungleichung $\mathfrak{D}'' > \mathfrak{D}$.

5. Unter dem *Produkt* zweier Zerlegungen $\mathfrak{D}' E$ und $\mathfrak{D}'' E$ wird die Zerlegung

$$[\mathfrak{D}' \mathfrak{D}''] E = \sum_{nm} E'_n E''_m$$

verstanden, wobei E'_n und E''_m bzw. die Elemente von $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}''$ bedeuten. Vermöge der Grundeigenschaft der M-Bereiche gehören die Elemente letzterer Zerlegung unserem M-Bereich an. Das Produkt zweier Zerlegungen ist offenbar eine gemeinsame Fortsetzung dieser beiden Zerlegungen.

6. Wir definieren noch die *Summe* von Zerlegungen: wenn

$$\mathfrak{D} E = \sum_n E_n,$$

$$\mathfrak{D}^{(n)} E_n = \sum_m E_{nm}$$

*) Wenn im Mengensystem $\mathfrak{M}$ zwei zueinander fremde Mengen enthalten sind, so ist nach Voraussetzung auch die *leere Menge* in $\mathfrak{M}$ enthalten.

und

$$\mathfrak{D}'E = \sum_{nm} E_{nm} = \sum_{n}\sum_{m} E_{nm}$$

ist, so soll

$$\mathfrak{D}'E = \sum_{n} \mathfrak{D}^{(n)} E_n$$

definitionsgemäß gesetzt werden. Offenbar kann jede Fortsetzung $\mathfrak{D}'E$ der Zerlegung $\mathfrak{D}E$ in einer solchen Form dargestellt werden und dabei auf eine einzige Weise; die Zerlegungen $\mathfrak{D}^{(n)}E_n$ heißen sodann *Komponenten* der Fortsetzung $\mathfrak{D}'E$. Auch die Umkehrung dieser Behauptung gilt: jede Zerlegung $\sum \mathfrak{D}^{(n)} E_n$ ist offensichtlich eine Fortsetzung der Zerlegung $\mathfrak{D}E$.

7. Die Gesamtheit der Elemente aller Zerlegungen $\mathfrak{D}E$ der Menge E wird durch $\mathfrak{M}E$ bezeichnet. Das Mengensystem $\mathfrak{M}E$ ist selbst ein M-Bereich: falls in der Tat E' und E'' Elemente von $\mathfrak{M}E$ sind, so treten sie als Elemente gewisser Zerlegungen $\mathfrak{D}'E$ und $\mathfrak{D}''E$ auf; der Durchschnitt von E' und E'' ist sodann ein Element von $[\mathfrak{D}'\mathfrak{D}'']E$.

Wenn die Menge G ein Element von $\mathfrak{M}E$ ist, so ist $\mathfrak{M}G$ in $\mathfrak{M}E$ enthalten.

8. Man nehme jetzt an, daß auf einer gewissen Menge von Zerlegungen $\mathfrak{D}E$ der Menge E eine ein- oder mehrdeutige Funktion $f(\mathfrak{D})$ definiert sei. Wir nennen nach E. H. Moore die Zahl J den *Limes von $f(\mathfrak{D}E)$ bei unbeschränkter Fortsetzung der Zerlegung $\mathfrak{D}E$*, in Zeichen

$$J = l[f(\mathfrak{D}E)],$$

falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $\mathfrak{D}E$ existiert, daß für jedes $\mathfrak{D}' > \mathfrak{D}$ die Funktion $f(\mathfrak{D}')$ definiert ist und der Ungleichung

$$\sup |f(\mathfrak{D}') - J| < \varepsilon$$

genügt [7]).

Wie leicht ersichtlich, kann mehr als ein Limes J unmöglich existieren: falls zwei Limites J' und J'' vorhanden wären, würde man auch zwei Zerlegungen $\mathfrak{D}'E$ und $\mathfrak{D}''E$ derart finden können, daß für ihr Produkt (das ja die gemeinsame Fortsetzung der beiden Zerlegungen ist) die Ungleichungen

$$\sup |f[\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''] - J'| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup |f[\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''] - J''| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gelten, woraus $|J' - J''| < \varepsilon$ folgt; da alles bei jedem positiven ε stattfinden soll, muß $J' = J''$ sein.

9. Ein Limes existiert für $f(\mathfrak{D}E)$ dann und nur dann, wenn das *Cauchysche Konvergenzkriterium* erfüllt ist, nämlich: es gibt für jedes

[7]) Siehe die in [4]) zitierte Arbeit von Moore und Smith.

$\varepsilon > 0$ eine „ε-reguläre Zerlegung $\mathfrak{D}E$" — d. h. eine solche, daß aus $\mathfrak{D}' > \mathfrak{D}$

$$\sup |f(\mathfrak{D}E) - f(\mathfrak{D}'E)| < \varepsilon$$

folgt[*]).

10. Es ist leicht, die obige Definition für den Fall $J = \pm\infty$ zu verallgemeinern: man setzt nämlich

$$l[f(\mathfrak{D}E)] = +\infty,$$

falls für jedes $H < +\infty$ ein solches $\mathfrak{D}E$ existiert, daß für $\mathfrak{D}' > \mathfrak{D}$

$$\inf [f(\mathfrak{D}'E)] > H$$

ausfällt.

In analoger Weise definiert man den negativ unendlichen Limes.

§ 2.

Definition und einfachste Eigenschaften des Integrals.

11. Die Funktion $f(E)$ sei definiert für alle Elemente der Zerlegung DE. Wir führen die Bezeichnung ein:

$$(Rf)(\mathfrak{D}E) = \sum_n f(E_n),$$

im Falle der Mehrdeutigkeit von f wird auch (Rf) mehrdeutig (man erhält verschiedene Werte von (Rf), indem man für jedes E_n einen beliebigen für E erklärten Wert der Funktion f wählt). Damit die obige Bezeichnung einen Sinn hat, wird vorausgesetzt, daß die Reihe rechts bei jeder Wahl der Funktionswerte $f(E_n)$ eine absolut konvergente sei[*]).

$(Rf)(\mathfrak{D}E)$ könnte die *Riemannsche Summe* von f in bezug auf die Zerlegung $\mathfrak{D}E$ genannt werden.

12. *Als Integral von f über die Menge E in bezug auf den gegebenen Bereich* $\mathfrak{M}$ soll definitionsgemäß gesetzt werden

$$(\mathfrak{M})\int_E f(dE) = l[(Rf)(\mathfrak{D}E)],$$

wobei der Limes im Sinne der Nr. 8 verstanden ist.

Das $(\mathfrak{M})$ vor dem Integralzeichen wird man meist fallen lassen können, weil alle Betrachtungen, in denen gleichzeitig mehrere Integrale vorkommen, sich immer auf einen und denselben M-Bereich beziehen werden.

---

[*]) Dabei nimmt die Differenz zweier mehrdeutiger Ausdrücke jeden Wert an, welcher als Differenz zweier Werte der gegebenen Ausdrücke auftritt.

[*]) Wir nehmen dabei an, daß *für die leere Menge alle in Betracht kommenden Funktionen gleich Null sind.* Diese Verabredung ist für jede additive Theorie von Mengenfunktionen nützlich; insbesondere würde sonst keine Funktion integrierbar.

13. Offenbar kann ein Integral nicht existieren, ohne daß die Funktion (Rf) für alle Fortsetzungen einer Zerlegung $\mathfrak{D}E$ definiert sei. Was dabei die Funktion f betrifft, so werden bei der Integraldefinition jedenfalls nur ihre Werte für Elemente des Systems $\mathfrak{M}E$ benutzt, wobei schon die Werte genügen, die sie für sämtliche Elemente aller Fortsetzungen einer gewissen Zerlegung $\mathfrak{D}E$ annimmt. Den Bereich dieser letzteren Mengen bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}\mathfrak{D}E$. Es ist klar, daß $\mathfrak{M}\mathfrak{D}E$ ein Teilsystem von $\mathfrak{M}E$ und selbst ein M-Bereich ist. Eine Mengenfunktion, welche für alle Elemente eines $\mathfrak{M}\mathfrak{D}E$ definiert ist, soll eine auf $\mathfrak{M}E$ in differentialer Weise — oder kurz *differential-definierte* Funktion heißen. Sodann besteht die notwendige Bedingung dafür, daß das Integral von f über E existiert, in der Eigenschaft von f, auf $\mathfrak{M}E$ in differentialer Weise definiert zu sein.

14. *Eigenschaften des Integrals.*

I. *Falls das Integral von f existiert, so existiert auch das Integral von f über jede Menge aus $\mathfrak{M}E$.*

Der Beweis dieser Eigenschaft wird zusammen mit dem der folgenden Eigenschaft geführt werden.

II. *Das Integral ist eine additive Mengenfunktion, d. h. für jede Zerlegung DE gilt:*

$$\int_E f(dE) = \sum_n \int_{E_n} f(dE_n); \tag{1}$$

dabei folgt aus der Existenz des Integrals auf der linken Seite dieser Gleichung die Existenz sämtlicher Integrale auf der rechten Seite (letztere Behauptung ist mit der Behauptung I identisch), *sowie die absolute Konvergenz der Reihe dieser Integrale.*

Beweis. Man nehme in der Tat an, daß das Integral von f über E existiert, d. h. daß $(Rf)(\mathfrak{D}E)$ bei unbeschränkter Fortsetzung von $\mathfrak{D}E$ zu einem bestimmten Limes konvergiert. Dann existiert wegen Nr. 9 für jedes $\varepsilon > 0$ eine ε-reguläre Zerlegung $\mathfrak{D}'E$, für deren jede Fortsetzung $\mathfrak{D}''E$

$$|(Rf)(\mathfrak{D}''E) - (Rf)(\mathfrak{D}'E)| < \varepsilon$$

ist. Ich behaupte, daß die Zerlegung $\mathfrak{D}'E_n$ ebenfalls ε-regulär ist. Es sei in der Tat $\mathfrak{D}'''E_n$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{D}'E_n$; dann gilt, wie leicht ersichtlich,

$$\begin{aligned}|(Rf)(\mathfrak{D}'''E_n)-(Rf)(\mathfrak{D}'E_n)| &= |(Rf)(\mathfrak{D}'''E_n+\sum_{m\neq n}\mathfrak{D}'E_m)-(Rf)\sum_m(\mathfrak{D}'E_m)|\\ &= |(Rf)(\mathfrak{D}^{IV}E)-(Rf)(\mathfrak{D}'E)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{D}^{IV}E$ offenbar eine Fortsetzung von $\mathfrak{D}'E$ ist.

Da für jedes ε eine ε-reguläre Zerlegung $\mathfrak{D}'E_n$ existiert, so existiert auch der Limes von $(Rf)(\mathfrak{D}E_n)$, d. h. das Integral J_n von f über E_n für jedes n. Wir wählen für jedes n eine solche Zerlegung $\mathfrak{D}_n'E_n$, daß für jede Fortsetzung $\mathfrak{D}_n''E_n$

$$|(Rf)(\mathfrak{D}_n''E_n) - J_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ist. Wir setzen jetzt

$$\mathfrak{D}'E \equiv \sum_n \mathfrak{D}_n'E_n.$$

Für jede Fortsetzung $\mathfrak{D}''E \equiv \sum_n \mathfrak{D}_n''E_n$ dieser Zerlegung gilt offenbar die Ungleichung

$$|(Rf)(\mathfrak{D}''E) - \sum_n J_n| = \sum_n |(Rf)(\mathfrak{D}_n''E_n) - J_n| < \varepsilon,$$

aus welcher folgt, daß das Integral von f über E den Wert $\sum_n J_n$ hat, w. z. b. w.

III. $$\int_E [f_1(dE) + f_2(dE)] = \int_E f_1(dE) + \int_E f_2(dE),$$

wobei aus der Existenz der rechten Seite die Existenz der linken folgt.

IV. $$\int_E k f(dE) = k \int_E f(dE).$$

V. *Wenn $f_1(E) \geqq f_2(E)$ für alle Mengen, für die beide Funktionen definiert sind*[10]), *ausfällt, so ist auch*

$$\int_E f_1(dE) \geqq \int_E f_2(dE).$$

VI. *Das Integral einer auf $\mathfrak{M}E$ additiven Funktion ist mit ihr identisch.*

VII. *Es seien eine Funktion f und eine Funktionenfolge $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ derart gegeben, daß*

$$\sup[(R|f_n - f|)(\mathfrak{D}E)] \to 0, \quad (n \to \infty)\ ^{11}),$$

dann ist

$$\int_E f_n(dE) \to \int_E f(dE), \quad (n \to \infty),$$

wobei aus der Existenz der Integrale auf der linken Seite letzterer Relation die Existenz des Integrals auf der rechten Seite folgt.

Alle diese Eigenschaften bedürfen kaum eines Beweises.

---

[10]) Dabei bedeutet die Ungleichung $f_1(E) > f_2(E)$, daß jeder Wert von $f_1(E)$ größer als alle Werte von $f_2(E)$ ist.

[11]) Das Zeichen *sup* bedeutet hier die obere Grenze der Werte $(R|f_n - f|)$ bei allen $\mathfrak{D}E$ und einem festen n.

§ 3.

Der Begriff der Differentialäquivalenz und die zweite Definition des Integrals.

15. Wir sahen, daß, wenn f über E integrierbar und folglich auf einem gewissen $\mathfrak{M}\mathfrak{D}E$ definiert ist, ihr Integral

$$F(G)=\int_G f(dG)$$

eine additive Funktion ist, welche für alle Mengen G des Systems $\mathfrak{M}E$ definiert ist. Es entsteht natürlich die Frage: Welches sind die Beziehungen zwischen den Funktionen f und F? Die Antwort auf diese Frage ergibt sich mit Hilfe folgender

Definition: *Die auf $\mathfrak{M}E$ differential-definierten Funktionen $f(G)$ und $g(G)$ heißen differential-äquivalent auf $\mathfrak{M}E$, wenn für jedes $\varepsilon>0$ eine solche Zerlegung $\mathfrak{D}E$ existiert, daß für jedes $\mathfrak{D}'E>\mathfrak{D}E$*

$$\sup\sum|f(E_n')-g(E_n')|<\varepsilon$$

ist.

Die Eigenschaft der Differentialäquivalenz kann kürzer in folgenden beiden Formen ausgesprochen werden:

$$l[(R\,|f-g|)(DE)]=0,$$

oder

(1) $$\int_E|f(dE)-g(dE)|=0.$$

Wir führen endlich noch folgende Bezeichnung für die Differentialäquivalenz auf $\mathfrak{M}E$ zweier Funktionen f und g ein:

$$f(dE)=g(dE)(\mathfrak{M}E),$$

wobei $(\mathfrak{M}E)$ in Fällen, wo kein Mißverständnis zu erwarten ist, weggelassen wird.

16. Die Differentialäquivalenz genügt der Transitivitätsbedingung, d. h. es folgt aus

$$f(dE)=g(dE)\quad\text{und}\quad g(dE)=h(dE),$$

daß

$$f(dE)=h(dE)$$

ist.

Es existieren in der Tat $\mathfrak{D}_1E$ und $\mathfrak{D}_2E$ derart, daß für ihre Fortsetzung $\mathfrak{D}_1'E$ und $\mathfrak{D}_2'E$ die Ungleichungen

$$\sup(R\,|f-g|)(\mathfrak{D}_1'E)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup(R\,|g-h|)(\mathfrak{D}_2'E)<\frac{\varepsilon}{2}$$

bestehen. Man sieht nun ohne Mühe ein, daß für jede Fortsetzung $\mathfrak{D}_3' E$ der Zerlegung $\mathfrak{D}_3 E \equiv [\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2] E$ die Ungleichung

$$\sup (R \,|\, f - h \,|)(\mathfrak{D}_3' E) < \varepsilon$$

stattfindet, w. z. b. w.

17. Um den Begriff der Differentialäquivalenz vollständiger charakterisieren zu können, beweisen wir noch folgenden

Satz: *Es sei $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine der Lipschitz-Bedingung*

$$|\varphi(x_1, x_2 \ldots, x_n) - \varphi(y_1, y_2 \ldots, y_n)| < K \sum_k |x_k - y_k|$$

genügende Funktion von n reellen Veränderlichen. Wenn die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ und $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ auf $\mathfrak{M} E$ differential-definiert sind und den Bedingungen

$$f_k(dE) = f_k'(dE)$$

genügen, so ist

$$\Phi(dE) = \varphi[f_1(dE), f_2(dE), \ldots, f_n(dE)] =$$
$$= \Phi'(dE) = \varphi[f_1'(dE), f_2'(dE), \ldots, f_n(dE)].$$

Beweis. Für jedes ε existieren Zerlegungen $\mathfrak{D}_k E$ von der Beschaffenheit, daß für alle $\mathfrak{D}_k' E > \mathfrak{D}_k E$

$$\sup \sum_m |f_k'(E_{km}') - f_k(E_{km}')| < \frac{\varepsilon}{n K}$$

ist. Jede Fortsetzung $\mathfrak{D}' E$ der Zerlegung

$$\mathfrak{D} E \equiv [\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n] E$$

ist auch Fortsetzung jedes $\mathfrak{D}_k E$, woraus die Ungleichung

$$\sup \sum_m |\Phi'(E_m') - \Phi(E_m')| < \varepsilon$$

und mit ihr unser Satz ohne weiteres folgt.

18. Aus der Bedingung (1) für differential-äquivalente Funktionen f und g folgt, daß für jedes G aus $\mathfrak{M} E$

$$\int_G |f(dG) - g(dG)| = 0$$

und vermöge der Integraleigenschaft V (Nr. 14)

$$\int_G [f(dG) - g(dG)] \leqq 0,$$

$$\int_G [g(dG) - f(dG)] \leqq 0,$$

$$\int_G [f(dG) - g(dG)] = 0. \tag{2}$$

Wenn eine der beiden Funktionen f und g integrierbar ist, so ist offensichtlich

$$\int_G f(dG) = \int_G g(dG).$$

Wir wollen jetzt beweisen, daß auch umgekehrt aus dem Erfülltsein von (2) für jedes G die Differentialäquivalenz der Funktionen f und g folgt. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Differentialäquivalenz zweier Funktionen besteht somit in dem Verschwinden der Integrale ihrer Differenz über jedes aus $\mathfrak{M}E$ genommene G.*

Dadurch, daß man $h = f - g$ setzt, reduziert sich unsere Behauptung auf die folgende:

19. *Für jede Funktion $h(E)$ folgt aus der für sämtliche G aus $\mathfrak{M}E$ als erfüllt vorausgesetzten Bedingung*

$$\int_G h(dG) = 0$$

die Relation

$$\int_E |h(dE)| = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$h(dE) = 0.$$

Beweis. Vermöge der Integrierbarkeit von h über E existiert eine ε-reguläre Zerlegung $\mathfrak{D}E$, für deren jede Fortsetzung $\mathfrak{D}'E$

$$\sup |(Rh)(\mathfrak{D}'E)| < \varepsilon$$

ist.

Ich behaupte, daß dann für jedes $\mathfrak{D}'E > \mathfrak{D}E$

$$\sup (R|h|)(\mathfrak{D}'E) < 4\varepsilon$$

gilt, womit unser Satz bewiesen sein wird.

Man nehme das Gegenteil an: es existiere somit ein solches $D'E$, daß

$$\sup (R|h|)(\mathfrak{D}'E) = \sup \sum_n |h(E'_n)| \geqq 4\varepsilon$$

ausfällt. Man kann dann aus der Gesamtheit N aller Indizes n ein Teilsystem M wählen, so daß

$$\sup \left| \sum_M h(E'_n) \right| \geqq 2\varepsilon.$$

Für jeden Index n aus $N - M = L$ wählen wir ein solches $\mathfrak{D}^{(n)}E'_n$, daß

$$\sup |(Rh)(\mathfrak{D}^{(n)}E)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

gilt, und setzen

$$\mathfrak{D}''E = \sum_M E'_n + \sum_L \mathfrak{D}^{(n)}E'_n.$$

Wie leicht ersichtlich, ist

$$\sup |(Rh)(\mathfrak{D}''E)| \geqq \sup \left| \sum_M h(E'_n) \right| - \sum_L \sup |(Rh)(\mathfrak{D}^{(n)}E'_n)| > \varepsilon,$$

was einen Widerspruch bedeutet, weil $\mathfrak{D}''E$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{D}E$ ist.

20. *Die über E integrierbare Funktion $f(G)$ ist auf $\mathfrak{M}E$ mit ihrem unbestimmten Integral*

$$F(G) = \int_G f(dG)$$

auf $\mathfrak{M}E$ differential-äquivalent.

Es ist in der Tat

$$\int_G F(dG) = F(G) = \int_G f(dG)$$

und vermöge Nr. 18

$$f(dE) = F(dE).$$

Auch die Umkehrung dieses Satzes stimmt: Wenn $f(G)$ einer auf $\mathfrak{M}E$ additiven Funktion $F(G)$ differential-äquivalent ist, so folgt aus Nr. 18, daß

$$\int_E f(dE) = \int_E F(dE) = F(E)$$

ist.

21. Wir erhalten so die

Zweite Definition des Integrals. *Das Integral von f über E ist die der Funktion f auf $\mathfrak{M}E$ differential-äquivalente additive Funktion.*

Aus dem soeben Bewiesenen folgt, daß eine solche Funktion, falls sie überhaupt existiert, *eindeutig bestimmt ist,* sowie daß die zweite Definition des Integrals mit der ersten äquivalent ist.

§ 4.

Bemerkungen über unendliche Werte des Integrals.

22. In der Nr. 10 wurde der Sinn des Ausdruckes „eine Funktion der Zerlegung $\mathfrak{D}E$ konvergiert bei unbeschränkter Fortsetzung der Zerlegung gegen $\pm\infty$" erklärt. Es wäre jedoch kaum zweckmäßig, die Definition der unendlichen Integralwerte dadurch zu erhalten, daß man in der Definition der Nr. 14 die Limesdefinition der Nr. 8 durch die der Nr. 10 ersetzt. Vielmehr erscheint es als durchaus natürlich, schon die Definition der absoluten Konvergenz so zu verallgemeinern, daß auch unendliche Werte der Riemannschen Summen $(Rf)(\mathfrak{D}E)$ in Betracht gezogen werden können. Außerdem erscheint es angebracht, auch die Forderung der Endlichkeit der zu integrierenden Funktion fallen zu lassen, und folglich auch $\pm\infty$ als zulässige Funktionswerte zu betrachten.

Wir führen damit folgende Definition ein:

Die Reihe

$$\sum_n u_n$$

soll in folgenden Fällen absolut konvergent im weiteren Sinne heißen:

a) wenn sie im gewöhnlichen Sinne absolut konvergiert;

b) wenn die Summe ihrer positiven Glieder $+\infty$ ist, während die negativen im gewöhnlichen Sinne absolut konvergieren; in diesem Fall konvergiert die Reihe definitionsgemäß gegen $+\infty$; dadurch, daß man die Rollen der beiden Vorzeichen umtauscht, erhält man gegen $-\infty$ konvergierende Reihen.

c) Wenn einige Glieder gleich $+\infty$ sind, während die übrigen im Sinne a) oder b) gegen einen endlichen Wert oder gegen $+\infty$ konvergieren, so konvergiert die Reihe definitionsgemäß gegen $+\infty$; in analoger Weise erhält man den Fall $-\infty$.

23. Bis auf die modifizierte Definition der absoluten Konvergenz bleibt die Definition von $(Rf)(\mathfrak{D}E)$ die frühere, während die Definition des Integrals — unter Benutzung der in der Nr. 10 gegebenen Definition des unendlichen Limes — sich im übrigen wie in der Nr. 12 gestaltet.

24. Was die Eigenschaften I bis IV des Integrals betrifft, so bleiben nur V, VI und VII ohne weiteres erhalten, wobei bei der Formulierung von VI der Begriff einer additiven Funktion in einem naturgemäß allgemeineren Sinn zu verstehen ist: eine Funktion $f(G)$, die für jedes G aus $\mathfrak{M}E$ einen eindeutig definierten, wenn eventuell auch unendlichen Wert annimmt, heißt im weiteren Sinn additiv, falls für jede Zerlegung $\mathfrak{D}G$ die Gleichung

$$fG = \sum_n f(G_n)$$

im Sinne der verallgemeinerten absoluten Konvergenz gemäß der Definition der Nr. 22 zutrifft.

25. Die Eigenschaft I fällt im allgemeinen weg, wie man etwa dem folgenden Beispiel entnimmt: $\mathfrak{M}E$ bestehe aus den beiden zueinander fremden Mengen E_1 und E_2, $E = E_1 + E_2$, und es sei

$$f(E_1) = \pm 1, \qquad f(E_2) = +\infty;$$

offenbar ist das Integral von f über E gleich $+\infty$, während das Integral über E_1 überhaupt nicht existiert.

Die Eigenschaft II bleibt mit der Einschränkung erhalten, daß aus der Existenz der linken Seite nicht mehr die Existenz der rechten zu folgen braucht.

Die Eigenschaft III bleibt bis auf den Ausnahmefall erhalten, in dem die rechte Seite die Gestalt $(+\infty) + (-\infty)$ annimmt, die Eigenschaft IV gilt, wenn nicht $K = 0$, bzw. $= \pm\infty$ ausfällt.

26. Die zweite — auf dem Begriff der Differentialäquivalenz fußende Integraldefinition — läßt sich nicht für den Fall erweitern, in dem unendliche Werte des Integrals zugelassen werden. Es bleibt immerhin der Satz erhalten:

Falls $f_1(dE) = f_2(dE)$ ist, so sind die beiden Funktionen gleichzeitig integrierbar oder nicht, wobei im ersten Falle

$$\int\limits_E f_1(dE) = \int\limits_E f_2(dE)$$

ist.

§ 5.

Einige Integrierbarkeitsfälle. Halbadditive Funktionen und Funktionen mit beschränkter Variation.

27. Eine eindeutige Funktion, die eventuell auch unendliche Werte annimmt, aber jedenfalls überall auf $\mathfrak{M}E$ definiert ist, heißt *halbadditiv nach oben*, wenn für jede Zerlegung $\mathfrak{D}G$ einer Menge G aus $\mathfrak{M}E$ die Ungleichung

$$f(G) \geqq \sum_n f(G_n)$$

stattfindet, wobei die Reihe der rechten Seite im (in der Nr. 22 auseinandergesetzten) weiteren Sinne absolut konvergiert. Falls unter denselben Bedingungen die Ungleichung

$$f(G) \leqq \sum_n f(G_n)$$

stattfindet, heißt f *halbadditiv nach unten*.

Falls $f(G)$ halbadditiv nach oben ist, so ist $-f(G)$ halbadditiv nach unten und umgekehrt, woraus in den meisten Fällen die Möglichkeit entsteht, sich auf die Untersuchung der einen dieser beiden Funktionenklassen zu beschränken.

28. Für eine Funktion f, die halbadditiv nach oben ist, ist für sämtliche $\mathfrak{D}'G > \mathfrak{D}G$

$$(Rf)(\mathfrak{D}G) > (Rf)(\mathfrak{D}'G).$$

Es sei in der Tat

$$\mathfrak{D}'G = \sum_n G_n, \qquad \mathfrak{D}G_n = \sum_m G_{nm},$$

dann ist

$$(Rf)(\mathfrak{D}G) = \sum_n f(G_n) \geqq \sum_n \sum_m f(G_{nm}) = (Rf)(\mathfrak{D}'G).$$

Für nach unten halbadditive Funktionen gilt offensichtlich die umgekehrte Relation.

29. *Jede halbadditive Funktion auf ME ist integrierbar über E.*

Es sei in der Tat f halbadditiv nach oben. Wie leicht ersichtlich, entspricht die Zahl

$$J = \inf\,[(Rf)(\mathfrak{D}E)]$$

der Definition des Integrals

$$\int_E f(dE).$$

Für eine nach unten halbadditive Funktion gilt entsprechend

$$\int_E f(dE) = \sup\,[(Rf)(\mathfrak{D}E)].$$

Diese Tatsachen sind Spezialfälle der folgenden: Wenn die eindeutige Funktion $f(\mathfrak{D}E)$ eine nicht wachsende ist, d. h. wenn aus $\mathfrak{D}'E > \mathfrak{D}E$ die Ungleichung $f(\mathfrak{D}'E) < f(\mathfrak{D}E)$ folgt, so ist

$$l[f(\mathfrak{D}E)] = \inf\,[f(\mathfrak{D}E)];$$

während für nicht abnehmende Funktionen die Ungleichung

$$l[f(\mathfrak{D}E)] = \sup\,[f(\mathfrak{D}E)]$$

gilt.

30. *Unter der Voraussetzung, daß $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ additiv sind, sind $|f(G)|$ und $+\sqrt{f_1^2(G) + f_2^2(G) + \ldots + f_n^2(G)}$ halbadditiv nach unten*; eine leichte Rechnung (mit besonderer Berücksichtigung des Falles, wo unendliche Werte auftreten) genügt, um sich davon zu überzeugen.

Es existieren somit für auf $\mathfrak{M}E$ additive Funktionen f die Integrale

$$\int_E |f(dE)|, \qquad \int_E \sqrt{f_1^2(dE) + \ldots + f_n^2(dE)}.$$

Das erste dieser Integrale ist die *Totalvariation* von $f(G)$ auf der Menge E. Die Darstellung der Totalvariation einer additiven Funktion in der Gestalt eines Integrals rührt von Herrn Radon her, allerdings ohne Angabe des Sinnes, in dem das Integral genommen wird. Das zweite unserer Integrale möge die *kombinierte Totalvariation* der Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ heißen.

31. Wenn $\mathfrak{M}E$ ein *additives Mengensystem* (d. h. ein Mengensystem, welches alle Differenzen und endliche sowie abzählbare Summen seiner Elemente enthält) ist, auf dem $f(G)$ als eine endliche und additive Funktion definiert ist, so ist bekanntlich auch die Totalvariation von f auf E endlich. Dagegen kann man an einem einfachen Beispiel sehen, daß für allgemeine Mengensysteme $\mathfrak{M}E$ aus der Endlichkeit und Additivität von $f(G)$ auf $\mathfrak{M}E$ die Endlichkeit ihrer Totalvariationen nicht zu folgen braucht.

Es sei E die halboffene Strecke $0 \leqq x < 1$. Das System $\mathfrak{M}E$ möge aus sämtlichen Strecken $a \leqq x < b$ mit $0 \leqq a < b \leqq 1$ bestehen. Man betrachte irgendeine stetige Funktion $f(x)$ die im Punkte 0 von unendlicher Variation ist — man setze z. B. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ — und definiere die Intervallfunktionen $f[a, b)$ als die Variation von $f(x)$ auf $[a, b)$:

$$f[a, b) = f(b) - f(a).$$

Es ist leicht zu sehen, daß $f[a, b)$ additiv auf $\mathfrak{M}E$ ist (das einzige Bedenken, welches diesbezüglich vielleicht entstehen könnte, betrifft Zerlegungen des Intervalls $[0, b)$; es wird aber dadurch sofort behoben, daß jede Zerlegung der letzterwähnten Strecke notwendig ein Element von der Gestalt $[0, a)$ enthält, und da alle übrigen Elemente vom gefährlichen Punkt 0 entfernt sind, bleibt die Additivität auch hier erhalten). Da offensichtlich

$$(\mathfrak{M}E) \int_E |f(dE)| = +\infty$$

ist, ist unser Ziel erreicht.

32. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede der additiven Funktionen $f_1(G), f_2(G), \ldots, f_n(G)$ von beschränkter Variation sei, besteht in der Endlichkeit des Integrals*

$$J = \int_E \sqrt{f_1^2(dE) + f_2^2(dE) + \ldots + f_n^2(dE)}.$$

Zum Beweis genügt die Bemerkung, daß einerseits — vermöge $|f_k| \leqq \sqrt{f_1^2 + \ldots + f_n^2}$ —

$$\int_E |f_k(dE)| \leqq J,$$

während andererseits

$$J = \sup \left[\left(R \sqrt{f_1^2 + \ldots + f_n^2}\right)(DE)\right] \leqq \sum_k \sup \left[(R|f_k|)(DE)\right] = \sum_k \int_E |f_k|(dE)$$

ist.

33. Für eine additive Funktion $f(G)$ mit beschränkter Variation erhält man — wenn man

$$\varphi(G) = \frac{1}{2}\left[\int_G |f(dG)| + f(G)\right],$$

$$\psi(G) = \frac{1}{2}\left[\int_G |f(dG)| - f(G)\right]$$

setzt — die übliche Darstellung als Differenz zweier nicht negativer Funktionen:

$$f(G) = \varphi(G) - \psi(G).$$

34. Aus der differentialen Äquivalenz zweier Funktionen $f'(G)$ und $f''(G)$ folgt, wie leicht ersichtlich, die differentiale Äquivalenz ihrer Beträge $|f'(G)|$ und $|f''(G)|$; aus dieser Bemerkung folgt, daß, wenn $f(G)$ für die Mengen aus $\mathfrak{M}E$ ein endliches Integral $F(G)$ hat (welches ja nach Nr. 20 mit $f(G)$ differential äquivalent ist), die Relation

$$\int_E |f(dE)| = \int_E |F(dE)|$$

besteht. Die Totalvariation läßt sich somit für jede Funktion definieren, die ein endliches Integral über E besitzt.

§ 6.

Einige Sätze über homogene Funktionen.

35. I. *Es seien $f_1(G), f_2(G), \ldots, f_n(G)$ auf $\mathfrak{M}E$ definierte endliche additive Funktionen mit beschränkter Variation und $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine positiv homogene Funktion erster Ordnung,*

(1) $$\varphi(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ für } t \geqq 0,$$

mit beschränkten Ableitungen zweiter Ordnung in jeder Richtung:

(2) $$\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}\right| \leqq \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}.$$

Dann hat die Funktion

$$\varphi(G) = \varphi[f_1(G), f_2(G), \ldots, f_n(G)]$$

ein endliches Integral über E.

Beweis. Wir setzen

$$\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$
$$\psi = \varphi + 2k\varrho,$$

und behaupten, daß der im $n+1$-dimensionalen Raum durch die Gleichung

$$z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

bestimmte Kegel V nach unten konvex ist. Es genügt in der Tat für seine Konvexität, daß für jede zum Radiusvektor aus 0 orthogonale Richtung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \geqq 0$$

sei; letztere Ungleichung folgt aber daraus, daß für eine solche Richtung

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial s^2} = \frac{1}{\varrho}$$

ist, was vermöge (2)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + 2k\frac{\partial^2 \varrho}{\partial s^2} > 0$$

ergibt.

Aus der Konvexität von V folgt, daß der Mittelpunkt der Strecke mit den auf V liegenden Endpunkten $z', x_1', x_2', \ldots, x_n'$ und $z'', x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ oberhalb des Kegels liegt, d. h. daß

$$\frac{\psi(x')+\psi(x'')}{2} > \psi\left(\frac{x'+x''}{2}\right),$$

so daß (vermöge (1))

$$\psi(x') + \psi(x'') > \psi(x' + x'') \tag{3}$$

ist. Ein leichtes Induktionsverfahren mit nachfolgendem Grenzübergang ergibt ferner, daß, falls

$$\sum_m x_k^{(m)} = x_k$$

für jedes k absolut konvergent ist,

$$\sum_m \psi(x^{(m)}) > \psi(x) \tag{4}$$

ausfällt.

Aus (4) folgt unmittelbar, daß $\psi[f_1(G), \ldots, f_n(G)]$ halbadditiv nach unten und folglich integrierbar über E ist; da auch $\varrho[f_1(G), \ldots, f_n(G)]$ integrierbar ist, so ist auch die Existenz des Integrals

$$\int_E \varphi(dE) = \int_E \psi(dE) - \int_E \varrho(dE)$$

bewiesen.

36. II. *Es seien* $f_1(G), f_2(G), \ldots, f_n(G)$ *additive Funktionen mit beschränkter Variation über* ME *und* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *stetig und positiv homogen von erster Ordnung; unter diesen Bedingungen hat*

$$\varphi(G) = \varphi[f_1(G), f_2(G), \ldots, f_n(G)]$$

ein endliches Integral über E.

Beweis. Wir stellen φ als Limes einer Folge

$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \varphi, \quad m \to \infty,$$

von den Bedingungen des Satzes I genügenden Funktionen φ_m dar und sorgen dabei dafür, daß bei jedem $\eta > 0$ für ein hinreichend großes m

$$|\varphi_m - \varphi| \leqq \eta\delta$$

sei. Man setze ferner

$$K = \int_E \sqrt{f_1^2(dE) + \ldots + f_n^2(dE)} = \sup[(R\sqrt{f_1^2 + \ldots + f_n^2})(\mathfrak{D}E)],$$

dann gilt für ein hinreichend großes m

$$(R\,|\varphi_m - \varphi|)(\mathfrak{D}E) \leqq \eta K.$$

Die Eigenschaft VII (Nr. 14) erlaubt sodann aus der Existenz der Integrale von $\varphi_m(G)$ über E auf die Existenz von

$$\int_E \varphi(dE)$$

zu schließen.

37. III. *Satz* I *behält seine Gültigkeit auch im Falle, wenn von den Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nicht mehr die Additivität, sondern bloß die Existenz endlicher Integrale über E vorausgesetzt wird.*

Vermöge Nr. 20 sind in der Tat die Funktionen $f_k(G)$ ihren unbestimmten Integralen $F_k(G)$ differential-äquivalent; vermöge Nr. 17 sind ferner $\varphi(G) = \varphi[f_1(G), \ldots, f_n(G)]$ und $\Phi(G) = \varphi[F_1(G), \ldots, F_n(G)]$ ebenfalls differential-äquivalent; da die zweite dieser Funktion nach I integrierbar ist, ist dies auch für $\varphi(G)$ der Fall, w. z. b. w.

§ 7.

Integrale vom Typ $\int\limits_E f(x)\,\varphi(dE)$.

38. Definition. Für eine — evtl. auch mehrdeutige — Funktion $f(x)$, soll die Mengenfunktion, die für die Menge E alle Werte annimmt, welche $f(x)$ auf der ganzen Menge E durchläuft, mit $f(E)$ bezeichnet werden.

Wenn $f(x)$ für alle $x \subset E$ erklärt und $\varphi(G)$ auf $\mathfrak{M}E$ differential-definiert ist, setzen wir

$$(1) \qquad (\mathfrak{M})\int\limits_E f(x)\,\varphi(dE) = (\mathfrak{M})\int\limits_E f(dE)\,\varphi(dE).$$

Wir interessieren uns in erster Linie für den Fall, in dem $f(x)$ eindeutig und $\varphi(G)$ auf $\mathfrak{M}E$ endlich und additiv ist. In diesem Fall sagen wir, daß das Integral (1) *ein Integral vom Stieltjesschen Typ ist.* Wir werden jedoch einiges auch für den allgemeinen Fall beweisen.

39. Die Relation

$$(2) \qquad \int\limits_E f(x)[\varphi_1(dE) + \varphi_2(dE)] = \int\limits_E f(x)\,\varphi_1(dE) + \int\limits_E f(x)\,\varphi_2(dE)$$

ergibt sich unmittelbar aus der Eigenschaft III (Nr. 14), wobei aus der Existenz der rechten Seite von (2) die Existenz der linken folgt. Ein wenig komplizierter beweist man die Formel

$$(3) \qquad \int\limits_E [f_1(x) + f_2(x)]\,\varphi(dE) = \int\limits_E f_1(x)\,\varphi(dE) + \int\limits_E f_2(x)\,\varphi(dE).$$

Aus der Eigenschaft III folgt zunächst

$$(4) \qquad \int\limits_E [f_1(dE) + f_2(dE)]\,\varphi(dE) = \int\limits_E f_1(dE)\,\varphi(dE) + \int\limits_E f_2(dE)\,\varphi(dE),$$

wobei die rechte Seite von (4) laut unserer Definition derselben Seite von (3) gleich ist, während die linke Seite von (3) mit dem Ausdruck

$$\int\limits_E (f_1 + f_2)(dE)\,\varphi(dE)$$

übereinstimmt, dabei bedeutet $(f_1 + f_2)(G)$ den Inbegriff der Werte, die $f_1(x) + f_2(x)$ bekommt, wenn x die Menge G durchläuft.

Wenn $f(G)$ — im Sinne der Definition der Nr. 38 — als Menge in $f'(G)$ enthalten ist, so schreiben wir — den üblichen mengen-theoretischen Gebräuchen entsprechend — $f(G) \subset f'(G)$. Das Analoge gilt für Funktionen von Zerlegungen. Offenbar folgt aus $f(\mathfrak{D}E) \subset f'(\mathfrak{D}E)$ die Relation

(5) $$l[f(\mathfrak{D}E)] = l[f'(\mathfrak{D}E)],$$

wobei aus der Existenz der rechten Seite wiederum die Existenz der linken folgt.

Die *Inklusion* $f(G) \subset f'(G)$ auf ME zieht nach sich die analoge Inklusion

$$(Rf)(\mathfrak{D}E) \subset (Rf')(\mathfrak{D}E)$$

für die Riemannschen Summen, woraus wegen (5) sich

$$(\mathfrak{M})\int_E f(dE) = (\mathfrak{M})\int_E f'(dE)$$

ergibt. Da ferner

$$(f_1 + f_2)(G) \subset f_1(G) + f_2(G),$$
$$(f_1 + f_2)(G)\,\varphi(G) \subset [f_1(G) + f_2(G)]\,\varphi(G)$$

gilt, erhält man unter Berücksichtigung von (4)

$$\int_E [f_1(x) + f_2(x)]\,\varphi(dE) = \int_E (f_1 + f_2)(dE)\,\varphi(dE) =$$
$$= \int_E [f_1(dE) + f_2(dE)]\,\varphi(dE) = \int_E f_1(x)\,\varphi(dE) + \int_E f_2(x)\,\varphi(dE),$$

d. h. die Formel (3), wobei auch diesmal aus der Existenz der rechten Seite die Existenz der linken folgt.

40. Wir nehmen jetzt an, daß $\varphi(G)$ auf ME additiv und nicht negativ ist. Man betrachte eine Zerlegung $\mathfrak{D}G$ der Menge G aus $\mathfrak{M}E$. Man zeigt leicht, daß für jede Funktion $f(x)$ die Relationen

$$\sup\{[R(f\varphi)](\mathfrak{D}G)\} = \sup\{\sum_n f(G_n)\,\varphi(G_n)\} \leqq \sup\{f(G)\sum_n \varphi(G_n)\}$$
$$\leqq \sup[f(G)\,\varphi(G)]$$

und in analoger Weise

$$\inf\{[R(f\varphi)](\mathfrak{D}G)\} \geqq \inf[f(G)\,\varphi(G)]$$

bestehen. Für jede Fortsetzung $\mathfrak{D}'E$ von $\mathfrak{D}E$ gilt dementsprechend

(6) $$\sup\{[R(f\varphi)](\mathfrak{D}'E)\} \leqq \sup\{[R(f\varphi)](\mathfrak{D}E)\}$$

und

(7) $$\inf\{[R(f\varphi)](\mathfrak{D}'E)\} \geqq \inf\{[R(f\varphi)](\mathfrak{D}'E)\}.$$

Die Riemannschen Summen von $f\varphi$ befinden sich also für eine gewisse Fortsetzung von $\mathfrak{D}E$ zwischen engeren Schranken, als für die Zer-

legung $\mathfrak{D}E$ selbst. Aus der Definition des Integrals, als den Limes der Riemannschen Summen, schließen wir ferner, daß für jede Zerlegung $\mathfrak{D}E$

$$(8)\qquad \inf\{[R(f\varphi)](\mathfrak{D}E)\} \leqq \int_E f(x)\,\varphi(dE) \leqq \sup\{[R(f\varphi)](\mathfrak{D}E)\}$$

ist. *Auf Grund dieses Resultats kann in unserem Fall einer nicht negativen auf $\mathfrak{M}E$ additiven Funktion $\varphi(G)$ das Integral*

$$\int_E f(x)\,\varphi(dE)$$

als die Zahl J definiert werden, für welche bei jedem ε eine solche Zerlegung $\mathfrak{D}E$ existiert, daß die Ungleichung

$$(9)\qquad |[R(f\varphi)](\mathfrak{D}E) - J| < \varepsilon$$

stattfindet.

Wenn in der Tat eine Zerlegung mit den soeben verlangten Eigenschaften existiert, so bestehen dieselben (wegen (6) und (7)) auch für jede Fortsetzung dieser Zerlegung, was uns zur ursprünglichen Definition des Integrals führt. Der Übergang von der früheren Integraldefinition zu der soeben formulierten ist trivial, da unsere jetzige Bedingung eine abgeschwächte Form der ursprünglichen darstellt.

41. Wenn $\varphi(G)$ additiv und mit beschränkter Variation ist, so liefert die Darstellung (Nr. 33) in der Differenzform

$$\varphi(G) = \psi(G) - \chi(G)$$

wegen (2) die analoge Darstellung

$$(10)\qquad \int_E f(x)\,\varphi(dE) = \int_E f(x)\,\psi(dE) - \int_E f(x)\,\chi(dE).$$

Die Formel (10) kann ebenfalls zur Definition des Integrals von $f\varphi$ dienen, falls die Integrale rechts im Sinne von Nr. 40 definiert sind. Man erhält so als Spezialfall unserer Definition die Definition des Stieltjesschen Integrals, welche Fréchet und einige andere Autoren gegeben haben.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß im Falle einer nicht negativen $\varphi(G)$ kraft der Formeln (6), (7), (8) der Gebrauch des E. H. Mooreschen Limesbegriffes bei der Definition des Stieltjesschen Integrals vermieden werden kann, denn die Existenz sogar einer Zerlegung mit einer kleinen Schwankung der entsprechenden Riemannschen Summen garantiert eine gute Annäherung an das Integral. Allerdings bildet der Gebrauch der Formel (10) zum Zweck der Integraldefinition im allgemeinen Falle sicherlich einen Umweg, so daß das dem Wesen der Sache entsprechende Verfahren in diesem Falle doch nur durch den Limesbegriff von E. H. Moore gegeben wird.

42. Wir nennen die Funktion $f(x)$ *meßbar auf* $\mathfrak{M}$, wenn bei jeder Wahl der reellen Zahlen a und b die Menge $E\,(a \leqq f(x) < b)$ derjenigen x, für welche $f(x)$ der eingeklammerten Ungleichung genügt, zum Mengenbereich $\mathfrak{M}$ gehört. Man zeigt leicht, daß wenn $f(x)$ beschränkt und auf $\mathfrak{M}$ meßbar ist, während $\varphi(G)$ auf demselben Mengenbereich eine beschränkte Variation hat, das Integral (1) stets existiert.

43. Wenn $f(x)$ absolut kleiner ist als eine Konstante K, so folgt aus der Differentialäquivalenz zweier Funktionen $\varphi(E)$ und $\psi(E)$ die Differentialäquivalenz von $f(E)\varphi(E)$ und $f(E)\psi(E)$. Aus der Differentialäquivalenz des Integrals mit der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion schließen wir ferner:

Wenn $f(x)$ beschränkt ist und $\varphi(G)$ auf E ein endliches Integral besitzt, so ist

$$\int_E f(x)\varphi(dE) = \int_E f(x)\Big[\int_{dE} \varphi(ddE)\Big].$$

Somit folgt aus der Existenz eines endlichen Integrals mit beschränkter Variation von $\varphi(E)$ bei einer beschränkten und meßbaren $f(x)$ die Integrierbarkeit von $f(x)\varphi(dE)$; es existiert insbesondere das Integral

$$\int_E f(x)\varphi\,[f_1(dE), f_2(dE), \ldots, f_n(dE)]$$

sobald $f_1, f_2, \ldots, f_n$ den Bedingungen eines der Sätze des § 6 genügen. In analoger Weise erhält man als Spezialfall unserer Definition das Integral im Sinne von Hellinger[12]):

$$\int_a^b u(x)\frac{df(x)\,df_1(x)}{dg(x)}.$$

§ 8.

Beispiele von M-Bereichen.

44. Der Bereich $\mathfrak{M}_1$ besteht aus offenen Intervallen (unendliche Intervalle nicht ausgeschlossen) und sämtlichen einzeln betrachteten Punkten der Zahlengeraden. Die Zerlegungen $\mathfrak{D}E$ treten dabei als Zerlegungen eines Intervalls E in höchstens *abzählbar* viele Intervalle und einzelne Punkte auf. In vielen Fällen (und zwar immer wenn die integrierende Mengenfunktion für einzelne Punkte den Wert Null hat) spielen dabei nur Intervalle eine wesentliche Rolle.

45. Ein Integral von der Form

$$(\mathfrak{M}_1)\int_\varDelta f(x)\,l(d\varDelta)$$

[12]) Crelles Journal 136 (1909), p. 234.

(wobei $l(\Delta)$ die Länge des Intervalls Δ bezeichnet) stellt eine kleine Verallgemeinerung des klassischen Cauchy-Riemannschen Integralbegriffes dar: die und nur die Funktionen erweisen sich als in diesem Sinne integrierbar, die gleichzeitig mit ihrem Absolutbetrage nach dem Dirichletschen Verfahren integrierbar sind.

46. Wenn $F(x)$ nur Unstetigkeitspunkte erster Art besitzt, so definiert man $(VF)(E)$ — im Falle, wenn E ein Intervall (a, b) ist — als die Differenz $F(b-0) - F(a+0)$, während für ein aus einem einzigen Punkte a bestehendes E man $(VF)(E) = F(a+0) - F(a-0)$ setzt. Wir schreiben dann definitionsgemäß

$$(1) \qquad (\mathfrak{M}_1)\int_\Delta f(x)\,dF(x) = (\mathfrak{M}_1)\int_\Delta f(x)\,(VF)\,(d\Delta).$$

Diese Integraldefinition steht dem Integralbegriff von Stieltjes nahe; sie unterscheidet sich vom letzteren Begriff dadurch, daß nicht nur endliche, sondern auch abzählbar-unendliche Zerlegungen zugelassen werden, und überdies der Limesbegriff von E. H. Moore benutzt wird. Diese zweite Tatsache ist für das folgende leicht beweisbare Resultat von Wichtigkeit:

Wenn $f(x)$ und $F(x)$ auf Δ beide eine beschränkte Variation haben, so existiert das Integral (1).

Wenn die beiden Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ in demselben Punkt eine Unstetigkeit aufweisen, so reicht die gewöhnliche Stieltjessche Definition nicht aus. Integrale von diesem Typ sind insbesondere für manche Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung von großer Bedeutung.

47. Der Bereich $\mathfrak{M}_2$ besteht aus allen im Lebesgueschen Sinne meßbaren Mengen der Zahlengeraden. Das Integral

$$(\mathfrak{M}_2)\int_E f(x)\,m_1(E)$$

(wobei durch m_1 das lineare Lebesguesche Maß bezeichnet wird) stimmt mit dem Lebesgueschen Integral überein. Wie in Nr. 40 bereits erwähnt wurde, leistet in diesem Fall der Limesbegriff von E. H. Moore nichts Neues.

48. Der Bereich $\mathfrak{M}_3$ besteht aus allen im Borelschen Sinne meßbaren Mengen der Zahlengeraden. Wenn $F(x)$ von beschränkter Variation ist, läßt sich bekanntlich $(VF)(E)$ für jedes E aus $\mathfrak{M}_3$ bestimmen. Analog wie in Nr. 44 definieren wir

$$(\mathfrak{M}_3)\int_E f(x)\,dF(x) = (\mathfrak{M}_3)\int_E f(x)\,(VF)\,(dE).$$

Für im Borelschen Sinne meßbare Funktionen stimmt diese Definition des Stieltjesschen Integrals mit der von Lebesgue (in der zweiten Auflage seiner „Leçons sur l'intégration") gegebenen überein.

49. Wir nennen einen $\mathfrak{M}$-Bereich einen $\mathfrak{Z}$-Bereich („zerlegbarer Bereich"), wenn je für zwei Mengen E_1 und E, von denen die erste eine Teilmenge der zweiten ist, eine Zerlegung $\mathfrak{D}E$ gefunden werden kann, deren erstes Element die Menge E_1 ist und alle Elemente überhaupt dem Mengenbereich $\mathfrak{M}$ gehören.

Beispiele von $\mathfrak{Z}$-Bereichen bilden etwa die Bereiche $\mathfrak{M}E$ (Nr. 7) und $\mathfrak{M}\mathfrak{D}E$ (Nr. 13). Auf diese Weise hängt die Definition des Integrals nur von den Werten der zu integrierenden Funktion auf einem gewissen $\mathfrak{Z}$-Bereich ab. Dementsprechend dürfen uns diejenigen Fälle am meisten interessieren, wo die Mengenbereiche $\mathfrak{M}$, in bezug auf welche integriert wird, selbst $\mathfrak{Z}$-Bereiche sind. Dieser Bedingung genügen die im vorigen Paragraphen betrachteten Bereiche $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$. Wenn anstatt von $\mathfrak{M}_1$ der aus Intervallen allein bestehende Bereich $\mathfrak{M}'$, der kein $\mathfrak{Z}$-Bereich ist, zum Grundbereich einer Integrationstheorie gemacht wäre, so würde diese Theorie formal sich tadellos entwickeln, dabei jedoch inhaltslos sein, weil ein Intervall in kleinere (disjunkte) Intervalle überhaupt nicht zerlegt werden kann, so daß das Integral jeder Intervallfunktion stets mit dieser Funktion selbst zusammenfallen müßte.

Für einen $\mathfrak{Z}$-Bereich stimmt der Bereich $\mathfrak{Z}E$ mit der Gesamtheit aller Teilmengen von E, die zum gegebenen $\mathfrak{Z}$-Bereich gehören, überein.

50. Falls ein Bereich $\mathfrak{M}'$ in einem anderen Bereich $\mathfrak{M}$ enthalten ist, so folgt aus der Existenz der Integrale $(\mathfrak{M}')\int\limits_E f(dE)$ und $(\mathfrak{M})\int\limits_E f(dE)$ im allgemeinen durchaus nicht ihre Gleichheit. Man kann sich davon an einfachen Beispielen überzeugen: $\mathfrak{M}'$ besteht aus einer einzigen Menge E, $\mathfrak{M}$ aus den Mengen E, E_1, E_2 mit $E = E_1 + E_2$, $E_1E_2 = 0$; $f(E) = 0$, $f(E_1) = 1$, $f(E_2) = 1$;

$$(\mathfrak{M}')\int\limits_E f(dE) = 0, \qquad (\mathfrak{M})\int\limits_E f(dE) = 2.$$

Wir können aber die Formel

$$(\mathfrak{M}')\int\limits_E f(dE) = (\mathfrak{M})\int\limits_E f(dE)$$

im folgenden Spezialfall beweisen:

Falls $\varphi(E)$ nichtnegativ und additiv auf $\mathfrak{M}$ ist, so folgt für jeden Teilbereich $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$ die Relation

$$(1) \qquad (\mathfrak{M}')\int\limits_E f(x)\,\varphi(dE) = (\mathfrak{M})\int\limits_E f(x)\,\varphi(dE)$$

aus der Existenz der beiden Integrale.

Nach Nr. 40 existiert in $\mathfrak{M}'$ für jedes ε eine der dortigen Ungleichung (9) genügende Zerlegung $\mathfrak{D}E$, wobei unter J das Integral der linken Seite der

Formel (1) zu verstehen ist. Da aber $\mathfrak{D}E$ auch als eine Zerlegung in $\mathfrak{M}$ betrachtet werden kann, so folgt aus der Formel (8) derselben Nr. 40, daß das auf der rechten Seite von (1) stehende Integral jedenfalls nicht mehr als um ε von J abweichen kann; da ε beliebig war, folgt daraus unsere Behauptung.

51. Vermöge Nr. 41, (10) *bleibt die Formel* (1) *in Kraft auch für Integrale vom Stieltjesschen Typ, falls diese durch die erwähnte Formel* (10) *bestimmt werden können*, d. h. wenn $\varphi(G)$ auf $\mathfrak{M}E$ von beschränkter Variation ist.

Für den allgemeinen Fall der Integrale vom Stieltjes-Typ bleibt dagegen die soeben behandelte Frage unentschieden.

Drittes Kapitel.

Zweite Integrationstheorie. (Endliche Zerlegungen.)

§ 1.

1. Die Integrationstheorie des zweiten Kapitels beruhte auf systematischer Betrachtung der Zerlegungen $\mathfrak{D}E$ einer Menge E in endlich- oder abzählbar-viele Teilmengen. Im vorliegenden Kapitel wollen wir die Änderungen untersuchen, die die Theorie erfährt, wenn nur endliche Zerlegungen (d. h. Zerlegungen von E in endlich-viele Teilmengen) zugelassen werden.

Was die auf diese Weise entstehende Integraldefinition betrifft, so wäre man vielleicht geneigt zu denken, daß sie enger ist, als unsere frühere Definition. Dies trifft aber nicht zu: es gibt wichtige Fälle, in denen das mit Hilfe endlicher Zerlegungen definierte Integral existiert, während man bei Zugrundelegung unendlicher Zerlegungen mit einem nicht integrierbaren Fall zu tun hat. Überdies schließt der Standpunkt, auf den wir uns jetzt stellen, unmittelbar an die klassische Theorie von Cauchy und Riemann an, und ergibt größere Möglichkeiten an Vollständigkeit und Durchsichtigkeit des ganzen Aufbaus.

Bei der Benutzung von endlichen Zerlegungen werden dieselben Bezeichnungen beibehalten, die zu analogen Zwecken im Falle unendlicher Zerlegungen dienten. Dann, wenn nebeneinander Begriffe aus den beiden Theorien auftreten, werden die sich auf unendliche Zerlegungen (d. h. auf die Theorie des Kap. II) beziehenden mit einem Stern gekennzeichnet.

2. Alle Definitionen des § 1 des Kap. II bleiben natürlich auch unter unseren jetzigen Voraussetzungen aufrechterhalten, aber der Summenbegriff wird selbstverständlich nur für endlich-viele Zerlegungen eingeführt. Es ist

klar, daß ein Bereich $\mathfrak{M}E$ jetzt im allgemeinen nicht mit dem entsprechenden Bereich $\mathfrak{M}E^*$ für dieselben E und $\mathfrak{M}$ zusammenzufallen braucht, sondern sehr wohl einen engeren Bereich darstellen kann. Der Limes $l[f(\mathfrak{D}E)]$ braucht unter der Voraussetzung endlicher Zerlegungen auch dann nicht mit dem analogen Ausdruck $l[f(\mathfrak{D}^*E)]$ übereinzustimmen, wenn der Ausgangsbereich M für beide Limesbildungen derselbe ist.

3. Die Riemannschen Summen (Kap. II, Nr. 11) existieren jetzt im Falle, daß die Funktion, die man integrieren will, endlich ist, für jede Zerlegung, während im Kap. II beim Fehlen der absoluten Konvergenz entsprechender Reihen man notwendig mit Ausnahmefällen zu tun hatte.

Die Integraldefinition selbst bleibt natürlich — ihrem Wortlaut nach — dieselbe.

Die Eigenschaften I bis VI des Integrals bleiben mit der Ausnahme der Eigenschaft II auch bei Zugrundelegung der endlichen Zerlegungen erhalten. Was aber die Eigenschaft II betrifft, so findet *die Additivität im engeren Sinne* statt, d. h. die Formel (1) gilt nur für endliche Zerlegungen. Dabei folgt aus der Existenz der Integrale auf der rechten Seite dieser Formel die Existenz des Integrals auf der linken Seite.

4. Die Definition der Differentialäquivalenz und die damit zusammenhängenden Resultate bleiben ebenfalls unverändert, allerdings mit der natürlichen Voraussetzung, daß alle auftretenden Zerlegungen endlich sind und die Additivität der betreffenden Funktionen im engeren Sinne zu verstehen ist.

5. Die Einführung unendlicher Integralwerte geschieht ebenso wie im § 4, wobei die Erweiterung des Begriffes der absoluten Konvergenz sich als überflüssig erweist: anstatt dessen tritt die Verabredung, daß eine beliebige endliche Anzahl unendlicher Glieder eines und desselben Vorzeichens gleich Unendlich (mit demselben Vorzeichen) ist, und daß dieses Resultat durch Addition beliebig — aber immer endlich — vieler endlicher Glieder nicht geändert werden kann.

§ 2.

Zerlegbare Bereiche.

6. Analog wie im § 49 des Kap. II sagen wir, daß ein $\mathfrak{M}$-Bereich ein $\mathfrak{Z}$-Bereich ist, wenn für jedes E aus $\mathfrak{M}$ und jede Teilmenge E_1 von E in $\mathfrak{M}$ eine Zerlegung $\mathfrak{D}E$ existiert, deren erstes Element die Menge E_1 ist. Dabei werden jetzt natürlich nur endliche Zerlegungen betrachtet. Offenbar ist ein $\mathfrak{Z}$-Bereich im obigen Sinne auch stets ein $\mathfrak{Z}^*$-Bereich. Diese letzteren Bereiche werden im folgenden als $\mathfrak{Z}$-Bereiche im erweiterten Sinne betrachtet.

7. *$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ seien Mengen aus $\mathfrak{Z}$ mit*

$$\sum_{m=1}^{n} E_m < E, \quad E_i E_j = 0, \text{ wenn } i \neq j.$$

Es existiert dann in $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung

$$\mathfrak{D} E = \sum_{m=1}^{n+p} E_m,$$

deren erste n Elemente der Reihe nach die obigen Elemente E_m sind.

Nach Definition existieren in Z Zerlegungen

$$\mathfrak{D}_m E = E_m + \sum_{s=1}^{t_m} E_s^{(m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

mit E_m als erstem Element. Die Zerlegung

$$\mathfrak{D} E = \sum_{m=1}^{n} E_m + \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_n} E_{s_1}^{(1)} E_{s_2}^{(2)} \ldots E_{s_n}^{(n)}$$

entspricht den Bedingungen unseres Satzes.

8. Analog wie im Falle der $\mathfrak{Z}^*$-Bereiche fällt $\mathfrak{Z}E$ mit der Gesamtheit der zu $\mathfrak{Z}$ gehörenden Teilmengen von E zusammen, woraus $\mathfrak{Z}E = \mathfrak{Z}E^*$ folgt, während für einen allgemeinen $\mathfrak{M}$-Bereich die letzte Behauptung nicht notwendig zuzutreffen braucht. Man betrachte als Beispiel den $\mathfrak{M}$-Bereich, welcher aus E und abzählbar-vielen Elementen E_n einer Zerlegung $\mathfrak{D}E$ besteht; $\mathfrak{M}E$ besteht unter diesen Bedingungen aus der einzigen Menge E, $\mathfrak{M}E^*$ aus E und allen E_n.

9. Wir definieren ferner $\mathfrak{K}\mathfrak{Z}$ als den kleinsten Mengenkörper, welcher den Mengenbereich $\mathfrak{Z}$ enthält. Wir wollen beweisen, daß $\mathfrak{K}\mathfrak{Z}$ *die Gesamtheit der Mengen ist, welche eine endliche Zerlegung in Elemente aus $\mathfrak{Z}E$ zulassen.* Zum Beweise bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}$ das System aller Mengen, welche der zuletzt ausgesprochenen Bedingung genügen. Offenbar ist $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{K}\mathfrak{Z}$ enthalten; bleibt übrig zu zeigen, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}$ selbst ein Körper ist. Es seien

$$E = \sum_{m=1}^{n} E_m, \quad E' = \sum_{q=1}^{p} E'_q,$$

zwei Mengen aus $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}$, die als Summen disjunkter Mengen aus $\mathfrak{Z}$ dargestellt sind. Da die Mengen $E_m E'_q$ zu $\mathfrak{Z}$ gehören, existieren in $\mathfrak{Z}$ nach Nr. 7 Zerlegungen

$$\mathfrak{D}_m E_m = \sum_q E_m E'_q + \sum_{s=1}^{t_m} E_s^{(m)}.$$

Offenbar gehören die Mengen

$$E E' = \sum_m E_m E'_q,$$

$$E + E' = \sum_q E'_q + \sum_m \sum_s E_s^{(m)},$$

$$E - E' = \sum_m \sum_s E_s^{(m)}$$

zu $\mathfrak{S}\,\mathfrak{Z}$, denn die rechten Seiten letzterer Gleichungen stellen Zerlegungen in zueinander fremde Mengen aus $\mathfrak{Z}$ dar. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{S}\,\mathfrak{Z}$ ein Körper ist und folglich mit $\mathfrak{K}\,\mathfrak{Z}$ zusammenfällt.

10. *Eine auf $\mathfrak{Z}$ additive Funktion $f(E)$ kann stets und dabei nur auf eine Weise unter Erhaltung ihrer Additivitätseigenschaft auf den Bereich $\mathfrak{K}\,\mathfrak{Z}$ erweitert werden.*

Es ist klar, daß — unter der Voraussetzung, daß diese Erweiterung möglich ist — für jede Zerlegung einer Menge E aus $\mathfrak{K}\,\mathfrak{Z}$ in Mengen aus $\mathfrak{Z}$

$$(1) \qquad f(E) = (R\,f)(\mathfrak{D}\,E)$$

sein muß. Wir haben ferner auf Grund der Additivität von f auf $\mathfrak{Z}$ für zwei beliebige Zerlegungen $\mathfrak{D}E$ und $\mathfrak{D}'E$ die Relation

$$(R\,f)(\mathfrak{D}E) = (R\,f)\{[\mathfrak{D}\mathfrak{D}']\,E\} = (R\,f)(\mathfrak{D}'E),$$

welche zeigt, daß die durch die Formel (1) gegebene Definition von $f(E)$ (für alle Elemente von $\mathfrak{K}\,\mathfrak{Z}$) von der Wahl der Zerlegung $\mathfrak{D}E$ unabhängig ist. Die auf den ganzen Bereich $\mathfrak{K}\,\mathfrak{Z}$ erweiterte Funktion $f(E)$ ist offenbar additiv.

11. *Man setze für E aus $\mathfrak{K}\,\mathfrak{Z}$*

$$(\mathfrak{Z})\int_E f(dE) = \sum_{m=1}^{n} (\mathfrak{Z})\int_{E_m} f(dE_m),$$

wobei $\mathfrak{D}E \equiv \sum E_m$ eine Zerlegung von E in $\mathfrak{Z}$ ist.

Nach dem soeben Bewiesenen hängt diese Definition von der Wahl der Zerlegung nicht ab. Das auf diese Weise definierte Integral besitzt alle Eigenschaften I bis VI.

12. Als Beispiele von $\mathfrak{Z}$-Bereichen führen wir an den in Kap. II, Nr. 44 schon definierten Bereich $\mathfrak{M}_1$ bestehend aus den offenen Intervallen und den einzelnen Punkten der Zahlengeraden, den Bereich $\mathfrak{M}_4$ aller „halboffenen" Intervalle $[a\,b)$; diesen Bereich haben wir in Kap. II, Nr. 31 benutzt; den Bereich $\mathfrak{M}_5$ aller Intervalle von den Typen $(a\,b)$, $[a\,b)$, $(a\,b]$, $[a\,b]$, wobei zu den abgeschlossenen Intervallen $[a\,b]$ auch die einzelnen Punkte gerechnet werden[13]).

Offenbar ist überdies jeder Körper, insbesondere die Bereiche $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_3$ aus Kap. II, Nr. 47 und 48, ein $\mathfrak{Z}$-Bereich. Die $\mathfrak{Z}$-Bereiche bilden das natürliche Feld für den Aufbau einer Integrationstheorie.

---

[13]) Siehe wegen der Bezeichnungen Hausdorff, Mengenlehre, S. 9 (2. Aufl.).

§ 3.

Über die Beziehungen zwischen den beiden Integrationsmethoden.

13. Wir beschränken uns auf die Betrachtung von Integralen

(1) $$(\mathfrak{Z})\int_E f(dE) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{Z})\int_E^* f(dE),$$

die in bezug auf $\mathfrak{Z}$-Bereiche genommen werden. Wie im § 8 bereits erwähnt wurde, stimmen in diesem Fall $\mathfrak{Z}E$ und $\mathfrak{Z}E^*$ überein. Im allgemeinen Falle können $\mathfrak{M}E$ und $\mathfrak{M}E^*$ verschieden sein, und schon dieser Umstand erschwert im hohen Maße den Aufbau einer einigermaßen einfachen Theorie.

14. Vor allem zeigen wir durch ein Beispiel, daß die Integrale (1) tatsächlich verschieden sein können. Wir erinnern uns zu diesem Zweck an den aus Intervallen und den einzelnen Punkten der Zahlengeraden bestehenden Mengenbereich $\mathfrak{M}_1$, welcher nach Nr. 12 ein $\mathfrak{Z}$-Bereich ist, und definieren $f(E)$ dadurch, daß wir für jedes Intervall von der Form $E=(0;a)$ $f(E)=1$ und für alle übrigen Elemente von $\mathfrak{M}$ $f(E)=0$ setzen. Offenbar ist $f(E)$ — im Sinne der endlichen Zerlegungen — additiv, im Sinne der unendlichen Zerlegungen dagegen nur halb-additiv nach oben. Man sieht leicht ein, daß für das Einheitsintervall $\varDelta=(0;1)$

$$(\mathfrak{M}_1)\int_\varDelta f(d\varDelta)=1, \quad (\mathfrak{M}_1)\int_\varDelta^* f(d\varDelta)=0$$

ist, so daß die beiden Integraldefinitionen uns zwar bestimmte, jedoch voneinander verschiedene Werte liefern.

15. Mit Fréchet nennen wir eine auf $\mathfrak{Z}$ definierte Mengenfunktion *stetig in dem Bereich* $\mathfrak{Z}$, wenn für jede Folge abnehmender Mengen E_n mit leerem Durchschnitt $f(E_n)$ bei wachsendem n gegen Null konvergiert. Man sieht leicht ein, daß die in Nr. 14 konstruierte Funktion in $\mathfrak{M}_1$ nicht stetig ist.

16. *Für eine in einem Mengenkörper $\mathfrak{K}$ stetige Funktion $f(E)$ ist*

$$(\mathfrak{K})\int_E f(dE)=(\mathfrak{K})\int_E^* f(dE),$$

wobei aus der Existenz der linken Seite die der rechten folgt.

Wir setzen voraus, daß das linke Integral J existiert und endlich ist. Es gibt dann für jedes $\varepsilon>0$ eine solche endliche Zerlegung $\mathfrak{D}E=\sum_{m=1}^n E_m$, daß für jede endliche Fortsetzung derselben $\mathfrak{D}'E>\mathfrak{D}E$

(2) $$|(Rf)(\mathfrak{D}'E)-J|<\varepsilon$$

ist. Wir betrachten jetzt irgendeine unendliche Fortsetzung

$$\mathfrak{D}^* E \equiv \sum_{k=1}^{\infty} E_k^*$$

von $\mathfrak{D} E$ und beweisen, daß die Reihe

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty} f(E_k^*) = (R f)(\mathfrak{D}^* E)$$

absolut konvergent ist. Die Mengenfolge

$$G_{mk} = E_m \sum_{i=k}^{\infty} E_i^* = E_m - \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(deren Elemente offenbar zu $\mathfrak{R}$ gehören) erfüllt die Stetigkeitsbedingung des § 15, so daß $\lim f(G_{mk}) = 0$ ist und man ein so großes k bestimmen kann, daß für alle $m \leqq n$

(4) $$f(G_{mk}) < \frac{\varepsilon}{n}$$

ist.

Die Zerlegung

$$\mathfrak{D}_k' E \equiv \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* + \sum_{m=1}^{n} G_{mk}$$

ist eine endliche Fortsetzung von $\mathfrak{D} E$, so daß für sie die Ungleichung (2) richtig ist. Unter Beachtung von (4) folgt aus (2), daß für ein hinreichend großes k die Ungleichung

(5) $$\left| \sum_{i=1}^{k-1} f(E_i^*) - J \right| < 2\varepsilon$$

erfüllt ist.

Unter diesen Umständen muß aber die Reihe (3) absolut konvergent sein, weil man sonst die E_k^* so umnumerieren könnte, daß die Ungleichung (5) bei einem noch so großen k ihre Geltung verliere.

Somit ist gezeigt, daß die Riemannsche Summe $(R f)(\mathfrak{D}^* E)$ existiert und — wegen (5) — der Ungleichung

(6) $$|(R f)(\mathfrak{D}^* E) - J| \leqq 2\varepsilon$$

genügt.

Da für endliche Fortsetzungen von $\mathfrak{D} E$ die stärkere Ungleichung (2) stattfindet, so gilt (6) für sämtliche Fortsetzungen von $\mathfrak{D} E$, was (da ε beliebig war) die zu beweisende Formel

$$(\mathfrak{R}) \int_E^* f(dE) = J$$

ergibt.

In einer analogen Weise wird auch der Fall eines unendlichen Integralwertes J erledigt.

17. Wenn man in bezug auf einen $\mathfrak{Z}$-Bereich integriert, der kein Körper ist, so verliert der soeben bewiesene Satz seine Geltung. Um sich davon zu überzeugen, betrachte man folgendes Beispiel. Ein Element des Mengenbereiches $\mathfrak{M}_6$ ist die Menge aller irrationalen inneren Punkte eines Quadrates, dessen Eckpunkte rational sind (dabei verstehen wir unter einem rationalen bzw. irrationalen Punkt der Zahlenebene einen Punkt, dessen beide Koordinaten rational bzw. irrational sind). Für Quadrate E, die an die y-Achse von rechts her anschließen, definieren wir $f(E)$ als die Seitenlänge des betreffenden Quadrates, während für alle übrigen Quadrate $f(E)=0$ gesetzt wird. Für das Einheitsquadrat E_1 ist, wie leicht ersichtlich,

$$(\mathfrak{M}_6)\int_{E_1} f(dE_1)=1, \quad (\mathfrak{M}_6)\int_{E_1}^{*} f(dE_1)=0,$$

obgleich $f(E)$ in $\mathfrak{M}_6$ stetig und $\mathfrak{M}_6$ ein $\mathfrak{Z}$-Bereich ist.

18. Wir geben noch ein Beispiel einer in einem $\mathfrak{Z}$-Bereich stetigen Funktion, die im Sinne der endlichen Zerlegungen integrierbar, im Sinne der unendlichen Zerlegungen dagegen nicht integrierbar ist. Zu diesem Zweck betrachten wir im Bereich $\mathfrak{M}_1$ die Variation $(VF)(E)$ einer stetigen Punktfunktion $F(x)$ (vgl. Kap. II, Nr. 46). Bekanntlich ist (VF) stetig in $\mathfrak{M}_1$ im Sinne der Definition der Nr. 15, und $\mathfrak{M}_1$ ist ein $\mathfrak{Z}$-Bereich. Indes ist kraft der Additivität von (VF)

$$(\mathfrak{M}_1)\int_{E} (VF)(dE)=(VF)(E),$$

während

$$(\mathfrak{M}_1)\int_{E}^{*} (VF)(dE)$$

nur dann existiert, wenn $F(x)$ auf E eine beschränkte Variation hat.

19. Wir nennen eine in $\mathfrak{Z}$ definierte $f(E)$ *vollstetig*, wenn für jede Mengenfolge

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

aus $\mathfrak{K}\,\mathfrak{Z}$ mit verschwindendem Durchschnitt und jede Folge von Zerlegungen

$$\mathfrak{D}_1 E_1,\ \mathfrak{D}_2 E_2, \ldots, \mathfrak{D}_n E_n, \ldots$$

der Mengen E_n in Mengen aus $\mathfrak{Z}\,(Rf)(\mathfrak{D}_n E_n)$ mit wachsenden n unendlich klein wird. (Selbstverständlich werden die Zerlegungen als endliche vorausgesetzt.)

Offenbar ist eine vollstetige Funktion stetig im Fréchetschen Sinne (Nr. 15)[14].

[14]) Für additive Funktionen fallen die beiden Begriffe zusammen, deshalb war in den bisherigen Theorien unser neuer Begriff entbehrlich. Im allgemeinen Fall bildet jedoch gerade die Vollstetigkeit die natürliche Verallgemeinerung des Stetigkeitsbegriffes für additive Funktionen.

20. *Für eine in $\mathfrak{Z}$ vollstetige Funktion $f(E)$ ist*

(1) $$(\mathfrak{Z})\int_E f(dE) = (\mathfrak{Z})\int_E^* f(dE),$$

wobei aus der Existenz des einen dieser Integrale die Existenz des anderen folgt.

Wir setzen zuerst voraus, daß das erste der beiden Integrale (1) existiert und der endlichen Zahl J gleich ist.

Dann existiert für jedes ε eine solche Zerlegung $\mathfrak{D}E = \sum_{m=1}^{n} E_m$, daß für jede endliche Fortsetzung derselben $\mathfrak{D}'E > \mathfrak{D}E$

(2) $$|(Rf)(\mathfrak{D}'E) - J| < \varepsilon$$

ist. Es sei $\mathfrak{D}'E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^*$ eine unendliche Fortsetzung von $\mathfrak{D}E$. Für die Mengenfolge

$$G_k = \sum_{i=k}^{\infty} E_i^*,$$

deren Elemente zu $\mathfrak{K}\mathfrak{Z}$ gehören, gilt wegen der Vollstetigkeit von f bei jeder Wahl der Zerlegung $\mathfrak{D}_n G_n$ die Relation

$$(Rf)(\mathfrak{D}_n G_n) \to 0.$$

Wir wählen ein so großes k, daß für jede $\mathfrak{D}G_k$

(3) $$|(Rf)(\mathfrak{D}G_k)| < \varepsilon$$

ausfällt. Nach Nr. 7 existiert eine Zerlegung von E in Mengen aus $\mathfrak{Z}$ vom Typ

$$\mathfrak{D}_k E = \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* + \sum_{q=1}^{\nu_k} E_{kq},$$

wobei offenbar $\sum_q E_{kq} = G_k$ ist. Die Zerlegung

$$\mathfrak{D}_k' E = \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* + \sum_{m=1}^{n} \sum_{q=1}^{\nu_k} E_m E_{kq}$$

ist eine Fortsetzung von $\mathfrak{D}E$, folglich ist für sie die Ungleichung (2) richtig. Andererseits haben wir nach (3)

(4) $$\left| \sum_{m=1}^{n} \sum_{q=1}^{\nu_k} f(E_m E_{kq}) \right| = |(Rf)(\mathfrak{D}_k' G_k)| < \varepsilon,$$

welch letztere Relation zusammen mit (2) uns

(5) $$\left| \sum_{i=1}^{k-1} f(E_i^*) - J \right| < 2\varepsilon$$

ergibt. Wie in Nr. 16 schließt man hieraus, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(E_k^*) = (Rf)(\mathfrak{D}^*E)$$

absolut konvergiert und

$$|(Rf)(\mathfrak{D}^*E) - J| < 2\varepsilon$$

ist. Da diese Ungleichung für jede unendliche Fortsetzung von $\mathfrak{D}E$ gilt, während für endliche Fortsetzungen sogar (2) stattfindet, erhalten wir (wie in Nr. 16) die Gleichung

$$J^* = (3)\int_E^* f(dE) = J.$$

Im Falle eines unendlichen J gestaltet sich der Beweis in einer völlig analogen Weise.

Man nehme jetzt an, daß J^* existiert und endlich ist. Es gibt dann für jedes ε eine Zerlegung $\mathfrak{D}^*E$ derart, daß für jede Fortsetzung $\mathfrak{D}_1^*E$ derselben die Ungleichung

$$|(Rf)(\mathfrak{D}_1^*E) - y^*| < \varepsilon \tag{7}$$

erfüllt ist.

Wir wollen mit Hilfe von $\mathfrak{D}^*E$ eine solche endliche Zerlegung $\mathfrak{D}E$ konstruieren, daß für jede $\mathfrak{D}_1E > \mathfrak{D}E$

$$|(Rf)(\mathfrak{D}_1E) - J^*| < 3\varepsilon \tag{8}$$

gilt.

Wenn $\mathfrak{D}^*E$ eine tatsächlich unendliche Zerlegung

$$\mathfrak{D}^*E = \sum_{k=1}^{\infty} E_i^*$$

ist, so läßt sich ein solches k finden, daß (unter Beibehaltung unserer früheren Bezeichnungen) die Ungleichung (3) gilt und außerdem

$$\left|\sum_{i=k}^{\infty} f(E_i^*)\right| < \varepsilon \tag{9}$$

ist; die Möglichkeit, die letztere Bedingung zur Geltung zu bringen, folgt übrigens aus der absoluten Konvergenz der Reihe $(Rf)(\mathfrak{D}^*E)$, die in der Formel (7) vorausgesetzt ist.

Nun setzen wir

$$\mathfrak{D}E = \mathfrak{D}_k E = \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* + \sum_{q=1}^{\nu_k} E_{kq}.$$

Es sei $\mathfrak{D}_1E$ eine endliche Fortsetzung von $\mathfrak{D}E$. Die Zerlegung

$$\mathfrak{D}_i^*E = \sum_{i=1}^{k-1} \mathfrak{D}_1 E_i^* + \sum_{i=k}^{\infty} E_i^*$$

ist eine Fortsetzung von $\mathfrak{D}^*E$, so daß für sie die Bedingung (7) erfüllt ist. Andererseits gilt aber vermöge (3) und (9)

$$|(Rf)(\mathfrak{D}_1E) - (Rf)(\mathfrak{D}_1^*E)| \leq \left|\sum_{q=1}^{\nu_k} f(E_{kq})\right| + \left|\sum_{i=k}^{\infty} f(E_i^*)\right| \leq 2\varepsilon,$$

was zusammen mit (7) die Gültigkeit der Formel (8) für ein unendliches $\mathfrak{D}^* E$ ergibt. Wenn $\mathfrak{D}^* E$ endlich ist, so setzen wir $\mathfrak{D} E = \mathfrak{D}^* E$ und dann folgt (8) unmittelbar aus (7). Da ε beliebig war, erhalten wir schließlich

$$J = (\mathfrak{Z})\int_E f(dE) = J^*.$$

Die analogen Schlüsse erbringen den Beweis auch für den Fall eines unendlichen J^*, womit der Beweis des ganzen Satzes zu Ende geführt ist.

§ 4.
Beispiele.

21. Analog wie im § 8 bei der Untersuchung des Integralbegriffes des Kap. II, betrachten wir das Integral in unserem neuen Sinne für bestimmte $\mathfrak{M}$-Bereiche. In erster Linie wenden wir uns dabei dem im Kap. II, Nr. 45 definierten Bereich $\mathfrak{M}_1$ zu, welcher aus den Intervallen und einzelnen Punkten der reellen Zahlengeraden besteht.

Man bezeichne, wie in Kap. II, Nr. 45, mit $l(\Delta)$ die Länge des Intervalls Δ und erhält so für

$$(\mathfrak{M}_1)\int_\Delta f(x) f(d\Delta)$$

eine mit dem Cauchyschen Integral

$$\int_\Delta f(x)\, dx$$

übereinstimmende Definition.

22. Wenn man die stetigen Funktionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ als Parameterdarstellung einer stetigen Kurve betrachtet und mit $S(\Delta)$ die Entfernung („die Länge der Sehne") zwischen den den Endpunkten des Intervalls Δ entsprechenden Punkten der Kurve bezeichnet, so ist die Länge des durch diese Punkte bestimmten Kurvenbogens durch das Integral

$$(\mathfrak{M}_1)\int_\Delta S(d\Delta)$$

gegeben.

23. Unter Benutzung derselben Bezeichnungen wie in Kap. II, Nr. 46, definieren wir wie dort

$$(1) \qquad (\mathfrak{M}_1)\int_\Delta f(x)\, dF(x) = (\mathfrak{M}_1)\int_\Delta f(x)(VF)(d\Delta).$$

Diese Definition stimmt mit M. L. Smith's Definition des Stieltjesschen Integrals überein. Ebenso wie im Fall des Kap. II existiert das Integral (1), sobald $F(x)$ und $f(x)$ von beschränkter Variation sind. Zum Unterschied von der Sachlage des zweiten Kapitels existiert (1) schon dann, wenn man

von $F(x)$ die Stetigkeit, jedoch von $f(x)$ nach wie vor die beschränkte Variation verlangt. Dies ist gerade der wichtigste Fall, in dem unsere jetzige Definition allgemeiner als die des Kap. II ist.

24. Das Integral

$$(\mathfrak{M}_2)\int_E f(x)\, m_1(dE)$$

ist dem in Kap. II, Nr. 47 untersuchten analog; es existiert nur für beschränkte Funktionen und stimmt in diesem Fall mit dem Lebesgueschen Integral überein.

Anhang I.

Integral als mehrdeutige Funktion.

1. In der bisherigen Darstellung haben wir uns zwar systematisch der mehrdeutigen Funktionen unter dem Limes- bzw. Integralzeichen bedient, jedoch unter der Annahme, daß der Limes- bzw. Integralwert eindeutig definiert ist. Man kann aber die Darstellung viel allgemeiner und zugleich einfacher machen, wenn man auch im letzteren Fall auf die Eindeutigkeit verzichtet. Der große Vorteil, den man dabei erreicht, besteht darin, daß jetzt jede differentialdefinierte Funktion integrierbar ist, während die in unserem früheren Sinne integrierbaren Funktionen als „eindeutig integrierbar" ausgezeichnet werden. Außerdem treten jetzt die obere bzw. untere Grenze des (mehrdeutigen) Integrals als oberes und unteres Integral auf. In diesem Anhang soll ein Abriß einer solchen Integrationstheorie gegeben werden. Wir schließen dabei an die Begriffsbildungen des Kapitels II an, bedienen uns also der unendlichen Zerlegungen. Die Abänderungen, die die Darstellung im Falle endlicher Zerlegungen erfahren muß, mögen dem Leser überlassen bleiben.

2. Es sei eine ein- oder mehrdeutige Funktion $f(\mathfrak{D}E)$ der Zerlegungen $\mathfrak{D}E$ einer Menge E in Teilmengen aus einem System $\mathfrak{M}$ gegeben. Die Funktion f kann dabei sowohl endliche als auch unendliche Werte annehmen. Unter *Limes von* $f(\mathfrak{D}E)$ *bei unbegrenzter Fortsetzung von* $\mathfrak{D}E$ verstehe man jetzt jede Zahl

$$J = L[f(\mathfrak{D}E)]$$

von der Eigenschaft, daß bei beliebiger Wahl von $\mathfrak{D}E$ und $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{D}'E > \mathfrak{D}E$ mit

$$\inf |f(\mathfrak{D}'E) - J| < \varepsilon$$

existiert; dabei werden unter dem Infimum-Zeichen alle Werte von f (bei gegebenem $\mathfrak{D}'E$) zugelassen. Wir setzen $f(\mathfrak{D}E) = +\infty$, wenn für jedes $\mathfrak{D}E$ und ein beliebiges $H < +\infty$ ein solches $\mathfrak{D}'E > \mathfrak{D}E$ existiert, daß $\sup f(\mathfrak{D}'E) > H$; die analoge Definition gilt für $f(\mathfrak{D}E) = -\infty$.

3. Man überzeugt sich leicht davon, daß jede für sämtliche $\mathfrak{D}E$ definierte $f(\mathfrak{D}E)$ mindestens einen Limes hat und daß die Limites von $f(\mathfrak{D}E)$ eine abgeschlossene Menge bilden. Deshalb sind auch die Zahlen $\sup L[f(\mathfrak{D}E)]$ und $\inf L[f(\mathfrak{D}E)]$ wohldefiniert, und zwar sind sie Spezialwerte von $L[f(\mathfrak{D}E)]$.

Wenn

$$\sup L[f(\mathfrak{D}E)] = \inf L[f(\mathfrak{D}E)],$$

(also $L[f(\mathfrak{D}E)]$ eindeutig ist, so schreiben wir

$$L[f(\mathfrak{D}E)] = l[f(\mathfrak{D}E)]$$

und erhalten so den in Kap. II, Nr. 8 definierten Limesbegriff.

4. Die in Kap. II, Nr. 22 gegebene Definition der Summe einer Reihe soll jetzt dadurch ergänzt werden, daß man im Fall einer nicht absolut konvergenten Reihe jeden Wert von $-\infty$ bis $+\infty$ als einen der Summenwerte zuläßt. Sodann wird das Symbol $(Rf)(\mathfrak{D}E)$ wörtlich wie in Kap. II, Nr. 11 definiert und der Integralbegriff wird mittels der Formel

$$(\mathfrak{M})\overline{\underline{\int_E}} f(\mathfrak{D}E) = L[(Rf)(\mathfrak{D}E)]$$

eingeführt.

5. Man setze ferner

$$\overline{\int_E} f(dE) = \sup \overline{\underline{\int_E}} f(dE),$$

$$\underline{\int_E} f(dE) = \inf \overline{\underline{\int_E}} f(dE).$$

Wenn $\overline{\int} = \underline{\int}$ ist, schreiben wir einfach

$$\overline{\underline{\int}} = \int;$$

wir erhalten dann das Integral im Sinne von Kap. II.

6. Was die in Kap. II, Nr. 14 formulierten Eigenschaften des Integrals betrifft, so gelten sie jetzt mit folgenden Änderungen:

Die Eigenschaft I verliert ihr Interesse, da jetzt jede differentialdefinierte Funktion integrierbar ist. Aus der Eindeutigkeit des Integrals auf E, wenn sein Wert endlich ist, folgt überdies seine Eindeutigkeit auf jeder Menge aus $\mathfrak{M}E$.

Die Eigenschaft II behält unter Berücksichtigung der in Kap. II, Nr. 11 gegebenen Additionsregel für mehrdeutige Funktionen ihre Gültigkeit.

Die Eigenschaft III geht verloren, während IV, V, VI, VII richtig bleiben.

7. Was das obere und untere Integral betrifft, so darf auf eine ausführliche Behandlung ihrer Eigenschaften hier verzichtet werden. Wir erwähnen nur, daß bei jeder Zerlegung $\mathfrak{D}E$ die Relationen

$$\overline{\int_E} f(dE) = \sup \sum_n \overline{\int_{E_n}} f(dE_n),$$

$$\underline{\int_E} f(dE) = \inf \sum_n \underline{\int_{E_n}} f(dE_n)$$

gelten. Die Zeichen *sup* und *inf* fallen bei absoluter Konvergenz der betreffenden Reihen weg. Wenn keine absolute Konvergenz stattfindet, sind die Integrale in den linken Seiten positiv bzw. negativ unendlich. Somit *ist ein endliches oberes oder unteres Integral notwendig eine additive Mengenfunktion.*

Anhang II.

Zur Begründung der Differentiation in abstrakten Mengen.

1. Wir wollen hier zeigen, daß die Definition der Ableitung einer additiven Mengenfunktion in bezug auf eine andere unabhängig von jeglichen geometrischen Beziehungen in den betreffenden Definitionsbereichen eingeführt werden kann. Da wir hier keine allgemeine Theorie entwickeln wollen, machen wir von vornherein einige einschränkende Voraussetzungen zur Vereinfachung der Darstellung.

Es seien: $\mathfrak{F}$ ein additives Mengensystem, $\varphi(E)$ eine dort definierte endliche nichtnegative additive Funktion, $f(x)$ eine in bezug auf $\mathfrak{F}$ meßbare Punktfunktion (vgl. Kap. II, Nr. 42), die nach ihrem absoluten Betrag eine Konstante — etwa 1 — nicht übertrifft. Dann existiert für jedes E aus $\mathfrak{F}$ das Integral,

$$\psi(E) = (\mathfrak{F})\int_E f(x)\,\varphi(dE), \tag{1}$$

wobei, wie leicht ersichtlich

$$|\psi(E)| \leqq \varphi(E) \tag{2}$$

ist.

Eine in bezug auf $\mathfrak{F}$ meßbare Funktion $f(x)$ soll *die Ableitung von* ψ in bezug auf φ heißen:

$$f(x) = \frac{\psi(dE)}{\varphi(dE)},$$

wenn sie der Bedingung (1) für sämtliche E aus $\mathfrak{F}$ genügt.

2. Zunächst soll bewiesen werden, daß — unter Vernachlässigung der Mengen E mit $\varphi(E) = 0$ — es nur *eine* Ableitung gibt; mit anderen

Worten: wenn $f_1(x)$ und $f_2(x)$ beiden Bedingungen (1) genügen und G die Menge bedeutet, wo $f_1(x) \neq f_2(x)$ ist, so ist $\varphi(G)=0$. Man hat in der Tat

$$\int_E (f_1 - f_2)(x)\varphi(dE) = 0$$

für alle E aus $\mathfrak{F}$ und wegen Nr. 19, Kap. II auch

$$\int_E |f_1 - f_2|(x)\varphi(dE) = 0,$$

woraus leicht folgt, daß bei jedem $\varepsilon > 0$ die Menge G_ε, in der $|f_1 - f_2| > \varepsilon$ ist, die Bedingung $\varphi(G_\varepsilon) = 0$ erfüllt. Folglich ist auch $\varphi(G) = 0$, w. z. b. w.

3. Wir beweisen jetzt, daß

$$f(x) = \frac{\psi(dE)}{\varphi(dE)}$$

existiert, sobald $\psi(E)$ additiv ist und der Ungleichung (2) genügt; diese Existenz wird dadurch bewiesen, daß ein Konstruktionsverfahren angegeben wird, welches übrigens auch in viel allgemeinern Fällen als Definition der Ableitung betrachtet werden kann.

Die Funktion $f(x)$ wird auf einer bestimmten Menge E konstruiert, diese Konstruktion läßt sich aber leicht auch auf alle andere Mengen aus $\mathfrak{F}$ fortsetzen. Wir konstruieren zuerst eine vom Punkt x und der Zerlegung $\mathfrak{D}E \equiv \sum\limits_n E_n$ abhängende Funktion $f(\mathfrak{D}E, x)$ dadurch, daß wir für x aus E_n

$$f(\mathfrak{D}E, x) = \frac{\psi(E_n)}{\varphi(E_n)}$$

setzen; dabei soll im Fall $\varphi(E_n) = 0$ auch $f(\mathfrak{D}E, x) = 0$ sein. Es läßt sich nun bei jedem ε eine Zerlegung $\mathfrak{D}E$ so finden, daß für jede Fortsetzung $\mathfrak{D}'E$ von $\mathfrak{D}E$ die Ungleichung

$$J = \int_E [f(\mathfrak{D}E, x) - f(\mathfrak{D}'E, x)]^2 \varphi(dE) < \varepsilon \tag{3}$$

gilt.

Es sei in der Tat

$$\mathfrak{D}'E \equiv \sum_n \mathfrak{D}'E_n \equiv \sum_n \sum_m E_{nm},$$

so haben wir

$$\begin{aligned} J &= \sum_n \sum_m \left(\frac{\psi(E_{nm})}{\varphi(E_{nm})} - \frac{\psi(E_n)}{\varphi(E_n)}\right)^2 \varphi(E_{nm}) = \\ &= \sum_n \left(\sum_m \frac{\psi^2(E_{nm})}{\varphi(E_{nm})} - 2\frac{\psi(E_n)}{\varphi(E_n)} \sum_m \psi(E_{nm}) + \frac{\psi^2(E_n)}{\varphi^2(E_n)} \sum_m \varphi(E_{nm})\right) = \\ &= \sum_n \left(\sum_m \frac{\psi^2(E_{nm})}{\varphi(E_{nm})} - \frac{\psi^2(E_n)}{\varphi(E_n)}\right) = \left(R\frac{\psi^2}{\varphi}\right)(\mathfrak{D}'E) - \left(R\frac{\psi^2}{\varphi}\right)(\mathfrak{D}E). \end{aligned} \tag{4}$$

Die Funktion $\frac{\psi^2(G)}{\varphi(G)}$ ist auf E integrierbar, denn sie fällt wegen (2) mit der Funktion $\frac{\psi^2(G)}{\operatorname{Max}[\varphi(G), \psi(G)]}$ zusammen, welche den Bedingungen des Satzes aus Kap. II, Nr. 36 genügt. Die Differenz am Ende der Formel (4) kann sodann durch eine passende Wahl von $\mathfrak{D}E$ kleiner als ε gemacht werden, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Ebenso wie in der gewöhnlichen Theorie der Konvergenz im Mittel beweist man leicht, daß aus (3) die Existenz einer solchen Funktion $f(x)$ folgt, daß für E. H. Moores Limes nach den Zerlegungen $\mathfrak{D}E$

$$l \int_E [f(x) - f(\mathfrak{D}E, x)]^2 \varphi(dE) = 0$$

gilt. Diese Funktion $f(x)$ erfüllt die Forderungen der in Nr. 1 gegebenen formalen Definition der Ableitung.

(Eingegangen am 6. 2. 1930.)

Einige charakteristische Eigenschaften von meßbaren Mengen und Funktionen.

Von

J. Ridder in Baarn (Niederlande).

Im Anfang dieser Arbeit (§§ 1 bis 4) werden einige Sätze über (im allgemeinen) nicht meßbare Mengen und Funktionen hergeleitet. Im weiteren liefert Anwendung dieser Sätze charakteristische Eigenschaften von meßbaren Mengen und meßbaren Funktionen. Die Meßbarkeit einer Menge E wird dabei zurückgeführt auf die Meßbarkeit einer Untermenge, welche dadurch unmittelbar zu übersehen ist, daß in ihren Punkten die charakteristische Funktion von E oder eine andere, auf E definierte Funktion gewissen Bedingungen genügt (§ 5). Die Meßbarkeit einer auf einer Menge E_1 definierten Funktion $f(x)$ (und damit auch die Meßbarkeit von E_1 selbst) ist in dieser Arbeit immer eine Folge der Zerlegbarkeit von E_1 in endlich oder abzählbar unendlich viele Untermengen, auf denen sich die Meßbarkeit von $f(x)$ aus gewissen Eigenschaften (z. B. Halbstetigkeitseigenschaften) folgern läßt (§§ 6 bis 10).

§ 1.

$f(x)$ sei eine nur *positive* Werte annehmende Funktion, definiert in den Punkten einer Menge E von endlichem äußeren Maße. Nach Lebesgue wird dann das obere Integral von $f(x)$ über E definiert als das äußere Maß der zugehörigen Ordinatenmenge O $[x$ auf E; $0 \leqq y < f(x)]$, falls dieses endlich ist. Es existiert dann auch $\overline{\int\limits_{(E\cdot J)}} f(x)\,dx$ für jedes (lineare) Intervall J von endlicher oder unendlicher Länge. Diese Intervallfunktion nennen wir das *unbestimmte* obere Integral von $f(x)$.

Die obere rechte Derivierte des unbestimmten oberen Integrals im Punkte x $[D_x^+ \overline{\int} f(x)\,dx]$ wird definiert als $\limsup\limits_{m(J)=0} \dfrac{\overline{\int\limits_{(E\cdot J)}} f(x)\,dx}{m(J)}$, wobei J ein Intervall darstellt, das x zum linken Endpunkt hat. Auf übereinstimmende Weise sind die übrigen extremen Derivierten $[D_+, D^-, D_-]$ ein-

zuführen. Wenn die vier extremen Derivierten einander gleich sind, definiert ihr gemeinsamer Wert die Ableitung des oberen Integrals in x.

Eine Zahl A heiße Derivierte in x, wenn es eine abzählbare Folge von Intervallen (J_k) gibt, die x im Innern oder auf dem Rande enthalten und sich mit zunehmendem k auf x zusammenziehen, wobei

$$\lim_{k=\infty} \frac{\overline{\int\limits_{(E\cdot J_k)}} f(x)\,dx}{m(J_k)} = A$$

sein soll.

Es läßt sich zeigen:

A. *Das unbestimmte obere Integral einer bestimmt positiven Funktion $f(x)$, definiert auf einer Menge E von endlichem äußeren Maße, besitzt eine von Null verschiedene endliche Ableitung in den Punkten einer meßbaren Menge, deren Maß $= m_a(E)$ ist. In den übrigen Punkten der x-Achse, mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, hat es eine Ableitung gleich Null.*

Beweis. Die Ordinatenmenge O läßt sich bei positivem ε einschließen in eine abzählbare Folge von offenen Quadraten, welche eine Menge O_1 bilden, deren Totalmaß $< m_a(O) + \varepsilon$ ist. Die lineare Menge E besitzt eine meßbare Hülle E_1 mit $m(E_1) = m_a(E)$, welche eine Teilmenge ist von dem Durchschnitte der Menge O_1 mit der x-Achse. Die Ordinatenmenge O_2 $[x$ auf E_1; $y \geqq 0]$ ist zu betrachten als Summe einer abzählbaren Folge von flächenhaft meßbaren Mengen endlichen Maßes und ist somit flächenhaft meßbar (mit unendlichem Maße)[1]). Da die Durchschnittsmenge von zwei meßbaren Mengen von endlichem oder unendlichem Maße meßbar ist[2]), wird $(O_1 \cdot O_2)$ flächenhaft meßbar sein, und da sie in O_1 enthalten ist, ist somit ihr Maß $< m_a(O) + \varepsilon$. Die Menge O ist in $(O_1 \cdot O_2)$ enthalten.

Der Durchschnitt einer endlichen Anzahl der O_1 bildenden, offenen Quadrate mit O_2 ist eine flächenhaft meßbare Menge[2]), deren Maß gleich dem Maße der Ordinatenmenge einer meßbaren Funktion ist; für die nicht zu E_1 gehörenden Punkte wird diese Funktion gleich Null genommen, für die Punkte von E_1 gleich der Summe der Längen der auf der zugehörigen Ordinaten und in den Quadraten liegenden Stücke[3]). Es sei $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots$ die Folge jener Intervalle und $F_k(x)$ die zu $(I_1 + \ldots + I_k)$ gehörende Funktion. Dann wird für jedes x ein Grenzwert $\lim\limits_{k=\infty} F_k(x) = G(x)$ existieren, welcher auf $E \geqq f(x)$ ist. Die zu $G(x)$ gehörende Ordinatenmenge

---

[1]) Siehe z. B. Carathéodory, Vorles. über reelle Funktionen, § 244, Satz 3, oder Schlesinger und Plessner, Lebesguesche Integrale, S. 50.

[2]) Siehe z. B. Carathéodory, Reelle Funktionen, § 244, Satz 2, oder Schlesinger und Plessner, Lebesguesche Integrale, S. 50.

[3]) Ein Ordinatenstück, das mehreren Quadraten angehört, wird nur einmal gezählt.

ist meßbar und ihr Maß ist gleich dem Maße von $(O_1 \cdot O_2)$. Daraus folgert man leicht:

$$\int_{E_1} G(x)\,dx < \overline{\int_E} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Bei einer nach Null konvergierenden Folge von positiven, abnehmenden Zahlen: $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ läßt sich also eine Folge von nicht negativen, meßbaren Funktionen $G_n(x)$ konstruieren mit den beiden Eigenschaften

$$\int_{E_{1,n}} G_n(x)\,dx < \overline{\int_E} f(x)\,dx + \varepsilon_n, \tag{1}$$

wobei $E_{1,n}$ eine meßbare Hülle von E sein wird mit $m(E_{1,n}) = m_a(E)$, und

$$f(x) \leqq G_n(x) \tag{2}$$

in den Punkten von E.

Die Funktion $H_n(x) = \text{Min}\,[G_1(x), \ldots, G_n(x)]$ auf der Durchschnittsmenge D_n von $E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}$ und $= 0$ in den übrigen Punkten der x-Achse ist meßbar und ihre Ordinatenmenge enthält O; auf E ist: $f(x) \leqq H_n(x)$. Somit wird

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx \leqq \int_{D_n} H_n(x)\,dx < \overline{\int_E} f(x)\,dx + \varepsilon_n$$

sein. Die Mengen D_n konvergieren mit zunehmendem n nach einer Grenzmenge D von gleichem Maße wie die D_n (und wie die $E_{1,n}$), welche E enthält. Da in jedem Punkte von D $H_n(x)$ mit zunehmendem n nicht wächst und auf E $H_n(x) \geqq f(x)$ bleibt, so existiert auf D eine meßbare Grenzfunktion $M(x)$ mit den Eigenschaften

$$\int_D M(x)\,dx = \overline{\int_E} f(x)\,dx \tag{3}$$

und

$$f(x) \leqq M(x) \quad \text{auf } E. \tag{4}$$

Für jedes Intervall J auf der x-Achse wird

$$\int_{(D \cdot J)} M(x)\,dx = \overline{\int_{(E \cdot J)}} f(x)\,dx$$

sein. Also besitzt das unbestimmte obere Integral eine Ableitung $= M(x)$ in einem maßgleichen Kerne von D. Da $m(D) = m_a(E)$ ist und E in D enthalten, folgt aus (4), daß $M(x)$ nur gleich Null sein kann auf einer Teilmenge T von K vom Maße Null. Auf der meßbaren Menge $(K - T)$, deren Maß $= m(D) = m_a(E)$ ist, besitzt das obere Integral von $f(x)$ eine von Null verschiedene Ableitung. In den Punkten der Komplementärmenge $C(D)$ in bezug auf die x-Achse hat es fast überall eine Ableitung gleich Null[4]).

---

[4]) Siehe z. B. Carathéodory, Reelle Funktionen, § 446, Satz 3.

§ 2.

In gleicher Richtung liegt und mit ähnlichen Mitteln beweisbar ist der Satz:

A_1. *Eine Menge E von endlichem äußeren Maße besitzt eine äußere Dichte $=1$ auf einer meßbaren Menge, deren Maß $= m_a(E)$ ist. In allen weiteren Punkten der x-Achse, mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, existiert eine äußere Dichte $= 0$* [5]).

Dabei wird die äußere Dichte von E im Punkte x definiert als $\lim\limits_{m(J)=0} \frac{m_a(E\cdot J)}{m(J)}$, wobei J ein x enthaltendes (abgeschlossenes oder offenes) Intervall darstellt.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß eine meßbare Hülle H von E mit $m(H) = m_a(E)$ fast überall in den Punkten von H eine Dichte $=1$ und fast überall in den Punkten der Komplementärmenge $C(H)$ eine Dichte $=0$ hat.

§ 3.

Das innere Maß der Ordinatenmenge O [x auf E; $0 \leqq y \leqq f(x)$] (siehe § 1) definiert, wenn es endlich ist, das untere Integral von $f(x)$ über E. Die Intervallfunktion $\underline{\int}_{(E\cdot J)} f(x)\,dx$, welche dann für jedes Intervall J existiert, nennen wir das *unbestimmte* untere Integral von $f(x)$. Die Einführung seiner Derivierten läßt sich geben wie beim unbestimmten oberen Integral.

B. *Das unbestimmte untere Integral einer bestimmt positiven Funktion $f(x)$, definiert auf einer Menge E von endlichem äußeren Maße, besitzt eine von Null verschiedene, endliche Ableitung in den Punkten einer meßbaren Teilmenge von E, deren Maß $\leqq m_i(E)$ ist. In den übrigen Punkten der x-Achse, mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, hat es eine Ableitung gleich Null.*

Beweis. Nehmen wir vorläufig an, daß $f(x)$ beschränkt sei; G sei eine Zahl größer als ihre obere Schranke auf E. Weiter sei E enthalten in der offenen, linearen Menge H, deren Maß endlich sein soll. Definieren wir eine Funktion $g(x) = G - f(x)$ auf E und $= G$ auf $(H - E)$, so ist

---

[5]) W. Sierpiński bewies den Satz: Ausgenommen in den Punkten einer Nullmenge besitzt eine Menge E in jedem ihrer Punkte eine äußere Dichte $=1$ (siehe Fund. Mat. 4 (1923), S. 125). Die Betrachtungen von § 1 führen zu einem analogen Resultate: *Das unbestimmte obere Integral einer bestimmt positiven Funktion $f(x)$, definiert auf einer Menge E von endlichem äußeren Maße, besitzt eine Ableitung $\geqq f(x)$ in allen Punkten von E, mit Ausnahme einer Nullmenge.*

diese Funktion bestimmt positiv auf H. Nach der Methode von § 1 läßt sich nun auf H eine meßbare Funktion $M(x)$ einführen, mit den Eigenschaften: 1. auf H wird $g(x) \leqq M(x) \leqq G$ sein; 2. es ist

$$\int_H M(x)\,dx = \overline{\int_H} g(x)\,dx.$$

Hieraus folgt

$$G \cdot m(H) - \overline{\int_H} g(x)\,dx = \int_H [G - M(x)]\,dx$$

oder

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx = \int_H [G - M(x)]\,dx.$$

Diejenigen Punkte von H, in denen $G - M(x) \neq 0$ ist, bilden eine meßbare Teilmenge T von E. Also wird

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx = \int_T [G - M(x)]\,dx$$

sein, wobei auf T: $f(x) \geqq G - M(x) > 0$ ist. Daraus folgt der Satz unmittelbar für beschränktes $f(x)$ [4]).

Wenn $f(x)$ nicht beschränkt ist, läßt sich bei jedem positiven, ganzen n eine Funktion $f_n(x)$ definieren, $= f(x)$ in denjenigen Punkten von E, wo $f(x) \leqq n$ ist, und $= n$ in den Punkten von E, wo $f(x) > n$ ist. Es wird sich eine positive, meßbare Funktion $g_n(x)$ angeben lassen, definiert auf einer meßbaren Teilmenge T_n von E, mit den Eigenschaften

$$\underline{\int_E} f_n(x)\,dx = \int_{T_n} g_n(x)\,dx$$

und

$$f_n(x) \geqq g_n(x) > 0 \quad \text{in den Punkten von } T_n.$$

Dabei wird es möglich sein, daß $T_n < T_{n+1}$ und daß in den Punkten von T_n $g_n(x) \leqq g_{n+1}(x)$ ist. Wenn $T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ und $g(x) = \lim_{n=\infty} g_n(x)$ ist in den Punkten von T, wird also

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \underline{\int_E} f_n(x)\,dx = \int_T g(x)\,dx$$

sein, wobei $g(x)$ auf T meßbar und in jedem Punkte von $T > 0$ und $\leqq f(x)$ ist. $T < E$, also $m(T) \leqq m_i(E)$. Der weitere Beweis ist hiernach evident.

§ 4.

In ähnlicher Richtung wie B liegt der Satz:

B_1. *Eine Menge E von endlichem äußeren Maße besitzt eine innere Dichte* 1 *auf einer meßbaren Teilmenge von E, deren Maß $= m_i(E)$ ist.*

In den weiteren Punkten der x-Achse, mit Ausnahme einer Nullmenge, existiert eine innere Dichte $= 0$ [6]).

Dabei wird die innere Dichte von E im Punkte x definiert als $\lim\limits_{m(J)=0} \frac{m_i(E\cdot J)}{m(J)}$, wobei J ein x enthaltendes (abgeschlossenes oder offenes) Intervall darstellt.

Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß ein meßbarer Kern K von E mit $m(K) = m_i(E)$ fast überall in den Punkten von K eine Dichte $= 1$ und fast überall in den Punkten der Komplementärmenge $C(K)$ eine Dichte $= 0$ hat.

§ 5.

Wenn E eine lineare Menge ist und J ein willkürliches Intervall darstellt, sind $m_i(E\cdot J)$ und $m_a(E\cdot J)$ additive Intervallfunktionen. Wir definieren die obere und die untere innere Dichte von E im Punkte x $[\overline{D}_x m_i(E\cdot J)$ bzw. $\underline{D}_x m_i(E\cdot J)]$ als $\limsup\limits_{m(J)=0} \frac{m_i(E\cdot J)}{m(J)}$ bzw. $\liminf\limits_{m(J)=0} \frac{m_i(E\cdot J)}{m(J)}$, wobei J ein x enthaltendes (abgeschlossenes oder offenes) Intervall sein soll. Auf übereinstimmende Weise sind die obere und die untere äußere Dichte von E im Punkte $x\,[\overline{D}_x m_a(E\cdot J)$ bzw. $\underline{D}_x m_a(E\cdot J)]$ einzuführen.

I. *Für die Meßbarkeit einer Menge E von endlichem äußeren Maße ist jede der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend*:

α) *die Meßbarkeit derjenigen Teilmenge von E, in deren Punkten die untere* [oder obere] *innere Dichte von E gleich* 0 *ist* [7]); oder

β) *die Meßbarkeit derjenigen Teilmenge von E, in deren Punkten die obere* [oder untere] *äußere Dichte von E gleich* 1 *ist*; oder

γ) *die Meßbarkeit derjenigen Teilmenge von E, in deren Punkten eine der beiden extremen inneren Dichten* [z. B. $\overline{D}\, m_i(E\cdot J)$] *und eine der beiden extremen äußeren Dichten* [z. B. $\underline{D}\, m_a(E\cdot J)$] *voneinander verschieden sind.*

Beweis, daß α) hinreichend ist. Nach B_1 ist die Teilmenge von E, in deren Punkten eine von Null abweichende untere [obere] innere Dichte existiert, meßbar. Ihre zu E komplementäre Menge fällt mit der unter α) genannten meßbaren Menge zusammen.

---

[6]) Die Betrachtungen von §§ 4 und 3 liefern auch: α) *Ausgenommen in den Punkten einer Nullmenge besitzt eine Menge E in jedem ihrer Punkte eine innere Dichte* $= 0$ *oder* 1; β) *das untere Integral einer bestimmt positiven Funktion $f(x)$, definiert auf einer Menge E von endlichem äußeren Maße, besitzt eine Ableitung $\leq f(x)$ in allen Punkten von E, mit Ausnahme einer Nullmenge.*

[7]) Für die Meßbarkeit von E genügt es also anzunehmen, daß diese Teilmenge das Maß Null hat. Dies wurde schon von E. Kamke [und S. Saks] bewiesen; vgl. Fund. Mat. 10 (1927), S. 433.

Dasselbe für β). Nach Fußnote [5]) ist die Teilmenge von E, in deren Punkten die äußere Dichte $\neq 1$ ist, eine Nullmenge. Daraus und aus β) folgt, daß die Menge der Punkte von E, in denen die äußere Dichte $= 1$ ist, meßbar ist.

Dasselbe für γ). Diejenigen Punkte von E, in denen gleichzeitig eine innere Dichte $= 0$ und eine äußere Dichte $= 1$ existieren, bilden nach B_1 und Fußnote [5]) eine Menge K_1, deren zu E komplementäre Menge meßbar ist. Die Teilmenge K_2 von $(E - K_1)$, in deren Punkten die beiden, in der Bedingung γ) betrachteten, extremen inneren und äußeren Dichten voneinander verschieden sind, ist nach den Fußnoten [5]) und [6]) eine Nullmenge. Nach γ) ist $K_1 + K_2$ meßbar, also auch K_1 und $E \equiv K_1 + (E - K_1)$.

Auch läßt sich zeigen:

II. *Für die Meßbarkeit einer Menge E von endlichem äußeren Maße ist jede der folgenden Bedingungen für sich notwendig und hinreichend*:

α_1) *die Existenz auf E einer bestimmt positiven Funktion $f(x)$, deren (unbestimmtes) unteres Integral eine seiner vier extremen Derivierten* [z. B. $D_+ \underline{\int}] = 0$ *hat in den Punkten einer meßbaren Teilmenge von E*; oder

β_1) *die Existenz auf E einer bestimmt positiven Funktion $f(x)$, deren (unbestimmtes) oberes Integral eine seiner vier extremen Derivierten* [z. B. $D^+ \overline{\int}] \geqq f(x)$ *hat in den Punkten einer meßbaren Teilmenge von E*; oder

γ_1) *die Existenz auf E einer bestimmt positiven Funktion $f(x)$, deren oberes und unteres Integral zwei extreme Derivierte haben* [z. B. $D_+ \overline{\int}$ und $D^- \underline{\int}$], *welche gleichzeitig > 0, bzw. $= 0$ sind auf einer meßbaren Teilmenge von E*.

Daß die Bedingungen α_1), β_1) und γ_1) notwendig sind, folgt unmittelbar durch Betrachtung der charakteristischen Funktion von E. Daß sie hinreichend sind, läßt sich unter Anwendung des Satzes B und des zweiten Satzes von Fußnote [5]) auf dieselbe Weise zeigen wie für die Bedingungen α), β) und γ).

§ 6.

III. *Damit eine endlichwertige Funktion $f(x)$, definiert in den Punkten einer Menge E von endlichem äußeren Maße, meßbar*[8]) *sei, ist notwendig und hinreichend*:

a) *die Meßbarkeit derjenigen Teilmenge E_0 von E, in deren Punkten $f(x) = 0$ ist*; *und*

---

[8]) Das impliziert auch die Meßbarkeit von E.

b) *die Zerlegbarkeit von* $(E - E_0)$ *in endlich viele oder abzählbar unendlich viele Teilmengen* (K_j), *in deren Punkten* $f(x)$ *nur positive oder nur negative Werte annimmt, für die* $\underline{\int}_{K_j} |f(x)|\,dx$ *existiert, und in deren Punkten, höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge, eine der vier extremen Derivierten* [z. B. D^+] *der additiven Intervallfunktion* $\underline{\int}_{(K_j \cdot J)} |f(x)|\,dx \geqq |f(x)|$ *ist.*

Beweis. Man sieht unschwer die Notwendigkeit der Bedingungen ein[4]). Sie sind auch hinreichend.

Nach Fußnote [9]) und Bedingung b) hat $\underline{\int}_{(K_j \cdot J)} |f(x)|\,dx$ fast überall auf der Teilmenge K_j eine Ableitung $g_j(x) = |f(x)|$ und nach B ist die Ableitung $= 0$ fast überall auf $(J - K_j \cdot J)$. Da $\underline{\int}_{K_j} |f(x)|\,dx$ existiert, wird das untere Integral über $(K_j \cdot J)$ eine totalstetige, additive Intervallfunktion sein (vgl. § 3); also ist für jedes Intervall J:

$$\underline{\int}_{(K_j \cdot J)} |f(x)|\,dx = \int_J g_j(x)\,dx = \int_{(K_j \cdot J)} g_j(x)\,dx,$$

wobei $g_j(x) = 0$ genommen wird in den Punkten, wo die Ableitung nicht existiert[9]). Daraus folgt die Existenz von $\int_{(K_j \cdot J)} |f(x)|\,dx$, und somit ist $f(x)$ meßbar auf jedem K_j, also auch auf $(E - E_0)$. Die Bedingung a) liefert schließlich die Meßbarkeit von $f(x)$ auf E.[10])

§ 7.

IV. *Damit eine endlichwertige Funktion* $f(x)$, *definiert in den Punkten einer Menge* E *von endlichem äußeren Maße, meßbar sei, ist notwendig und hinreichend:*

a) *die Meßbarkeit derjenigen Teilmenge* E_0 *von* E, *in deren Punkten* $f(x) = 0$ *ist; und*

---

[9]) Siehe z. B. Carathéodory, R. F., § 485, Satz 1 und 2.

[10]) Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen: *Eine endlichwertige Funktion* $f(x)$, *definiert in den Punkten einer Menge* E *von endlichem äußeren Maße, ist summierbar, wenn:* 1. $\underline{\int} |f(x)|\,dx$ *existiert;* 2. *auf der Teilmenge* K_1 *von* E, *in deren Punkten* $f(x)$ *positiv ist, eine der extremen Derivierten von* $\underline{\int}_{(K_1 \cdot J)} f(x)\,dx$ *fast überall* $\geqq f(x)$ *ist; und* 3. *auf der Teilmenge* K_2 *von* E, *in deren Punkten* $f(x)$ *negativ ist, eine der extremen Derivierten von* $\underline{\int}_{(K_2 \cdot J)} |f(x)|\,dx$ *fast überall* $\geqq |f(x)|$ *ist.* Wir bemerken, daß Summierbarkeit von $f(x)$ Meßbarkeit von K_1 und K_2, jedoch nicht von E einschließt.

b) *die Zerlegbarkeit von* $(E - E_0)$ *in endlich viele oder abzählbar unendlich viele Teilmengen* (K_j), *in deren Punkten* $f(x)$ *nur positive oder nur negative Werte annimmt, für die* $\overline{\int}_{K_j} |f(x)|\, dx$ *existiert, während eine der vier extremen Derivierten der additiven Intervallfunktion* $\overline{\int}_{(K_j \cdot J)} |f(x)|\, dx$ *auf* K_j *fast überall* $\leqq |f(x)|$ *und auf der von den übrigen Punkten der* x*-Achse gebildeten Menge fast überall* $= 0$ *ist.*

Anstatt der Bedingung b) läßt sich nehmen:

b_1) *Die Zerlegbarkeit von* $(E - E_0)$ *in endlich viele oder abzählbar unendlich viele „meßbare" Teilmengen* (K_j), *in deren Punkten* $f(x)$ *nur positive oder nur negative Werte annimmt, für die* $\overline{\int}_{K_j} |f(x)|\, dx$ *existiert, während eine der vier extremen Derivierten der additiven Intervallfunktion* $\overline{\int}_{(K_j \cdot J)} |f(x)|\, dx$ *auf* K_j *fast überall* $\leqq |f(x)|$ *ist.*

Der Beweis verläuft, unter Anwendung des zweiten Satzes von Fußnote [5]), wie in § 6.[11])

§ 8.

V. *Damit eine endlichwertige Funktion* $f(x)$, *definiert in den Punkten einer Menge* E *von endlichem äußeren Maße, meßbar sei, ist notwendig und hinreichend:*

a) *die Meßbarkeit der Teilmenge* E_0 *von* E, *in deren Punkten* $f(x) = 0$ *ist; und*

b) *die Zerlegbarkeit von* $(E - E_0)$ *in endlich viele oder abzählbar unendlich viele Teilmengen* (K_j), *in deren Punkten* $f(x)$ *nur positive oder nur negative Werte annimmt, für die* $\overline{\int}_{K_j} |f(x)|\, dx$ *existiert, während auf*

---

[11]) Auch läßt sich zeigen: *Eine endlichwertige Funktion* $f(x)$, *definiert in den Punkten einer Menge* E *von endlichem äußeren Maße, ist summierbar, wenn* 1. $\overline{\int}_{E} |f(x)|\, dx$ *existiert;* 2. *die Teilmenge* K_1 *von* E, *in deren Punkten* $f(x)$ *positiv ist, meßbar ist und einen maßgleichen Kern enthält, auf dem eine der extremen Derivierten von* $\overline{\int}_{(K_1 \cdot J)} f(x)\, dx \leqq f(x)$ *ist;* 3. *die Teilmenge* K_2 *von* E, *in deren Punkten* $f(x)$ *negativ ist, meßbar ist und einen maßgleichen Kern enthält, auf dem eine der extremen Derivierten von* $\overline{\int}_{(K_2 \cdot J)} |f(x)|\, dx \leqq |f(x)|$ *ist.*

Nachträgliche Bemerkung. Auch die folgenden Bedingungen genügen für die Summierbarkeit von $f(x)$: 1. $\overline{\int}_{E} f(x)\, dx = \overline{\int}_{K_1} f(x)\, dx - \underline{\int}_{K_2} |f(x)|\, dx$ *existiert;* 2. K_1 *ist meßbar;* 3. $\overline{\int}_{(E \cdot J)} f(x)\, dx$ *hat fast überall auf* E *eine Ableitung* $= f(x)$.

jedem K_j *fast überall eine willkürliche Derivierte von* $\underline{\int}_{(K_j\cdot J)} |f(x)|\,dx$ *und eine willkürliche Derivierte von* $\overline{\int}_{(K_j\cdot J)} |f(x)|\,dx$ *einander gleich sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt unmittelbar. Sie sind auch hinreichend.

Aus b) folgt, daß $\underline{\int}_{(K_j\cdot J)} |f(x)|\,dx$ und $\overline{\int}_{(K_j\cdot J)} |f(x)|\,dx$ fast überall auf K_j einander gleiche Ableitungen haben; denn beide sind totalstetige additive Intervallfunktionen[9]). Aus den Fußnoten [5]) und [6]) folgt, daß diese Ableitungen fast überall auf K_j $= |f(x)|$ sind. Also genügt $f(x)$ auch den Bedingungen von § 6 und ist somit meßbar[12]).

Die Bedingungen der drei letzten Paragraphen lassen sich auf verschiedene andere Weisen zu charakteristischen Eigenschaften der meßbaren, endlichwertigen Funktionen kombinieren.

§ 9.

Eine endlichwertige Funktion $f(x)$, definiert auf einer Menge E, heiße in dem Punkte ξ von E *etwas halbstetig nach unten* [nach oben], wenn für jedes positive ε die Menge der Punkte x von E, für die

$$f(x) > f(\xi) - \varepsilon \quad [\text{bzw. } f(x) < f(\xi) + \varepsilon]$$

ist, im Punkte ξ eine *obere* innere Dichte > 0 hat.

VI. *Für die Meßbarkeit einer auf* E (*wobei* $m_a(E)$ *endlich*) *definierten, endlichwertigen Funktion* $f(x)$ *ist notwendig und hinreichend, daß* $f(x)$ *fast überall auf* E *etwas halbstetig nach unten* [oder nach oben] *ist.*

Beweis. Da nach Denjoy jede auf einer (meßbaren) Menge E definierte, endlichwertige, meßbare Funktion fast überall auf E approximativ stetig ist, ist die Bedingung notwendig[13]).

---

[12]) Hiermit stimmt überein der Beweis des Satzes: *Eine endlichwertige Funktion* $f(x)$, *definiert auf* E *mit* $m_a(E)$ *endlich, ist summierbar, wenn*: 1. $\overline{\int}_E |f(x)|\,dx$ *existiert*; 2. *fast überall auf der Teilmenge* K_1 *von* E, *in deren Punkten* $f(x)$ *positiv ist, eine willkürliche Derivierte von* $\underline{\int}_{(K_1\cdot J)} |f(x)|\,dx$ *und eine willkürliche Derivierte von* $\overline{\int}_{(K_1\cdot J)} |f(x)|\,dx$ *einander gleich sind*; 3. *eine mit* 2. *übereinstimmende Bedingung für die Teilmenge* K_2 *von* E *gilt, in deren Punkten* $f(x)$ *negativ ist.*

[13]) Siehe A. Denjoy, Bull. Soc. Math. de France 43 (1915), S. 170 und 171, wo der Beweis geführt wird für den Fall eines Intervalls als Definitionsbereich der Funktion. Nach Denjoy (vgl. loc. cit. S. 165) ist eine endlichwertige, meßbare Funktion $f(x)$ im Punkte ξ approximativ stetig, wenn für jedes positive ε die Menge der Punkte x, für die

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

ist, in ξ eine Dichte $= 1$ hat.

Sie ist auch hinreichend. Denn aus ihr folgt, daß bei willkürlichem K die Menge $\mathfrak{M}$ der Punkte x, für die $f(x) > K$ ist, fast überall in ihren eigenen Punkten eine obere innere Dichte > 0 hat. Nach § 5, I, α) folgt hieraus dann die Meßbarkeit von $\mathfrak{M}$ und somit auch von $f(x)$ [14]) [und von E].

§ 10.

Wir nennen eine endlichwertige Funktion $f(x)$, definiert auf einer Menge E, *annähernd stetig* im Punkte ξ, wenn zu jedem positiven ε eine Teilmenge $\mathfrak{M}(\xi, \varepsilon)$ von E existiert, welche in ξ eine *obere* innere Dichte $= 1$ hat und welche die Eigenschaft besitzt, daß für jedes Paar x_1 und x_2 ihrer Punkte

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

ist.

Es läßt sich zeigen:

VII. *Damit eine endlichwertige Funktion $f(x)$, definiert auf einer Menge E von endlichem äußeren Maße, meßbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ fast überall auf E annähernd stetig ist.*

Beweis. Daß die Bedingung notwendig ist, folgt wieder aus der Eigenschaft einer jeden endlichwertigen, meßbaren Funktion in fast allen Punkten ihres Existenzbereiches approximativ stetig zu sein[13]).

Nehmen wir umgekehrt die Bedingung für eine endlichwertige Funktion an, so wird sie auch gelten für die Funktion $f_\nu(x)$, welche bei positivem ν auf folgende Weise aus $f(x)$ hervorgeht. In den Punkten von E mit $-\nu \leqq f(x) \leqq \nu$ sei $f_\nu(x) = f(x)$, in den Punkten mit $f(x) > \nu$ sei $f_\nu(x) = \nu$, und in den Punkten mit $f(x) < -\nu$ sei $f(x) = -\nu$.

Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ und $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots$ zwei nach Null konvergierende Folgen von positiven, abnehmenden Zahlen. Wenn $f_\nu(x)$ annähernd stetig ist in ξ, existiert bei jedem ε_k eine Menge $\mathfrak{M}(\nu; \xi, \varepsilon_k)$,

---

[14]) Ein analoges Resultat findet man bei E. Kamke, loc. cit. [7]), S. 482 und 483; in der Definition des Begriffes „etwas halbstetig nach unten (oben)" nimmt er *untere* innere Dichte statt *oberer* innerer Dichte. — Es wäre auch möglich, die Funktion $f(x)$ etwas halbstetig nach unten [nach oben] zu nennen, wenn für jedes positive ε die Menge der Punkte x von E, für die

$$f(x) > f(\xi) - \varepsilon \quad [\text{bzw. } f(x) < f(\xi) + \varepsilon]$$

ist, im Punkte ξ eine relative innere Dichte und eine relative äußere Dichte von gleichem Werte hat. Hierbei ist der Begriff einer „relativen" inneren (äußeren) Dichte übereinstimmend mit demjenigen einer Derivierten eines unteren (oberen) Integrals (in § 1) einzuführen. Unter Anwendung dieser abgeänderten Definition läßt sich, mit Hilfe des Sierpińskischen Satzes aus Fußnote [6]) und von § 5, I, α), ein Satz von gleichem Wortlaut wie im obigen Paragraphen beweisen.

welche in ξ eine obere innere Dichte $=1$ hat und die Eigenschaft besitzt, daß für zwei willkürliche ihrer Punkte, x_1 und x_2,

$$|f_\nu(x_1) - f_\nu(x_2)| < \varepsilon_k$$

ist. Zu η_k existiert somit ein (abgeschlossenes oder offenes) Intervall $J(\nu; \xi, \varepsilon_k, \eta_k)$, das ξ enthält, dessen Länge $< \eta_k$ ist und für welches die Durchschnittsmenge $(\mathfrak{M}\cdot J)$ ein inneres Maß $> (1-\eta_k)\cdot m(J)$ hat.

Wenn O die obere und U die untere Schranke der Funktionswerte von $f_\nu(x) + (\nu+1)$ auf $(\mathfrak{M}\cdot J)$ sind, so wird

$$O - U \leqq \varepsilon_k \tag{5}$$

sein. Weiter ist

$$\overline{\int\limits_{(E\cdot J)}}[f_\nu(x)+(\nu+1)]\,dx \leqq \overline{\int\limits_{(\mathfrak{M}\cdot J)}}[\;]\,dx + \overline{\int\limits_{(E\cdot J)-(\mathfrak{M}\cdot J)}}[\;]\,dx \tag{6}$$
$$< O\cdot m(J) + (2\nu+1)\cdot\eta_k\cdot m(J)$$

und

$$\underline{\int\limits_{(E\cdot J)}}[f_\nu(x)+(\nu+1)]\,dx \geqq \underline{\int\limits_{(\mathfrak{M}\cdot J)}}[\;]\,dx > U\cdot(1-\eta_k)\cdot m(J) \tag{7}$$
$$> U\cdot m(J) - (2\nu+1)\cdot\eta_k\cdot m(J).$$

Aus (6), (7) und (5) folgt:

$$\overline{\int\limits_{(E\cdot A)}}[f_\nu(x)+(\nu+1)]\,dx - \underline{\int\limits_{(E\cdot J)}}[f_\nu(x)+(\nu+1)]\,dx$$
$$< \varepsilon_k\cdot m(J) + (2\nu+1)\cdot 2\,\eta_k\cdot m(J).$$

Somit wird

$$\lim_{k=\infty} \frac{\overline{\int\limits_{(E\cdot J)}}[\;]\,dx - \underline{\int\limits_{(E\cdot J)}}[\;]\,dx}{m(J)} \tag{8}$$

existieren und $=0$ sein. Mit zunehmendem k zieht sich das Intervall J in ξ zusammen. Daraus und aus (8) folgert man leicht die Existenz von Derivierten des oberen und des unteren Integrals in ξ, welche einander gleich sind.

Die (bestimmt positive) Funktion $f_\nu(x) + (\nu+1)$ genügt auf E den Bedingungen von § 8 und ist dadurch meßbar; und somit auch E. Daraus folgt weiter die Meßbarkeit von $f_\nu(x)$ und von $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(x) = f(x)$.

§ 11.

Die von Denjoy bei meßbaren Funktionen gegebene Definition der approximativen Stetigkeit[13]) läßt sich u. a. auf folgende Weise auf willkürliche Funktionen übertragen. Eine endlichwertige Funktion $f(x)$, definiert auf einer Menge E, heiße in dem Punkte ξ von E *approximativ*

stetig, wenn für jedes positive ε die Menge der Punkte x von E, für die

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

ist, in ξ eine *obere* innere Dichte $= 1$ hat.

Der folgende Satz ist dann ein Korollar eines jeden der beiden Sätze von § 9 und 10:

VIII. *Eine endlichwertige Funktion $f(x)$, definiert auf einer Menge E von endlichem äußeren Maße, ist meßbar, wenn sie fast überall auf E approximativ stetig ist*[15]).

Schließlich bemerken wir, daß die vorhergehenden Sätze nebst Beweisen sich auf Räume von mehreren Dimensionen übertragen lassen. In zwei Dimensionen z. B. sind dabei die Derivierten der oberen und unteren Integrale und die relativen äußeren und inneren Dichten der Mengen zu definieren mit Hilfe von (abgeschlossenen oder offenen) *Quadraten*, welche den betrachteten Punkt enthalten.

---

[15]) Ein ähnliches Resultat gab W. Stepanoff, siehe Rec. Soc. Math. de Moscou **31** (1922—24), S. 487—489. Er fordert etwas mehr, indem (loc. cit.) die approximative Stetigkeit mittels der *unteren* inneren Dichte definiert wird.

(Eingegangen am 23. 4. 1930.)

Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme.

Von

Eberhard Hopf in Berlin-Dahlem.

Die vorliegende Note enthält zwei, wie mir scheint, nicht allgemein bekannte einfache Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen von dynamischen Systemen, welche eine positive Integralinvariante besitzen. Sie gelten unter der Voraussetzung, daß jede Bewegung des Systems für alle Zeiten im Regularitätsgebiet der Bewegungsgleichungen verläuft (z. B. beim regularisierten Dreikörperproblem). Der erste Satz stellt eine Erweiterung des bekannten Wiederkehrsatzes von Poincaré[1]) dar und besagt, daß die Bahnkurven des Systems im Phasenraum „im allgemeinen" (im Sinne der Lebesgueschen Maßtheorie) entweder die Wiederkehreigenschaft besitzen oder zur Grenze des Phasenraums laufen. Der im folgenden hierfür gegebene Beweis ist eine Ausdehnung des schönen, von Herrn Carathéodory[2]) herrührenden Beweises für den Wiederkehrsatz. Der zweite Satz betrifft den Zusammenhang zwischen Vergangenheits- und Zukunftsverlauf der Bewegungen, und sagt aus, daß die von der Grenze des Phasenraums herkommenden Bahnkurven „im allgemeinen" wieder zur Grenze zurücklaufen müssen. Mit Hilfe dieses Theorems wird ein bekannter Schwarzschildscher Satz[3]) über die Bewegungen im eingeschränkten Dreikörperproblem streng bewiesen (Satz 4). Eine Anwendung auf das allgemeine Dreikörperproblem,

---

[1]) Sur les équations de la Dynamique et le Problème des trois corps, Acta Math. **13** (1890), p. 1—270, insbes. p. 67—72. Les méth. nouv. de la mécanique céleste III (Paris 1899), p. 140—157.

[2]) Über den Wiederkehrsatz von Poincaré, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1919, S. 580—584.

[3]) Über die Stabilität der Bewegung eines durch Jupiter gefangenen Kometen, Astr. Nachr. **141** (1896), S. 1—7. Die dort von Schwarzschild angestellte einfache Überlegung reicht zum lückenlosen Beweise noch nicht aus.

die sich prinzipiell ebenso gestaltet, unterlassen wir im folgenden. Die sich hierbei ergebenden Sätze sind vor kurzem von Herrn J. Chazy[4]) auf etwas anderem Wege behandelt worden.

§ 1.

Stationäre Flüssigkeitsströmungen. Fliehende Punkte und Wiederkehrpunkte.

Mit P seien im folgenden die Punkte auf einer endlichviel-dimensionalen offenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ bezeichnet (sie braucht keine Teilmenge des Euklidischen Raumes der betreffenden Dimensionenzahl zu sein). Auf $\mathfrak{M}$ sei ein Lebesguesches Maß definiert; das Maß irgendeiner meßbaren (z. B. offenen oder abgeschlossenen) Punktmenge M auf $\mathfrak{M}$ sei mit $m(M)$ bezeichnet. Wir denken uns nun auf $\mathfrak{M}$ eine stationäre stetige Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Es sei also eine einparametrige kontinuierliche Gruppe (der Parameter t ist die Zeit) von Transformationen $T_t(P)$ der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ in sich vorgegeben:

$$T_0(P) \equiv P, \qquad T_t(T_\tau(P)) \equiv T_{t+\tau}(P).$$

$T_t(P)$ sei für jedes t eine umkehrbar eindeutige und stetige Transformation von $\mathfrak{M}$ in sich. Ebenso hängt T_t stetig von der Zeit t ab. Bei festgehaltenem P durchläuft dann der Punkt $P_t = T_t(P)$ die durch $P = P_0$ hindurchgehende, für alle Zeiten t definierte und stetige Stromlinie. Ist M irgendeine Punktmenge auf $\mathfrak{M}$, so ist klar, was unter $T_t(M)$ zu verstehen ist. Die Inkompressibilität der Flüssigkeit verlangt die Inhaltstreue aller Transformationen T_t, d. h. das Bestehen der Beziehung

$$m(T_t(M)) = m(M)$$

für alle meßbaren Punktmengen M und alle Zeiten t.

Einen Punkt P wollen wir einen *fliehenden Punkt* nennen, wenn die durch P hindurchgehende Stromlinie $P_t = T_t(P)$ für $t \to \infty$ keinen Häufungspunkt in $\mathfrak{M}$ besitzt. Diese Stromlinie konvergiert dann für $t \to \infty$ gegen die Grenze von $\mathfrak{M}$. P heißt ein *Wiederkehrpunkt*, wenn P ein Häufungspunkt der Punkte $P_t = T_t(P)$ für $t \to \infty$ ist, wenn also die durch P hindurchlaufende Stromlinie immer wieder in beliebige Nähe von P gelangt.

Es ist klar, daß *allen* Punkten einer Stromlinie die Flieheigenschaft zukommt, falls dies von *einem* ihrer Punkte gilt. Ebenso ist es mit der Wiederkehreigenschaft; denn ist P ein Wiederkehrpunkt, d. h. ist für eine

---

[4]) Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps, Journ. de Math. pure et appl. (8) **9** (1929), p. 353—380. Die Überlegungen von Herrn Chazy knüpfen an einige fragmentarische Bemerkungen von Poincaré an.

passende Folge gegen Unendlich gehender Zahlen t_ν:

$$P = \lim T_{t_\nu}(P),$$

so gilt auch für jeden Punkt $P^* = T_\tau(P)$ der durch P laufenden Stromlinie:

$$P^* = T_\tau(P) = \lim T_\tau(T_{t_\nu}(P)) = \lim T_{t_\nu}(T_\tau(P)) = \lim T_{t_\nu}(P^*).$$

Wenn nicht besonders hervorgehoben, beziehen sich diese Definitionen im folgenden stets auf eine feste Zeitrichtung, etwa $t \to +\infty$. Es gilt dann der

Satz 1. *Bis auf eine Menge vom Maß Null sind alle Punkte von $\mathfrak{M}$ entweder Wiederkehr- oder fliehende Punkte.*

Im besonderen Falle, wo der Inhalt von $m(\mathfrak{M})$ endlich ist, bilden die fliehenden Punkte von $\mathfrak{M}$ selbst eine Nullmenge, und man hat den Poincaréschen

Wiederkehrsatz. *Bei endlichem $m(\mathfrak{M})$ sind bis auf eine Nullmenge alle Punkte von $\mathfrak{M}$ Wiederkehrpunkte.*

In diesem Falle folgt von selbst, daß fast alle Punkte von $\mathfrak{M}$ sogar gleichzeitig in beiden Zeitrichtungen $t \to -\infty$, $t \to +\infty$ Wiederkehrpunkte sein müssen, da die Vereinigungsmenge zweier Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Unter den allgemeinen Voraussetzungen von Satz 1 ist jedoch nicht ohne weiteres zu erkennen, ob solche Zusammenhänge in beiden Richtungen $t \to \pm\infty$ bestehen. Indessen läßt sich in der Tat beweisen, daß die Wiederkehrpunkte hinsichtlich $t \to -\infty$ mit den Wiederkehrpunkten bezüglich $t \to +\infty$ „im allgemeinen" zusammenfallen, anders ausgedrückt, so gilt der

Satz 2. *Bis auf eine Nullmenge sind alle hinsichtlich der Vergangenheit fliehenden Punkte auch bezüglich der Zukunft fliehende Punkte.*

„Im allgemeinen" laufen also die von der Grenze von $\mathfrak{M}$ herkommenden Stromlinien wieder zur Grenze zurück.

Bevor wir zu den Beweisen übergehen, sei bemerkt, daß P gewiß dann ein (für $t \to +\infty$) fliehender Punkt ist, wenn für ein festes $l > 0$ die Punktfolge $P_0 = P$, $P_1 = T_l(P_0)$, $P_2 = T_l(P_1)$, ..., allgemein $P_n = T_{nl}(P)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ gegen die Grenze von $\mathfrak{M}$ konvergiert, oder anders ausgedrückt, wenn jede in $\mathfrak{M}$ enthaltene abgeschlossene Punktmenge höchstens endlich viele verschiedene Punkte dieser Folge enthält. Wäre nämlich P^* ein Grenzpunkt einer passenden Folge $P_{t_\nu} = T_{t_\nu}(P)$, $t_\nu \to +\infty$, so bestimme man eine Folge n_ν ganzer Zahlen mit der Eigenschaft $|\tau_\nu| < l$, $\tau_\nu = n_\nu l - t_\nu$. Dann wäre

$$P_{n_\nu} = T_{n_\nu l}(P) = T_{\tau_\nu}(T_{t_\nu}(P)),$$

und die Punktfolge P_n hätte, wenn τ irgendeinen Häufungswert der τ_ν bedeutet, gegen die Voraussetzung den Häufungspunkt $T_\tau(P^*)$. Wir beweisen zunächst das

Lemma. *Ist M eine in $\mathfrak{M}$ enthaltene meßbare Punktmenge mit $m(M) > 0$, und sind die Punktmengen*

$$M_0 = M, \quad M_1 = T_l(M), \quad M_2 = T_{2l}(M), \ \ldots,$$

unter $l > 0$ eine Konstante verstanden, paarweise punktfremd, so sind bis auf eine Nullmenge alle Punkte von M fliehende Punkte.

Beweis. Es bedeute A eine in $\mathfrak{M}$ enthaltene abgeschlossene Punktmenge. Mit E sei dann die Menge derjenigen Punkte P von M bezeichnet, für welche bei festem P unendlich viele Punkte der Folge $P_n = T_{nl}(P)$. $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ in A enthalten sind. Es genügt zu beweisen, daß

$$m(E) = 0 \tag{1}$$

sein muß; denn man kann immer die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ mit einer Folge von abgeschlossenen Mengen A_ν ganz überdecken, und die Vereinigungsmenge der entsprechenden Mengen E_ν ist dann offenbar genau die Menge der nicht-fliehenden Punkte von M, nach bekannten Sätzen also eine Nullmenge, wenn $m(E_\nu) = 0$ für jedes ν gilt.

Zum Beweise von (1) betrachten wir die Durchschnittsmengen

$$D_n = \mathfrak{D}(A, M_n); \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Unter den Voraussetzungen des Lemmas sind die D_ν erst recht paarweise punktfremd. Da A als abgeschlossene Punktmenge meßbar ist, ist es auch D_ν als Durchschnitt zweier meßbarer Punktmengen. Da ferner alle D_ν in A enthalten sind, muß die Reihe

$$m(D_0) + m(D_1) + m(D_2) + \ldots$$

konvergieren, denn keine Teilsumme kann den Wert $m(A)$ überschreiten. Nun ist ersichtlich

$$T_{-nl}(D_n) = \mathfrak{D}\{M, T_{-nl}(A)\} \tag{2}$$

die Menge aller Punkte P von M, für welche die Punkte $T_{nl}(P)$ in A liegen, und daher E genau die Menge aller Punkte von M, welche unendlich vielen der Mengen (2) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ angehören. Somit ist E gewiß für jedes $k > 0$ in der Vereinigungsmenge aller Mengen (2) mit $n = k, k+1, k+2, \ldots$ enthalten. Da nun die Menge (2) wegen der Inkompressibilität den Inhalt $m(D_n)$ besitzt, kann das Maß jener Vereinigungsmenge niemals den Wert

$$m(D_k) + m(D_{k+1}) + m(D_{k+2}) + \ldots$$

überschreiten. Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum m(D_\nu)$, und da k beliebig war, ist also E in Mengen beliebig kleinen Inhalts enthalten, d. h. es gilt (1), w. z. b. w.

Beweis des Satzes 1. P ist gewiß ein Wiederkehrpunkt, wenn P ein Häufungspunkt der Folge $P_\nu = T_\nu(P)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ist. Es sei V die Menge aller Punkte, welche die letztere Eigenschaft nicht besitzen. Wir zeigen, daß V bis auf eine Nullmenge ganz aus fliehenden Punkten besteht, wenn nicht $m(V) = 0$ ist.

Wir denken uns nun, was immer möglich ist, eine Folge von offenen Punktmengen $U_1, U_2, U_3, \ldots$ vorgegeben, welche die Mannigfaltigkeit ganz und beliebig fein überdecken, d. h. zu jedem Punkte P von $\mathfrak{M}$ und jeder Umgebung U_P von P soll es mindestens ein U_ν geben, welches einerseits P enthält und andererseits in U_P enthalten ist. Ist z. B. $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge des Euklidischen Raumes der gleichen Dimensionenzahl, so nehme man die Folge der in $\mathfrak{M}$ enthaltenen Hyperkugeln mit rationalem Radius und rationalen Mittelpunktskoordinaten[6]). Es bedeute nun $M^{(i)}$ die Menge aller in U_i enthaltenen Punkte P mit der Eigenschaft, daß die Punkte $T_1(P), T_2(P), T_3(P), \ldots$ sämtlich außerhalb U_i gelegen sind. Die oben eingeführte Menge V ist dann genau die Vereinigungsmenge der Mengen $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}, \ldots$; denn zu jedem Punkte P von V gibt es nach Definition eine Umgebung U_P von P derart, daß die Punkte $T_1(P), T_2(P), \ldots$ sämtlich außerhalb U_P gelegen sind, also auch ein U_i, welches hier die Rolle von U_P übernehmen kann; andererseits ist natürlich jedes $M^{(\nu)}$ eine Teilmenge von V. Zum Beweise der Behauptung, daß die nicht-fliehenden Punkte von V eine Nullmenge bilden, genügt es zu zeigen, daß für jedes i die nicht-fliehenden Punkte von $M^{(i)}$ eine Nullmenge bilden.

Wir brauchen also nur zu beweisen, daß für eine vorgegebene offene Menge U die Menge M aller Punkte P von U, für welche sämtliche Punkte $T_1(P), T_2(P), \ldots$ außerhalb U gelegen sind, fast ganz aus fliehenden Punkten besteht, wenn M keine Nullmenge ist. Aus der Stetigkeit der Transformationen T_ν folgt leicht, daß jeder in U gelegene Häufungspunkt der Menge M wieder zu M gehört. Somit ist gewiß, unter $\overline{M}$ die abgeschlossene Hülle von M verstanden,

$$M = \mathfrak{D}(U, \overline{M}),$$

und M ist also als Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Punktmenge meßbar. Man betrachte dann die Folge der Mengen

$$(3) \qquad M_0 = M, \quad M_1 = T_1(M), \quad M_2 = T_2(M), \quad \ldots .$$

$M = M_0$ kann nun mit keinem M_ν $(\nu > 0)$ einen Punkt P gemeinsam haben, da für jeden Punkt P von M der Punkt $T_\nu(P)$ außerhalb von U, a fortiori

[6]) Im allgemeinen Falle läßt sich $\mathfrak{M}$ mit abzählbar vielen, einem Euklidischen Element homöomorphen Gebieten überdecken. In jedem dieser Gebiete wähle man jene „rationalen Hyperkugeln"; ihre Gesamtheit für alle Gebiete genügt den angegebenen Forderungen.

also außerhalb von M gelegen sein soll. Daher müssen die Mengen (3) überhaupt paarweise punktfremd sein, denn für einen gemeinsamen Punkt P von M_ν und $M_{\nu+\mu}$ wäre $T_{-\nu}(P)$ ein gemeinsamer Punkt von M_0 und M_μ. Auf die Punktmenge M läßt sich das also Lemma anwenden, und man erhält das gewünschte Resultat, daß fast alle Punkte von M fliehende Punkte sind.

Unter den Voraussetzungen des Poincaréschen Wiederkehrsatzes ($m(\mathfrak{M})$ endlich) schließt man mit Herrn Carathéodory (loc. cit. [3])) direkt, daß M, somit auch das V des Beweises von Satz 1, eine Nullmenge sein muß; denn es ist $\sum m(M_\nu) \leqq m(\mathfrak{M})$, und die Glieder der Reihe haben alle denselben Wert.

Beweis des Satzes 2. U sei eine offene, nebst ihrer abgeschlossenen Hülle ganz in $\mathfrak{M}$ gelegene Punktmenge, B die Menge aller in U enthaltenen, bezüglich der Vergangenheit $t \to -\infty$ fliehenden Punkte. Es genügt wieder zu zeigen, daß fast alle Punkte von B auch hinsichtlich der Zukunft $t \to +\infty$ fliehende Punkte sind, wenn B keine Nullmenge ist. Es sei nun B_n die Menge aller Punkte P von U, für welche die Punkte $T_t(P)$ für $t \leqq -n$ sämtlich außerhalb U gelegen sind. Aus der Definition des bezüglich $t \to -\infty$ fliehenden Punktes folgt leicht, daß B gewiß in der Vereinigungsmenge der Mengen

$$B_1, B_2, B_3, \ldots$$

enthalten ist. Da B_i in B_{i+1} enthalten ist, ist, wenn B keine Nullmenge ist, bei passendem l kein B_i mit $i \geqq l$ eine Nullmenge. Es genügt also wieder zu zeigen, daß fast alle Punkte jedes dieser B_i bezüglich $t \to +\infty$ fliehende Punkte sein müssen.

Wir brauchen also nur zu zeigen, daß die Menge M aller Punkte P von U mit der Eigenschaft, daß die Punkte $T_t(P)$ für $t \leqq -l$ ($l =$ irgendeine positive Konstante) sämtlich außerhalb von U gelegen sind, fast ganz aus (bezüglich $t \to +\infty$) fliehenden Punkten besteht, wenn nicht $m(M) = 0$ ist. Aus einer ähnlichen Überlegung, wie sie bereits beim Beweise von Satz 1 angestellt wurde, folgt auch hier wieder die Meßbarkeit von M. Wir betrachten dann die Folge der inhaltsgleichen Mengen

$$\begin{aligned} M_0 = M,\quad M_{-1} &= T_{-l}(M),\quad M_{-2} = T_{-2l},\quad \ldots, \\ M_1 &= T_l(M),\qquad M_2 = T_{2l},\quad \ldots. \end{aligned}$$

Nach der Definition von M kann $M = M_0$ mit keinem M_ν der ersten Reihe ($\nu < 0$) einen Punkt gemeinsam haben. Somit können auch — man erkennt dies ähnlich wie am Schluß des Beweises von Satz 1 — für $\nu > 0$ M_0 und M_ν, und überhaupt M_ν und $M_{\nu+\mu}$ ($\nu \geqq 0$, $\mu > 0$) keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Nach dem Lemma sind also fast alle Punkte von M bezüglich der Zukunft fliehende Punkte, w. z. b. w.

Die Sätze bleiben bestehen, wenn die Voraussetzung der Inkompressibilität durch die allgemeinere Voraussetzung der Existenz einer positiven Integralinvariante ersetzt wird, d. h. es möge eine auf $\mathfrak{M}$ meßbare und fast überall positive Funktion $F(P)$ existieren mit der Eigenschaft, daß für jede meßbare Punktmenge M und alle Zeiten t das Integral

$$\mu(M) = \int_M F(P)\, dm.$$

die Invarianzeigenschaft

$$\mu(T_t(M)) = \mu(M) \quad .$$

besitzt. Man hat dann in allen obigen Überlegungen m durch μ zu ersetzen und zu berücksichtigen, daß die Relationen $m(M) = 0$ und $\mu(M) = 0$ gleichbedeutend sind.

§ 2.

Anwendung auf das eingeschränkte Dreikörperproblem.

Im eingeschränkten Dreikörperproblem (problème restreint) handelt es sich bekanntlich um die Bewegung eines masselosen Punktes, der von zwei sich um ihren Schwerpunkt in Kreisbahnen bewegenden Massenpunkten nach dem Newtonschen Gesetze angezogen wird[6]). Wird wie üblich die Bewegung des Punktes auf ein mit den beiden Massenpunkten starr verbundenes Koordinatensystem mit dem (ruhenden) Schwerpunkt als Ursprung bezogen, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, & \dot{x}_4 &= \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + 2\omega x_5, \\ \dot{x}_2 &= x_5, & \dot{x}_5 &= \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} - 2\omega x_4, \\ \dot{x}_3 &= x_6, & \dot{x}_6 &= \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Omega &= \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{\omega^2}{2} r^2, \\ r^2 &= x_1^2 + x_2^2, \end{aligned}$$

unter $x_1, \ldots, x_6$ die Phasen, insbesondere unter x_1, x_2, x_3 die Koordinaten und unter x_4, x_5, x_6 die Geschwindigkeitskomponenten des masselosen Punktes verstanden. Wir denken uns dabei (im x_1-x_2-x_3-Raum) die beiden Massenpunkte mit den Massen m_1, m_2 in der Ebene $x_3 = 0$ festliegend. r_1, r_2 bedeuten die Entfernungen des masselosen Punktes x_1, x_2, x_3 von beiden Massenpunkten, ω die konstante Winkelgeschwindigkeit der um den Schwerpunkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ rotierenden x_1-x_2-Ebene. Die Gleichungen (4) besitzen das Jacobische Integral

$$\text{(5)} \qquad \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_6) \equiv \frac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) - \Omega = C.$$

[6]) Vgl. Charlier, Die Mechanik des Himmels, Bd. 2, § 2, 3. Leipzig 1907.

Diese Gleichung definiert eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit im sechsdimensionalen Phasenraum. Wir betrachten die Bewegung auf ihr in seit Poincaré üblicher Weise als Flüssigkeitsströmung und untersuchen kurz, ob diese Strömung den Voraussetzungen von § 1 genügt. Jeder Punkt P von $\Phi = C$, für welchen die x_i endliche Werte haben, ist offenbar ein regulärer Punkt der Mannigfaltigkeit, wenn nicht $\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ ist. Es gibt indessen nur fünf solcher Ausnahmepunkte (Librationspunkte); es gibt dabei höchstens vier Werte der Jacobischen Konstanten C, bei welchen Librationspunkte auftreten können. Bis auf diese Werte von C ist also $\Phi = C$ singularitätenfrei. Es ist nun seit langem bekannt, daß bei passendem $C_0 < 0$ die Mannigfaltigkeit $\Phi = C$ für alle

(6) $$C < C_0$$

in mindestens zwei getrennte Stücke zerfällt, während $\Phi = C$ für $C > C_0$ zusammenhängend ist [7]). Die Projektion auf den x_1-x_2-x_3-Raum ist nämlich

$$\Omega \geqq - C$$

(der Hillsche erlaubte Bewegungsbereich); sie zerfällt unter der Bedingung (6) in mindestens zwei getrennte Bereiche, von denen jedenfalls einer keinen der beiden Massenpunkte m_1, m_2 enthält. Wir betrachten dann nur diesen Bereich und wollen mit $\mathfrak{M}_C$ nur das entsprechende Stück der obigen Mannigfaltigkeit bezeichnen. Auf $\mathfrak{M}_C$ ist dann die Flüssigkeitsströmung frei von Singularitäten, d. h. jede Stromlinie ist für alle Werte der Zeit verfolgbar. Es ist klar, daß dies von den restlichen Stücken von $\Phi = C$ nicht gilt, da dort der masselose Punkt auf m_1 oder m_2 stürzen kann. Doch lassen wir im Moment diese Möglichkeit, die nur dann zu berücksichtigen ist, wenn (6) nicht erfüllt ist, beiseite. Die Strömung auf $\mathfrak{M}_C$ besitzt des weiteren eine positive Integralinvariante. Betrachtet man zunächst die den Bewegungsgleichungen (4) entsprechende Strömung im ganzen sechsdimensionalen Phasenraume, so ist klar, daß sie inkompressibel ist, da, wenn man die rechten Seiten in (4) mit $X_1, X_2, \ldots, X_6$ bezeichnet, die Divergenzbedingung $\sum \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ erfüllt ist [8]). Betrachtet man zwei unendlich benachbarte Mannigfaltigkeiten $\Phi = C$ und $\Phi = C + dC$, und bezeichnet man mit dn das bis zum Treffpunkt mit $\Phi = C + dC$ gezogene Normalenstück von $\Phi = C$, so ist, wie leicht zu sehen,

(7) $$dC = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\right)^2} dn,$$

---

[7]) Im übrigen ist leicht direkt einzusehen, daß $C = C_0$ einer der Librationswerte ist.

[8]) Vgl. loc. cit. [1]), Méthodes nouv. III, p. 41—42.

wobei die Quadratwurzel ständig von Null verschieden ist, wenn die Mannigfaltigkeit $\Phi = C$ singularitätenfrei ist, wenn also C mit keinem der vier obigen Werte zusammenfällt. Ist $d\sigma$ das Volumenelement auf $\Phi = C$, so ist $d\sigma\, dn$ als Volumenelement des Phasenraums eine Invariante der Strömung, und wegen (7) und wegen der Invarianz von dC

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\right)^2}}$$

eine Invariante der auf $\mathfrak{M}_C$ betrachteten Strömung. Die gesuchte Integralinvariante lautet also

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\right)^2}}.$$

Eine Stromlinie auf $\mathfrak{M}_C$ kann nur dann gegen die Grenze von $\mathfrak{M}_C$ konvergieren, wenn $\sum_1^6 x_\nu^2 \to \infty$ für $t \to \infty$ gilt. Mit Rücksicht auf (5) ist dies immer nur der Fall, wenn bloß $\sum_1^3 x_\nu^2 \to \infty$ für $t \to \infty$ gilt, d. h. wenn der masselose Punkt sich ins Unendliche entfernt. Aus § 1 folgen demnach zunächst unter der Bedingung (6) die Sätze:

Satz 3. *Im allgemeinen konvergiert entweder die Entfernung des masselosen Punktes von m_1 und m_2 über alle Grenzen für $t \to \infty$ oder der Bewegungszustand kehrt für $t \to \infty$ immer wieder in beliebige Nähe des anfänglichen Bewegungszustandes zurück. Die Phasenpunkte, denen keine dieser Bewegungen entsprechen, bilden auf jeder der Jacobischen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_C$, für welche C von den vier Librationswerten verschieden ist, eine Menge vom Lebesgueschen Inhalt Null.*

Satz 4. *Kommt der masselose Punkt aus unendlicher Entfernung, so wird er sich im allgemeinen wieder in unendliche Entfernung begeben, abgesehen von unwesentlichen Ausnahmefällen der im vorigen Satz angegebenen Art.*

Beide Sätze gelten indessen allgemein, auch wenn (6) nicht erfüllt ist. Man hat dann die von Herrn Levi-Civita[9]) entdeckte Regularisierung des problème restreint heranzuziehen. Das Differentialgleichungssystem (4) läßt sich nämlich durch eine analytische und eineindeutige Punkttransfor-

[9]) Vgl. Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps, Acta Math. 30, p. 305—327. Die Transformation für das hier betrachtete räumliche Problem findet man in: Sur la régularisation du problème des trois corps, Acta Math. 42, p. 99—144.

mation $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_6)$ und eine Zeittransformation $d\tau = \Omega\, dt$ derart umformen,

$$\frac{dy_i}{d\tau} = Y_i(y_1, \ldots, y_6) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{8}$$

daß jeder Bewegung mit einem Einsturz auf m_1 — analoges gilt nach passender Punkttransformation für den Einsturz auf m_2 — eine Lösungskurve von (8) im y_i-Raume entspricht, welche im Einsturzmoment τ durch einen Punkt des Regularitätsgebietes von (8) läuft. Hieraus ist leicht zu erkennen, daß die Mannigfaltigkeit $\Phi = C$ durch Hinzufügen aller Zusammenstoßphasen zu einer neuen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_C$ erweitert werden kann, auf welcher die betrachtete Flüssigkeitsströmung singularitätenfrei ist, wenn man τ durchweg als Zeitvariable zugrunde legt[10]. Ist P^* eine Stoßphase — ihr entspricht ein regulärer y_i-Punkt von (8) —, so verfolge man die gemäß (8) durch P^* hindurchgehende Stromlinie ein kleines Stück; dem Endpunkt P wird dann eine gewöhnliche Phase auf $\Phi = C$ entsprechen. Ist U eine hinreichend kleine Umgebung von P auf $\Phi = C$, so wird durch die Strömung nach Zurückverfolgen um jene Zeitspanne U umkehrbar eindeutig und analytisch auf eine fünfdimensionale Umgebung U^* von P^* abgebildet. Somit ist mit P auch P^* ein regulärer Punkt der erweiterten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_C$. Durch die Regularisierung der Jacobischen Mannigfaltigkeit wird auch die Integralinvariante der Strömung von selbst auf $\mathfrak{M}_C$ fortgesetzt, wie man ohne Schwierigkeit einsieht.

Die Bedingung (6) ist somit unwesentlich für die Gültigkeit der Sätze 3 und 4. Im übrigen kann man auch ohne Mühe mit Hilfe der Regularisierung einsehen, daß die Bewegungen, bei welchen einmal ein Stoß passiert, auf $\Phi = C$ eine Punktmenge vom Maße Null bilden, so daß im allgemeinen die Bewegungen stoßfrei sind.

---

[10]) Vgl. analoge Bemerkungen für das allgemeine Dreikörperproblem in: G. D. Birckhoff, Dynamical systems, New York 1927, S. 286.

(Eingegangen am 8. 3. 1930.)

Flächen mit Bertrandschen Kurven und pseudosphärische Flächen- und Strahlensysteme.

Von

Hans Jonas in Berlin-Steglitz.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Die *Bertrandschen Kurven* sind durch das Bestehen einer linearen Relation mit konstanten Koeffizienten zwischen Flexion und Torsion gekennzeichnet. Zu einer jeden derartigen Kurve gibt es eine *konjugierte* Bertrandsche Kurve, die mit ihr die Hauptnormalen gemein hat, während die Tangenten und damit auch die Binormalen sich unter konstantem Winkel kreuzen; entsprechende Kurvenpunkte haben konstanten Abstand. Der Zusammenhang mit den *Biegungsflächen des einschaligen Rotationshyperboloids* ist Gegenstand des Satzes von Laguerre und Bioche: Legt man zu den Binormalen einer Bertrandschen Kurve die Parallelen durch die Punkte der konjugierten Kurve, so bilden diese eine auf das einschalige Rotationshyperboloid abwickelbare Regelfläche. Und umgekehrt: Auf jeder Biegungregelfläche des einschaligen Rotationshyperboloids stellt der verbogene Kehlkreis eine Bertrandsche Kurve dar; die konjugierte Kurve wird von dem Mittelpunkt des Hyperboloids beschrieben, das auf der Biegungsregelfläche rollt und diese dabei längs der gemeinsamen Erzeugenden berührt.

In den von Bianchi entdeckten *schiefen Weingartenschen Systemen pseudosphärischer Flächen*[1]) spielen die Bertrandschen Kurven die Rolle der Trajektorien, die unter Zuordnung der Asymptotenlinien die ∞^1 Flächen der Schar durchsetzen. Hinzuweisen ist noch auf die von Razzaboni angegebene, von einer Riccatischen Differentialgleichung abhängende *Transformation*[2]), die zu einer gegebenen Bertrandschen Kurve ∞^2 neue liefert; die Punkte der transformierten Kurve haben konstanten Abstand von denen der gegebenen und liegen in den Schmiegungsebenen der konjugierten Kurve.

Eine besondere *Klasse* **B** *von Flächen, die eine Schar Bertrandscher Kurven mit denselben Konstanten besitzen,* definieren wir durch die folgende wechselseitige Beziehung zwischen einer solchen Fläche und ihrer *konjugierten Fläche*, dem Träger der konjugierten Kurven: *Bringt man die für einen Punkt der ersten Fläche konstruierte Schmiegungsebene der Bertrandschen Kurve mit der Tangentialebene der zweiten Fläche zum Schnitt und umgekehrt, so sollen diese beiden Flächentangenten korrespondierende Fortschreitungsrichtungen vorstellen.* Statt dessen kann man auch sagen: *Neben den beiden konjugierten Scharen Bertrandscher Kurven soll das Flächenpaar zwei Scharen entsprechender Kurven von der Eigenschaft zulassen, daß jedesmal die Tangente an eine dieser Kurven die Tangente der auf der anderen Fläche gelegenen Bertrandschen Kurve trifft.* Wir werden zeigen, daß die Flächen **B** mit den *Trajektorienflächen der schiefen Weingartenschen Systeme* zusammenfallen, d. h. mit denjenigen Flächen, die man erhält, wenn man auf einer der pseudosphärischen Flächen eine beliebige Kurve zur Leitlinie wählt und die Gesamtheit der sie schneidenden Trajektorien ins Auge faßt.

Eine ausgezeichnete Klasse $\mathbf{B}^*$ unter den Flächen **B** ergibt sich auf Grund der weiteren Forderung, daß *die soeben erwähnten Tangentenschnittpunkte zwei Hilfsflächen beschreiben, die auch ihrerseits von je zweien der vier Tangenten berührt werden.* Diese Flächen $\mathbf{B}^*$ erweisen sich als identisch mit denjenigen Trajektorienflächen, die aus den pseudosphärischen Flächen des Systems die Asymptotenlinien ausschneiden[3]). Beachtung ver-

---

[1]) Bianchi, Sui sistemi obliqui di Weingarten. Annali di Mat. (3) **19** (1912), S. 251.

[2]) Razzaboni, Un teorema del sig. Demartres generalizzato. Atti del R. Ist. Veneto **60** (1900—01), parte 2ª. Über den Zusammenhang der Razzabonischen Transformation mit der Bianchischen Transformation für die Biegungsregelflächen des einschaligen Rotationshyperboloids s. Bianchi, Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde. Soc. Ital. delle Sc. Mem. (3) **14** (1905), daselbst §§ 22—24.

[3]) Die Transformation solcher „asymptotischer" Flächen für den Fall *orthogonaler* Systeme (Laméscher Scharen) von pseudosphärischen Flächen behandelt die Diss. von Fibbi, Sulle superficie che contengono un sistema di geodetiche a torsione costante. Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa **5** (1888), S. 77.

dient die Tatsache, daß wir damit zu einer neuen speziellen Lösung des noch nicht allgemein erledigten geometrischen Problems gelangt sind, *Systeme von ∞^2 windschiefen Vierecken zu ermitteln, deren Seiten paarweise die Ortsflächen ihrer Eckpunkte berühren.* Von derartigen Gebilden kannte man bislang neben den zu vieren gekoppelten W-Kongruenzen, wie sie das Bianchische Kompositionstheorem für die Moutardschen Transformationen erzeugt, nur einen mit der Verbiegung beliebiger Rotationsflächen zusammenhängenden Fall[4]) sowie vereinzelte Fälle von viergliedrigen Zyklen Laplacescher Transformationen[5]).

Da die schiefen Weingartenschen Systeme, wie ihr Entdecker gezeigt hat, die *Bäcklundsche Transformation* gestatten, so ließ sich dieser Prozeß mittels einer leichten Umformung der Differentialgleichungen auch auf isolierte Flächen **B** unmittelbar übertragen.

Im Rahmen einer umfangreichen Untersuchung[6]) über die dreifach-orthogonalen Flächensysteme, insbesondere über diejenigen, für welche die Abstände der drei Tangentialebenen vom Nullpunkt einer Relation von der Form

$$k_1 W_1^2 + k_2 W_2^2 + k_3 W_3^2 = \text{konst.}$$

genügen, ist Bianchi auf die schiefen Weingartenschen Systeme zurückgekommen. Sie dienen ihm dort, auf die asymptotischen Parameter der pseudosphärischen Flächen bezogen, zur Bildung eines von den drei Variablen abhängigen rechtwinkligen Richtungsdreikants, das infolge des Verschwindens dreier Rotationen $p^{(1)}$, $q^{(2)}$, $r^{(3)}$ die sphärische Abbildung für eine Mannigfaltigkeit paralleler oder, wie es gewöhnlich heißt, durch Combescuresche Transformation verbundener dreifach-orthogonaler Systeme bestimmt. Dabei überrascht eine eigenartige Symmetrie hinsichtlich der drei Variablen. Es treten nämlich neben den pseudosphärischen Kongruenzen, die zwischen dem schiefen Weingartenschen System und dem *assoziierten* System — dieses hat die konjugierten Bertrandschen Kurven zu Trajektorien — vermitteln, die sphärischen Bilder zweier weiterer Scharen von *pseudosphärischen Kongruenzen* auf, *in denen zwar die Strahlen reell, aber die Brennflächen konjugiert-imaginär sind*[7]). Dieses wohl interessanteste Ergebnis der Bianchi-

---

[4]) Bianchi, Sopra una proprietà cinematica che caratterizza le superficie W. Rom, Acc. Linc. Rend. (5) **32**$_1$ (1923), S. 185; doch s. bereits Jonas, Über W-Strahlensysteme, Flächendeformation usw. Diss. Halle 1908.

[5]) Ein neues Beispiel eines viergliedrigen Laplaceschen Zyklus soll demnächst in einer Arbeit mitgeteilt werden, die an die Untersuchungen in Berl. Math. Ges. Ber. **24** (1925), S. 54, anknüpfen wird.

[6]) Bianchi, Ricerche intorno ad una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali. Annali di Mat. (3) **25** (1916), S. 129.

[7]) Betreffs dieser Kongruenzen s. auch Bianchi, Sopra una classe di superficie collegate alle congruenze pseudosferiche. Palermo Rend. **40** (1915), S. 110.

schen Untersuchung ergänzen wir zunächst durch den Nachweis, daß nicht nur die sphärischen Bilder, sondern die neuen Kongruenzen selber durch eine einfache geometrische Konstruktion aus den schiefen Weingartenschen Systemen hervorgehen. Die Strahlen der drei Scharen pseudosphärischer Kongruenzen treffen sich rechtwinklig in den gemeinsamen Strahlmittelpunkten, so daß man geradezu von einem *dreifach-orthogonalen pseudosphärischen Komplex* sprechen kann. Damit gewinnen nun aber die von uns betrachteten, im Verein mit den Flächen $\mathbf{B}^*$ auftretenden Vierecksysteme ein neues Aussehen. Sie erscheinen hier als eine bemerkenswerte, höchst anschauliche Eigenschaft der pseudosphärischen Kongruenzen mit konjugiert-imaginären Brennflächen, zu der, wie noch ausdrücklich betont sei, ein reelles Analogon bei den gewöhnlichen pseudosphärischen Kongruenzen fehlt.

In den geometrischen Überlegungen, auf die Bianchi seine Theorie der auf die Flächen zweiten Grades abwickelbaren Flächen gestützt hat, nimmt ein Satz von Chieffi[8]) eine bedeutsame Stelle ein. Er besagt, daß eine nicht-geradlinige Biegungsfläche einer Regelfläche sich als Umhüllungsgebilde einer Schar von ∞^1 Biegungsregelflächen derselben Fläche auffassen läßt. Es liegt im Hinblick auf den eingangs genannten Satz von Laguerre und Bioche nahe, die Konstruktion nicht-geradliniger Biegungsflächen des einschaligen Rotationshyperboloids aus den ∞^2 verfügbaren Bertrandschen Kurven eines schiefen Weingartenschen Systems zu versuchen. Daß dies *nicht* möglich ist, werden wir aus der für die Trajektorienflächen $\mathbf{B}$ charakteristischen Eigenschaft folgern. Als positives Ergebnis des Schlußparagraphen sei erwähnt, daß dort abermals aus Bertrandschen Kurven gewonnene Systeme windschiefer Vierecke auftreten, deren Ecken die Brennflächenmäntel der von den Seiten gebildeten Strahlenkongruenzen beschreiben.

§ 1.

Aufstellung einer besonderen Klasse B von Flächen mit einer Schar Bertrandscher Kurven.

1. Die zu betrachtende Fläche (x) sei auf die Variablen u, v bezogen[9]). *Die v-Kurven sollen Bertrandsche Kurven der gleichen Familie sein.* Ihr begleitendes Dreikant sei (X, X', X''), die Reihenfolge, wie üblich: Tan-

---

[8]) Chieffi, Sulle deformate dell' iperboloide rotondo ad una falda e su alcune superficie che se ne deducono. Giorn. di Mat. **43** (1905), S. 9; dazu Bianchi, Lezioni di geometria differenziale **3** (1909), § 2.

[9]) Zur Kürzung des Ausdrucks und der Schreibweise sei folgendes vereinbart: Der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z wird als Punkt x bezeichnet, eine von ihm beschriebene Fläche als Fläche (x), wenn erforderlich, wie im dreifachen System, auch als Fläche $(x;\ \alpha, \beta)$ unter Angabe der auf der Fläche variablen Para-

(Fortsetzung der Fußnote [9]) auf nächster Seite.)

gente X, Hauptnormale X', Binormale X''. Für die Koordinaten des Flächenpunktes x gilt dann zunächst der Ansatz:

$$(1) \qquad x_u = \lambda X + \mu X' + \nu X'', \qquad x_v = \Gamma X,$$

während sich die zweiparametrigen Drehungen des Dreikants mittels der Rotationen $p, q, r, p', q' = 0, r'$, wie folgt, darstellen:

$$(2) \qquad \begin{cases} X_u = r X' - q X'', & X_v = r' X', \\ X'_u = p X'' - r X, & X'_v = p' X'' - r' X, \\ X''_u = q X - p X', & X''_v = - p' X'. \end{cases}$$

Die Bertrandsche Relation, in der wir die eine der beiden Konstanten durch geeignete Wahl der Längeneinheit unterdrücken, nehmen wir in der Form

$$(3) \qquad r' + \varkappa p' + \sqrt{1 + \varkappa^2}\, \Gamma = 0 \qquad (\varkappa = \text{konst.})$$

an. Identifiziert man die zweite Gleichungsgruppe (2) mit den Frenetschen Formeln

$$\frac{dX}{ds} = \frac{1}{R} X', \qquad \frac{dX'}{ds} = -\frac{1}{R} X - \frac{1}{T} X'', \qquad \frac{dX''}{ds} = \frac{1}{T} X',$$

wobei ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von Γ für die v-Kurven $ds^{(v)} = \Gamma dv$ gesetzt sei, so erhält man als Radien der Flexion und der Torsion:

$$(4) \qquad R = \frac{\Gamma}{r'}, \qquad T = -\frac{\Gamma}{p'}.$$

Die Relation (3) geht damit in

$$(5) \qquad \frac{1}{R} - \frac{\varkappa}{T} + \sqrt{1 + \varkappa^2} = 0$$

über; sie umfaßt für $\varkappa = 0$ den Sonderfall der Kurven von konstanter Flexion $\left|\frac{1}{R}\right| = 1$. Auf die in der Kurventheorie gebräuchliche Festsetzung der positiven Hauptnormalenrichtung haben wir verzichtet; R ist also mit

---

meter. Im Kurvennetz (u, v) sollen die Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. nach dem *variablen* Parameter v-Kurven und u-Kurven genannt werden. Eine in x geschriebene Gleichung vertritt stets eine *vektorielle* Beziehung, gilt also auch in den Buchstaben y und z. Eine Richtung X hat die Richtungskosinus X, Y, Z. Jedes vorkommende rechtwinklige Dreikant wird in der angegebenen Folge der Richtungen, oben z. B. X, X', X'', als *gleichstimmig* mit dem Dreikant der positiven Koordinatenachsen x, y, z vorausgesetzt. Die benutzten orthogonalen Substitutionen haben demnach auch, worauf im einzelnen nicht besonders hingewiesen wird, die Determinante $+1$. Buchstabenindizes deuten partielle Ableitungen an. $\sum$ ist eine dreigliedrige, über die Buchstaben x, y, z zu erstreckende Summe. Schließlich sei bemerkt, vor allem im Hinblick auf § 2, daß es sich durchweg nur um *Gebilde mit analytischem Charakter* handelt.

einem in geometrischer Hinsicht belanglosen, von der Wahl des Dreikants abhängigen Vorzeichen behaftet[10]). Demgegenüber sei daran erinnert, daß das Vorzeichen von T wesentlich ist und durch zulässige[11]) Änderungen des Achsensinnes nicht beeinflußt wird.

Der Punkt

$$\bar{x} = x - \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}} X', \tag{6}$$

in konstantem Abstande auf der Hauptnormalen gelegen, beschreibt die von den *konjugierten* Bertrandschen Kurven bedeckte Fläche $(\bar{x})$, die wir kurz die *konjugierte Fläche* nennen. Aus (1) bis (3) folgt:

$$\bar{x}_v = -p' \frac{\varkappa X + X''}{\sqrt{1+\varkappa^2}} = -p' \bar{X}. \tag{7}$$

Das begleitende Dreikant wird:

$$\bar{X} = \frac{\varkappa X + X''}{\sqrt{1+\varkappa^2}}, \quad \bar{X}' = -X', \quad \bar{X}'' = \frac{X - \varkappa X''}{\sqrt{1+\varkappa^2}}. \tag{8}$$

Für den konstanten Winkel δ, unter dem sich die Tangenten kreuzen, gilt die Formel:

$$\cos \delta = \sum X \bar{X} = \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}};$$

die Hauptnormalen fallen zusammen. Aus (6) und aus den mittels (2) berechneten Ableitungen der Ausdrücke (8) entnimmt man:

$$\bar{\Gamma} = -p', \quad \bar{p}' = \frac{r' + \varkappa p'}{\sqrt{1+\varkappa^2}} = -\Gamma, \quad \bar{q}' = 0, \quad \bar{r}' = \frac{p' - \varkappa r'}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$$

und erhält dann für die v-Kurven auf der Fläche $(\bar{x})$ die mit (3) bzw. (5) gleichlautende Bertrandsche Relation. Das, wie bekannt ist, konstante *Produkt der Torsionsradien* wird $T\bar{T} = 1$.

2. Durch eine weitere geforderte Eigenschaft definieren wir die *Klasse der Flächen* **B**, um deren Bestimmung es sich zunächst handelt: *Bringt man für jede der beiden zueinander konjugierten Flächen die Schmiegungsebenen ihrer Bertrandschen Kurven mit den Tangentialebenen der anderen Fläche zum Schnitt*[12]), *so sollen diese Geradenpaare korrespondierende Flächentangenten oder, wie wir gleich sagen wollen, Tangenten korrespon-*

---

[10]) Der Krümmungsmittelpunkt ist $x + R X'$.

[11]) Siehe dazu das unter [9]) Bemerkte.

[12]) Dabei wird nur die Tatsache benutzt, daß jeder der beiden Punkte $x, \bar{x}$ in der Schmiegungsebene der vom anderen beschriebenen v-Linie liegt (asymptotische Kurventransformation). Das obige Prinzip kann daher zur Erzeugung allgemeinerer Flächenpaare dienen, für die sich, wie bemerkt sei, wiederum eine Transformationstheorie entwickeln läßt.

dierender Flächenkurven vorstellen. Dazu seien die noch verfügbaren u-Linien gewählt. Aus

$$\sum x_u \bar{X}'' = 0, \quad \sum \bar{x}_u X'' = 0$$

folgt dann:

$$\lambda = \varkappa \nu, \quad \nu = \frac{p}{\sqrt{1+\varkappa^2}},$$

so daß der Ansatz (1) sich spezialisiert:

$$x_u = \frac{p}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(\varkappa X + X'') + \mu X', \quad x_v = \Gamma X. \tag{9}$$

Die Bedingung, die wir dem Flächenpaar $(x), (\bar{x})$ auferlegt haben, kann auch folgendermaßen gefaßt werden: *Für jede der beiden Flächen sollen die Tangenten ihrer u-Linien die Tangenten der durch die entsprechenden Punkte der anderen Fläche gehenden (Bertrandschen) v-Kurven treffen.* Diese Tangentenschnittpunkte, die wir durch die Bezeichnung den Bertrandschen Kurven zuordnen, ergeben sich mit Benutzung von (6):

$$x' = x + \frac{\varkappa p + r}{(1+\varkappa^2)\mu} X, \quad \bar{x}' = \bar{x} - \frac{p}{(1+\varkappa^2)\mu}(\varkappa X + X''). \tag{10}$$

Neben den beiden von ihnen beschriebenen Hilfsflächen $(x'), (\bar{x}')$ führen wir noch zwei weitere $(x''), (\bar{x}'')$ ein: die zweiten Brennflächen der beiden Strahlenkongruenzen, die von den Tangenten der Bertrandschen Kurven gebildet werden, gleichzeitig auch (zufolge einer allgemeinen Eigenschaft der Kongruenzen) die Enveloppen ihrer Schmiegungsebenen. Wir finden:

$$x'' = x + \frac{p}{q\sqrt{1+\varkappa^2}} X, \quad \bar{x}'' = \bar{x} - \frac{\varkappa p + r}{q(1+\varkappa^2)^{3/2}}(\varkappa X + X''). \tag{11}$$

3. Um nun zu den Differentialgleichungen zu gelangen, von denen die Ermittlung der Flächen **B** abhängt, stellen wir mit Benutzung von (2) die Integrabilitätsbedingungen für (9) auf und erhalten:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}} p_v - \mu r' = \Gamma_u, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}} p_v + \mu p = -\Gamma q, \\ &\mu_v - \frac{p}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(p' - \varkappa r') = \Gamma r. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Hinzuzufügen sind neben der endlichen Relation (3') die in wohlbekannter Form sich darbietenden Differentialrelationen zwischen den Rotationen, die Integrabilitätsbedingungen des Systems (2):

$$p_v - p'_u = q r', \quad q_v = r p' - p r', \quad r_v - r'_u = -q p'. \tag{13}$$

Eliminiert man μ aus den beiden ersten Gleichungen (12) und wendet dann (3) sowie die erste Formel (13) an, so folgt $(\Gamma p')_u = 0$, also

$$\Gamma p' = f(v). \tag{14}$$

Es sei jetzt

$$(15)\qquad \Gamma=\frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}},\qquad p'=\frac{\omega_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$$

gesetzt. Mittels der beiden neuen unbekannten Funktionen $\theta(u,v)$, $\omega(u,v)$ lassen sich, wie gezeigt werden soll, die sämtlichen zur intrinseken Bestimmung der Fläche erforderlichen Größen ausdrücken. Wir tragen die Werte (15) in (14) ein und können dann, wie man unmittelbar übersieht, über die Variable v noch so verfügen, daß die Relation die einfache Gestalt

$$(16)\qquad \theta_v\,\omega_v\equiv\varepsilon\qquad(\varepsilon=\pm 1)$$

annimmt[13]). Aus (3) und (15) folgt:

$$(17)\qquad r'=-\theta_v-\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\,\omega_v\,;$$

nach (4) wird:

$$\frac{1}{R}=-\varkappa\frac{\omega_v}{\theta_v}-\sqrt{1+\varkappa^2},\qquad \frac{1}{T}=-\frac{\omega_v}{\theta_v}.$$

Durch $-\varepsilon$ ist für die Bertrandschen Kurven der Fläche das *Vorzeichen der Torsion* gegeben; dasselbe gilt wegen $T\overline{T}=1$ auch für die konjugierte Fläche.

An Stelle von p, q, μ führen wir unter Beibehaltung von r noch drei Hilfsgrößen l, m, n ein, indem wir

$$(18)\qquad p=\sqrt{1+\varkappa^2}\,n+\varkappa r,\qquad q=\sqrt{1+\varkappa^2}\,m+\varkappa l,\qquad \mu=\sqrt{1+\varkappa^2}\,l+\varkappa m$$

setzen. Die sechs Gleichungen (12), (13) gehen dann, wenn zur Abkürzung

$$l_v-r\theta_v-n\,\omega_v=\Lambda,\qquad m_v-n\theta_v-r\,\omega_v=\mathsf{M},$$
$$n_v+m\theta_v+l\,\omega_v=\mathsf{N},\qquad r_v+l\theta_v+m\,\omega_v=\mathsf{P},$$
$$\frac{\theta_{uv}}{\theta_v}=-\frac{\omega_{uv}}{\omega_u}=l+\mathsf{H}\ ^{14})$$

geschrieben wird, der Reihe nach in die folgende über:

$$\varkappa\sqrt{1+\varkappa^2}\,\mathsf{N}+\varkappa^2\mathsf{P}-\theta_v\mathsf{H}=0,\qquad \sqrt{1+\varkappa^2}\,\mathsf{N}+\varkappa\mathsf{P}=0,$$
$$\sqrt{1+\varkappa^2}\,\Lambda+\varkappa\mathsf{M}=0,\qquad (1+\varkappa^2)\mathsf{N}+\varkappa\sqrt{1+\varkappa^2}\,\mathsf{P}+\omega_v\mathsf{H}=0,$$
$$\sqrt{1+\varkappa^2}\,\mathsf{M}+\varkappa\Lambda=0,\qquad \sqrt{1+\varkappa^2}\,\mathsf{P}+(\sqrt{1+\varkappa^2}\,\theta_v-\varkappa\,\omega_v)\mathsf{H}=0.$$

---

[13]) Für $\varepsilon=0$ tritt, $\omega_v=0$ und $\theta_v\neq0$ vorausgesetzt, auf der Fläche (x) an die Stelle der Bertrandschen Kurven ein System von Kreisen mit konstantem Radius, während $(\overline{x})$ die Kurve ihrer Mittelpunkte wird. Dieser Ausartungsfall bleibt weiterhin unberücksichtigt.

[14]) Mit Benutzung von (16).

Man erkennt unschwer, daß $\Lambda = \mathsf{M} = \mathsf{N} = \mathsf{P} = \mathsf{H} = 0$ sein muß. Wir haben damit:

$$(19)\qquad \begin{cases} l_v = r\theta_v + n\omega_v, & m_v = n\theta_v + r\omega_v, \\ n_v = -m\theta_v - l\omega_v, & r_v = -l\theta_v - m\omega_v, \end{cases}$$

$$(20)\qquad \theta_{uv} = l\theta_v, \quad \omega_{uv} = -l\omega_v.$$

Aus den Relationen (19) folgt:

$$(l^2 + m^2 + n^2 + r^2)_v = 0, \quad (lm + nr)_v = 0,$$

also:

$$(l-m)^2 + (n-r)^2 = 4U_1^2, \quad (l+m)^2 + (n+r)^2 = 4U_2^2,$$

wobei U_1, U_2 Funktionen von u allein sind. Wir setzen demnach:

$$l - m = 2U_1\cos\varphi, \quad n - r = 2U_1\sin\varphi,$$

$$l + m = 2U_2\cos\psi, \quad n + r = -2U_2\sin\psi$$

und tragen die hieraus entnommenen Werte von l, m, n, r wieder in die Relationen (19) ein. Diese liefern jetzt

$$\varphi_v = \theta_v - \omega_v, \quad \psi_v = \theta_v + \omega_v$$

und, da additive Funktionen von u in θ und ω einbezogen werden dürfen:

$$\varphi = \theta - \omega, \quad \psi = \theta + \omega.$$

Die Ausdrücke

$$l = U_1\cos(\theta-\omega) + U_2\cos(\theta+\omega), \quad m = -U_1\cos(\theta-\omega) + U_2\cos(\theta+\omega),$$

$$n = U_1\sin(\theta-\omega) - U_2\sin(\theta+\omega), \quad r = -U_1\sin(\theta-\omega) - U_2\sin(\theta+\omega)$$

hat man schließlich in (18) und (20) einzuführen.

Wir sind damit zu dem folgenden Ergebnis gelangt: *Die Bestimmung einer Fläche* **B** *erfordert, und zwar ganz unabhängig von der Konstanten* $\varkappa$, *die Kenntnis eines Funktionenpaares* θ, ω, *das die Differentialgleichungen*

$$(21)\qquad \theta_{uv} = [U_1\cos(\theta-\omega) + U_2\cos(\theta+\omega)]\,\theta_v, \quad \theta_v\omega_v = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

erfüllt; dabei bedeuten U_1, U_2 *zwei willkürliche Funktionen von* u, *von denen die eine, falls von Null verschieden, gleich* 1 *gesetzt werden darf.* An die Stelle der zweiten Gleichung (21) kann die zu der ersten analoge:

$$(22)\qquad \omega_{uv} = -[U_1\cos(\theta-\omega) + U_2\cos(\theta+\omega)]\,\omega_v$$

treten.

Für p, q, r, μ gelten, wenn abkürzend

$$\sqrt{1+\varkappa^2} - \varkappa = c$$

geschrieben wird, die Formeln:

$$(23)\quad \begin{cases} p=c\,U_1\sin(\theta-\omega)-\frac{1}{c}U_2\sin(\theta+\omega), & q=-c\,U_1\cos(\theta-\omega)+\frac{1}{c}U_2\cos(\theta+\omega),\\ r=-U_1\sin(\theta-\omega)-U_2\sin(\theta+\omega), & \mu=c\,U_1\cos(\theta-\omega)+\frac{1}{c}U_2\cos(\theta+\omega); \end{cases}$$

aus (9) wird:

$$(24)\quad \begin{cases} x_u=\left[c\,U_1\sin(\theta-\omega)-\frac{1}{c}U_2\sin(\theta+\omega)\right]\frac{\varkappa X+X''}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\\ \qquad +\left[c\,U_1\cos(\theta-\omega)+\frac{1}{c}U_2\cos(\theta+\omega)\right]X',\\ x_v=\frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}X. \end{cases}$$

Man könnte gleicherweise auch die zweiten Ableitungen von x mit Benutzung von (2), (15), (17), (23) durch X, X', X'' ausdrücken. Die Fläche (x) erscheint demnach als *intrinsek bestimmt* durch ihre Fundamentalgrößen 1. und 2. Ordnung, die, wie man ohne Rechnung erkennt, $\varkappa$ nur *explicite* enthalten. *Zu einem Lösungspaar* θ, ω *von* (21) *gehören also* ∞^1 *noch von* $\varkappa$ *abhängige Flächen der Klasse* **B**.

Zwecks Ermittlung der laufenden Koordinaten hat man das System (2), das die Konstante $\varkappa$ enthält, zu integrieren, eine Aufgabe, die in bekannter Weise auf die Form einer totalen Riccatischen Differentialgleichung gebracht werden kann, und schließlich die drei durch (24) bedingten Quadraturen auszuführen.

4. Ein wichtiger *Spezialfall* entspringt der Forderung, daß die in Art. 2 definierten Hilfsflächen $(x'), (x'')$ einerseits, $(\bar{x}'), (\bar{x}'')$ andrerseits zusammenfallen sollen. Aus (10) und (11) folgen dann die Relationen

$$(\varkappa p+r)q-\sqrt{1+\varkappa^2}\,p\mu=0,\qquad (\varkappa p+r)\mu-\sqrt{1+\varkappa^2}\,pq=0,$$

die sich mit Hilfe von (23) beide auf $U_1U_2=0$ reduzieren. Die durch $U_2=0$ oder $U_1=0$ gekennzeichneten Flächen der Klasse **B** mögen *Flächen* **B*** heißen. Da schon im allgemeinen Falle die in der Schmiegungsebene der Bertrandschen Kurve gelegene Verbindungslinie $x''\bar{x}$ Tangente der Fläche (x''), ebenso die Linie $\bar{x}''x$ Tangente an $(\bar{x}'')$ ist, so ergibt sich der folgende in geometrischer Hinsicht bemerkenswerte Sachverhalt: *Die beiden Paare sich schneidender Tangenten der zueinander konjugierten Flächen* **B*** *berühren gleichzeitig die beiden von den Tangentenschnittpunkten beschriebenen Hilfsflächen*[15]). Wir haben damit ein neuartiges *System von* ∞^2 *windschiefen Vierecken, deren Seiten Tangenten an die Ortsflächen der vier Eckpunkte sind.*

[15]) Die u-Kurve der einen Fläche des konjugierten Paares hat jetzt also mit der v-Kurve der anderen die Schmiegungsebene gemein.

Im Falle der Flächen $\mathbf{B}^*$ kann die erste Gleichung (21) nach v integriert werden. Die beiden Differentialgleichungen lauten also:

$$(25)\quad \begin{cases} \text{für } U_2 = 0\ (U_1 = 1)\colon & \theta_u + \omega_u = \sin(\theta - \omega)^{16)}, \quad \theta_v \omega_v = \varepsilon, \\ \text{für } U_1 = 0\ (U_2 = 1)\colon & \theta_u - \omega_u = \sin(\theta + \omega), \quad \theta_v \omega_v = \varepsilon. \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß *die u-Linien der Flächen* $\mathbf{B}^*$ *Kurven von konstanter Torsion sind und daß diese Torsion für* $U_2 = 0$ *den Wert* $+1$, *für* $U_1 = 0$ *den Wert* -1 *hat.*

Wir betrachten noch die Kongruenz, deren Strahlen die Hauptnormalen der Bertrandschen Kurven sind, und bestimmen ihre Brennflächen an Hand des Ansatzes

$$\tilde{x} = x + t X'.$$

Da sich

$$\text{für } U_2 = 0\colon \quad t = \frac{-\theta_v \pm \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varkappa^2(\theta_v - \omega_v)}},$$

$$\text{für } U_1 = 0\colon \quad t = \frac{-\theta_v \pm \sqrt{-\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varkappa^2(\theta_v + \omega_v)}}$$

ergibt, gilt der folgende Satz, nach dem wir *zwei Arten von Flächen* $\mathbf{B}^*$ zu unterscheiden haben: *Die von den Hauptnormalen der Bertrandschen Kurven gebildete Kongruenz hat reelle oder imaginäre Brennflächen, je nachdem das Vorzeichen der Torsion für die Bertrandschen Kurven und für die Kurven von konstanter Torsion das entgegengesetzte oder das gleiche ist.*

§ 2.

Die Flächen B als Trajektorienflächen im schiefen Weingartenschen System pseudosphärischer Flächen.

1. Unsere Flächen $\mathbf{B}$ treten nun in engste Beziehung zu den von Bianchi entdeckten *schiefen Weingartenschen Systemen*, mit deren allgemeinsten *Trajektorienflächen* sie, wie bewiesen werden soll, identisch sind. Wir gehen dazu von der Darstellung dieser Systeme pseudosphärischer Flächen vom gleichen Krümmungsmaß ($K = -1$) aus, in deren unter konstantem Winkel schneidenden Trajektorien Bianchi Bertrandsche Kurven der gleichen Familie erkannte. Für die ∞^1 Flächen der Schar werden die Asymptotenlinien durch die Trajektorien aufeinander abgebildet. Die ihnen entsprechenden Variablen — sie mögen α und β heißen — benutzen wir als Bezugsparameter[17]; v sei der dritte, längs der Trajektorien variable Parameter.

[16]) Unter der Annahme $U_2 = 0$ erscheint in der Rechnung von Art. 3 die Größe $\theta + \omega$ noch gar nicht; diese kann also *jetzt* unbeschadet der Allgemeinheit eine additive Funktion von u aufnehmen. Entsprechendes gilt im Falle $U_1 = 0$ von $\theta - \omega$.

[17]) Ebenso wie Bianchi in § 29 der unter [8]) genannten Abhandlung.

Wir weisen auf einen wesentlichen Punkt hin, in dem unsere Formeln von denjenigen Bianchis abweichen. Ein schiefes Weingartensches System geht bekanntlich aus einem *Weingartenschen System mit konstanter Flexion*, d. h. aus einer Laméschen Schar pseudosphärischer Flächen, deren orthogonale Trajektorien Kurven von konstanter Flexion sind[18]), durch simultane Liesche Transformationen hervor. Die von Bianchi bevorzugte Form der Lieschen Transformation ist die folgende. Ein Integral θ von

$$2\theta_{\alpha\beta} = \sin 2\theta$$

liefert eine pseudosphärische Fläche mit dem Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\theta\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2;$$

die aus θ durch die Substitution $\alpha \left| \frac{\alpha}{c},\ \beta \right| c\beta$ gewonnene weitere Lösung

$$\Theta = \theta\left(\frac{\alpha}{c},\ c\beta\right)$$

definiert eine Liesche Transformierte, deren Linienelement durch

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\Theta\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2$$

gegeben ist. Statt dessen kann man aber auch $\theta(\alpha, \beta)$ beibehalten und für die Liesche Transformierte

$$ds^2 = c^2 d\alpha^2 + 2\cos 2\theta\, d\alpha\, d\beta + \frac{d\beta^2}{c^2} \tag{1}$$

setzen. Nur die Zuordnung zwischen den Punkten der beiden Flächen erscheint damit geändert. Diese zweite Auffassung der Lieschen Transformation bietet den Vorteil, daß die an die Spitze zu stellenden Differentialgleichungen für das Funktionenpaar θ, ω die charakteristische Konstante $\varkappa$ des schiefen Weingartenschen Systems *nicht* enthalten.

2. Es sei also θ, ω ein Lösungspaar der drei simultanen Differentialgleichungen:

$$\theta_\alpha + \omega_\alpha = \sin(\theta - \omega), \quad \theta_\beta - \omega_\beta = \sin(\theta + \omega), \quad \theta_v \omega_v = \varepsilon, \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{2}$$

die folgende Relationen nach sich ziehen:

$$(3)\quad \begin{cases} \text{(a)} & 2\theta_{\alpha\beta} = \sin 2\theta, & 2\omega_{\alpha\beta} = \sin 2\omega, \\ \text{(b)} & \theta_{\alpha v} = \cos(\theta - \omega)\theta_v, & \omega_{\alpha v} = -\cos(\theta - \omega)\omega_v, \\ \text{(c)} & \theta_{\beta v} = \cos(\theta + \omega)\theta_v, & \omega_{\beta v} = -\cos(\theta + \omega)\omega_v. \end{cases}$$

Wir definieren das rechtwinklige Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ durch ein infolge von (2) bzw. (3) unbeschränkt integrables System, wobei zur Ab-

[18]) Bianchi, Lezioni di geom. diff. 2_2 (3ª ed.), §§ 546—548; s. auch die Abh. in Ann. di Mat. (2) **13** (1885), S. 177, und (3) **24** (1915), S. 235.

kürzung wieder $\sqrt{1+\varkappa^2}-\varkappa=c$ gesetzt sei:

$$(4)\quad\begin{cases}\quad\text{(a)} & \quad\text{(b)}\\ X_\alpha^{(1)}=\theta_\alpha^{\xi} X^{(2)}+c\sin\theta\, X^{(3)}, & X_\beta^{(1)}=-\theta_\beta X^{(2)}+\frac{1}{c}\sin\theta\, X^{(3)},\\ X_\alpha^{(2)}=-c\cos\theta\, X^{(3)}-\theta_\alpha X^{(1)}, & X_\beta^{(2)}=\frac{1}{c}\cos\theta\, X^{(3)}+\theta_\beta X^{(1)},\\ X_\alpha^{(3)}=-c\sin\theta\, X^{(1)}+c\cos\theta\, X^{(2)}, & X_\beta^{(3)}=-\frac{1}{c}\sin\theta\, X^{(1)}-\frac{1}{c}\cos\theta\, X^{(2)},\\ \quad\text{(c)} & \\ X_v^{(1)}=\frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(\varkappa X^{(2)}+\cos\omega\, X^{(3)}), & \\ X_v^{(2)}=\frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(\sin\omega\, X^{(3)}-\varkappa X^{(1)}), & \\ X_v^{(3)}=\frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(-\cos\omega\, X^{(1)}-\sin\omega\, X^{(2)}). & \end{cases}$$

Alsdann gewinnt man für das schiefe Weingartensche System die laufenden Koordinaten mittels Quadratur aus den Formeln:

$$(5)\quad\begin{cases} x_\alpha=c(\cos\theta\, X^{(1)}+\sin\theta\, X^{(2)}), \quad x_\beta=\frac{1}{c}(\cos\theta\, X^{(1)}-\sin\theta\, X^{(2)}),\\ x_v=\frac{\varkappa\theta_v}{1+\varkappa^2}(-\sin\omega\, X^{(1)}+\cos\omega\, X^{(2)})+\frac{\theta_v}{1+\varkappa^2}X^{(3)}, \end{cases}$$

für die infolge von (2) bis (4) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

Der Punkt x beschreibt für $v=$ konst. die auf die Asymptotenlinien bezogene Fläche $(x;\alpha,\beta)$ vom Krümmungsmaß $K=-1$. Das Quadrat ihres Linienelements hat die Form (1); $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ sind die Hauptkrümmungsrichtungen, $X^{(3)}$ ist die Richtung der Flächennormalen. Die gleichfalls pseudosphärische Fläche $(\bar{x};\alpha,\beta)$, gegeben durch

$$(6)\qquad \bar{x}=x-\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(\cos\omega\, X^{(1)}+\sin\omega\, X^{(2)}),$$

ist mit $(x;\alpha,\beta)$ durch eine *ausgezeichnete Bäcklundsche Transformation* verbunden, die den ersten beiden Differentialrelationen (2) entspricht. Variiert auch v, so beschreibt $\bar{x}$ das *assoziierte* schiefe Weingartensche System.

3. Um uns zunächst davon zu überzeugen, daß die Trajektorien Bertrandsche Kurven sind, führen wir ihr begleitendes Dreikant (X, X', X'') durch die folgende orthogonale Substitution ein:

$$(7)\quad\begin{cases} X=\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(-\sin\omega\, X^{(1)}+\cos\omega\, X^{(2)})+\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}X^{(3)},\\ X'=\cos\omega\, X^{(1)}+\sin\omega\, X^{(2)},\\ X''=\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(-\sin\omega\, X^{(1)}+\cos\omega\, X^{(2)})-\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}X^{(3)}. \end{cases}$$

Aus (4c) ergibt sich dann:

$$X_v = -\left(\theta_v + \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\omega_v\right)X', \quad X'_v = \frac{\omega_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}X'' + \left(\theta_v + \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\omega_v\right)X,$$

$$X''_v = -\frac{\omega_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}X'$$

und aus (5):

$$x_v = \frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}X,$$

so daß Übereinstimmung mit den *auf die Variable v bezüglichen* Formeln (2), (9), (15), (17) von § 1 erreicht ist. Die Trajektorien, also Bertrandsche Kurven der gleichen, durch § 1 (5) gekennzeichneten Familie, schneiden die pseudosphärischen Flächen, da

$$\Sigma X X^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$$

ist, unter konstantem Winkel. Aus der im Einklang mit § 1 (6) bestehenden Beziehung

$$\bar{x} = x - \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}X'$$

folgt weiter, daß *die konjugierten Bertrandschen Kurven die Trajektorien des assoziierten Systems darstellen.* Ist $\varkappa = 0$, so liegt ein (orthogonales) *Weingartensches System mit konstanter Flexion* vor.

Für unseren Zweck bedeutungsvoll ist nun die durch die Formel

$$X^{(3)} = \frac{X - \varkappa X''}{\sqrt{1+\varkappa^2}} = \bar{X}''$$

ausgedrückte, bereits von Bianchi konstatierte Tatsache, daß *die Normalen der pseudosphärischen Flächen parallel zu den in den entsprechenden Punkten konstruierten Binormalen der konjugierten Bertrandschen Kurven sind.* Durch eine einfache Überlegung folgert man nämlich, daß jede aus einer einfach-unendlichen Schar von Trajektorien bestehende Fläche der in § 1, 2 aufgestellten Bedingung genügt. Das besagt aber: *Die Trajektorienflächen des schiefen Weingartenschen Systems gehören sämtlich der Flächenklasse* **B** *an.*

Wir definieren eine solche *Trajektorienfläche* durch eine willkürliche Relation zwischen α und β, die wir auf der pseudosphärischen Fläche $v = v_0$ als *Leitlinie* deuten. Unter Einführung eines Parameters u sei $\alpha = \alpha(u)$, $\beta = \beta(u)$ und

(8) $$\frac{d\alpha(u)}{du} = U_1(u), \quad \frac{d\beta(u)}{du} = U_2(u)$$

gesetzt. Wird $\theta = \theta[\alpha(u), \beta(u), v]$ und ebenso ω jetzt als Funktion von u, v aufgefaßt, so liefert (3b) tatsächlich die Differentialgleichung § 1 (21):

$$\theta_{uv} = [U_1 \cos(\theta - \omega) + U_2 \cos(\theta + \omega)]\,\theta_v.$$

Aus (4a, b) gewinnen wir, indem wir mit Berücksichtigung der beiden ersten Relationen (2)

$$(9) \qquad \theta_\alpha \frac{d\alpha}{du} - \theta_\beta \frac{d\beta}{du} = -\omega_u + U_1 \sin(\theta - \omega) - U_2 \sin(\theta + \omega) = \Omega$$

schreiben, das folgende neben (4c) tretende System:

$$(10) \qquad \begin{cases} X_u^{(1)} = \Omega X^{(2)} + \left(c U_1 + \frac{1}{c} U_2\right) \sin\theta\, X^{(3)}, \\ X_u^{(2)} = -\left(c U_1 - \frac{1}{c} U_2\right) \cos\theta\, X^{(3)} - \Omega X^{(1)}, \\ X_u^{(3)} = -\left(c U_1 + \frac{1}{c} U_2\right) \sin\theta\, X^{(1)} + \left(c U_1 - \frac{1}{c} U_2\right) \cos\theta\, X^{(2)}, \end{cases}$$

ferner aus (5) die Formel:

$$(11) \qquad x_u = \left(c U_1 + \frac{1}{c} U_2\right) \cos\theta\, X^{(1)} + \left(c U_1 - \frac{1}{c} U_2\right) \sin\theta\, X^{(2)}.$$

Bei Anwendung der Substitution (7) erweisen sich (10) und (11) als gleichwertig[19]) mit den auf die Variable u bezüglichen Relationen § 1 (2), (23), (24). Die hiermit auch in formaler Hinsicht hergestellte Übereinstimmung ist für den nun folgenden Gedankengang wesentlich.

Wir schalten die Bemerkung ein, daß, wie man aus (2) entnimmt, *die längs der Asymptotenlinien β bzw. $\alpha =$ konst. schneidenden Trajektorienflächen Flächen* $\mathbf{B}^*$ *sind. Sie sind von gleicher oder von verschiedener Art im Sinne von* § 1, 4, *je nachdem ihre Leitlinien der gleichen Schar oder verschiedenen Scharen von Asymptotenlinien angehören.*

4. Um jetzt zu beweisen, daß auch umgekehrt *jede Fläche* $\mathbf{B}$ *als Trajektorienfläche eines schiefen Weingartenschen Systems aufgefaßt werden kann*, stützen wir uns auf zwei bekannte Existenztheoreme. Das erste[20]) besagt: Ein *Elementstreifen*, bestehend aus einer willkürlichen Kurve und den längs derselben (rechtwinklig zur Tangente) gegebenen Flächennormalen $X^{(3)}$, bestimmt im allgemeinen eine Fläche vom Krümmungsmaß $K = -1$. Eine Ausnahme bildet der Fall des *asymptotischen Streifens*, wo die Richtungen $X^{(3)}$ mit den Binormalen der Kurve zusammenfallen; alsdann muß die Kurve konstante Torsion ± 1 besitzen, gehört aber unter dieser Bedingung unendlich vielen Flächen $K = -1$ als Asymptotenlinie an. Der zweite Satz ist das von Bianchi aufgestellte Existenztheorem[21]) für die schiefen Weingartenschen Systeme: Eine gegebene Fläche $K = -1$ und eine Bertrandsche

[19]) Die Frage, ob nicht das Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ bereits bei dem Ansatz für die Flächen $\mathbf{B}$ mit Vorteil benutzt worden wäre, ist insofern zu verneinen, als die Richtungen $X^{(1)}, X^{(2)}$ im Falle einer isolierten Fläche $\mathbf{B}$ keine einfache geometrische Deutung zulassen; in der Tat erschienen die Größen θ und ω selber erst auf Grund einer Integration.

[20]) Bianchi, Lezioni di geometria differenziale 1_2 (3ª ed. 1927), § 240.

[21]) Siehe den Schluß von § 9 der unter [1]) zitierten Arbeit.

Kurve mit der Relation § 1 (5) (wir können auch sagen: mit dem *Torsionsprodukt* 1), welche die pseudosphärische Fläche so schneidet, daß die Flächennormale im Schnittpunkt zu der entsprechenden Binormalen der konjugierten Bertrandschen Kurve parallel ist, bestimmen eindeutig ein schiefes Weingartensches System.

Wir schließen (zunächst unter der allgemeinen Annahme, daß die Richtungen $X^{(3)}$ von den Binormalen der u-Kurve verschieden sind): *Es existiert eine Fläche* **B**, *die eine mitsamt den Richtungen $X^{(3)}$ gegebene u-Kurve sowie eine Bertrandsche v-Kurve mit der Relation* § 1 (5) *enthält, wobei im Schnittpunkt der Kurven $X^{(3)}$ parallel zur Binormale der konjugierten Bertrandschen Kurve vorausgesetzt ist.* Denn: auf die angegebene Weise ist zunächst die Fläche $K = -1$, dann aber auch das schiefe Weingartensche System bestimmt; die u-Kurve dient als Leitlinie und liefert die der Klasse **B** angehörige Trajektorienfläche.

Ist andererseits eine Fläche **B** *gegeben*, so benutze ich eine auf ihr gelegene u-Kurve $v = v_0$ samt den zugehörigen Richtungen $X^{(3)}$ und eine Bertrandsche v-Kurve $u = u_0$ zur Konstruktion des schiefen Weingartenschen Systems, das als Trajektorienfläche eine den gleichen *Anfangsbedingungen* genügende Fläche **B** enthält. Der am Eingang des Artikels ausgesprochene Satz ist bewiesen, sobald *für die Bestimmungsgleichungen der Flächen* **B** *die Eindeutigkeit des den Anfangsbedingungen entsprechenden Lösungssystems feststeht.* Nach (10), (11) ist aber

$$\sum (X_u^{(3)})^2 = c^2 U_1^2 + \frac{1}{c^2} U_2^2 - 2 U_1 U_2 \cos 2\theta, \qquad \sum (x_u)^2 = c^2 U_1^2 + \frac{1}{c^2} U_2^2 + 2 U_1 U_2 \cos 2\theta,$$

$$\sum x_u X_u^{(3)} = -2 U_1 U_2 \sin 2\theta, \qquad (x_u, X_u^{(3)}, X^{(3)}) = c^2 U_1^2 - \frac{1}{c^2} U_2^2,\ ^{22})$$

so daß die samt den Richtungen $X^{(3)}$ gegebene, vom Punkte x beschriebene u-Kurve $v = v_0$ die Funktionen $U_1(u)$, $U_2(u)$, sowie die Werte von $\theta(u, v)$ für $v = v_0$ ergibt[23]). Aus x_u, $X_u^{(3)}$ erhält man für $v = v_0$ die

[22]) Der mit den übrigen drei Gleichungen im Einklang stehende Wert der Determinante ist der Vorzeichen wegen hinzuzunehmen.

[23]) c^2 ist durch die Bertrandsche Kurve eindeutig festgelegt, da die Vorzeichen von $\varkappa$ und $\sqrt{1+\varkappa^2}$ nur gleichzeitig geändert werden können; gegebenenfalls müssen $X, X', X^{(1)}, X^{(2)}$ gemeinsam das Vorzeichen wechseln. Zweifel hinsichtlich der Eindeutigkeit, die sich an die Vorzeichen von U_1 und U_2 knüpfen, werden durch die Bemerkung behoben, daß die sämtlichen Formeln für die Flächen **B** den folgenden drei Substitutionen gegenüber invariant sind: 1. $U_1 | -U_1$, $U_2 | -U_2$, $X^{(1)} | -X^{(1)}$, $X^{(2)} | -X^{(2)}$; 2. $U_1 | -U_1$, $\theta | \theta + \frac{\pi}{2}$, $\omega | \omega - \frac{\pi}{2}$, $X^{(1)} | X^{(2)}$, $X^{(2)} | -X^{(1)}$; 3. $U_2 | -U_2$, $\theta | \theta + \frac{\pi}{2}$, $\omega | \omega + \frac{\pi}{2}$, $X^{(1)} | -X^{(2)}$, $X^{(2)} | X^{(1)}$. Es gelingt also in jedem Falle für die beiden Flächen, um deren Identität es sich handelt, die Größen $\varkappa$, $\sqrt{1+\varkappa^2}$, c, U_1, U_2 auch bezüglich der Vorzeichen in Übereinstimmung zu bringen.

Richtungen $X^{(1)}, X^{(2)}$ und damit die Größe $\Omega = \sum X_u^{(1)} X^{(2)}$; durch (9) läßt sich für $v = v_0$ auch ω_u und damit die Reihe der Ableitungen von ω nach u allein mit Hilfe von ω selber ausdrücken. Der Anfangswert von ω im Punkte $u = u_0$, $v = v_0$ ist durch $\cos\omega = \sum X' X^{(1)}$, $\sin\omega = \sum X' X^{(2)}$ bestimmt. Wir erkennen so, daß für $u = u_0$, $v = v_0$ die Werte der Funktionen θ und ω und ihre Ableitungen nach u allein und nach v allein, letztere durch die Bertrandsche Kurve, festgelegt sind. Die gemischten Ableitungen von θ und ω nach beiden Variablen u, v bestimmen sich für $u = u_0$, $v = v_0$ aus den Differentialgleichungen § 1 (21), (22) und den durch Differentiation daraus hervorgehenden Beziehungen. Die aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten in den Taylorschen Entwicklungen nach den Argumenten $u - u_0$, $v - v_0$ gefolgerte Eindeutigkeit der Funktionen θ und ω überträgt sich nun unmittelbar auf die flächentheoretischen Fundamentalgrößen der Fläche **B**. Unter Beschränkung auf eine gewisse endliche Umgebung des Punktes $u = u_0$, $v = v_0$ dürfen wir also schließen, daß die gegebene Fäche **B** und die konstruierte Trajektorienfläche *kongruent* sind. Daß sie für den betreffenden Wertebereich *identisch* sind, folgt aus der Tatsache, daß im Punkte $u = u_0$, $v = v_0$ auch die Tangenten ihrer u- bzw. v-Kurven zusammenfallen.

Es genügt, das Ergebnis auch für den ausgezeichneten Fall anzumerken: *Eine Fläche* $\mathbf{B}^*$ *ist durch eine Kurve von konstanter Torsion* ± 1 *und eine sie schneidende Bertrandsche Kurve mit der Relation* § 1 (5) *bestimmt, wofern die im Schnittpunkt konstruierte Schmiegungsebene der erstgenannten Kurve gleichzeitig Schmiegungsebene im entsprechenden Punkte der konjugierten Bertrandschen Kurve ist. Die Fläche* $\mathbf{B}^*$ *kann unendlich vielen schiefen Weingartenschen Systemen als asymptotische Trajektorienfläche eingeordnet werden.*

§ 3.

Anwendung der Bäcklundschen Transformation auf die Flächen B.

1. Wir behandeln jetzt kurz die *Transformation der Flächen* **B** unter Ausschluß des Vertauschbarkeitssatzes. Von Bianchi wurde die Bäcklundsche Transformation B_σ der pseudosphärischen Flächen auf die schiefen Weingartenschen Systeme[24]) ausgedehnt. Die darauf bezüglichen Formeln stellen wir in einer unserem Zweck angepaßten Gestalt auf.

Es liege ein durch $\theta, \omega, \varkappa$ bestimmtes, vom Punkte x beschriebenes schiefes Weingartensches System vor. Die Transformation verlangt die Ermittlung von θ_1 durch Integration des folgenden, mit einer totalen Riccatischen Gleichung gleichwertigen Systems:

[24]) Siehe die unter [1]) genannte Arbeit.

$$(1)\quad \begin{cases} (\theta_1)_\alpha = -\theta_\alpha + \dfrac{1-\sin\sigma_0}{\cos\sigma_0}\sin(\theta_1-\theta), \\ (\theta_1)_\beta = \quad\theta_\beta + \dfrac{1+\sin\sigma_0}{\cos\sigma_0}\sin(\theta_1+\theta), \\ (\theta_1)_v = -\dfrac{\theta_v}{\sin\sigma_0}[1+\cos\sigma_0\cos(\theta_1-\omega)], \end{cases}$$

in dem σ_0 eine Konstante bedeutet. Das zugehörige ω_1 ergibt sich durch algebraische Operationen. Es ist

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\omega_1 = \dfrac{\cos\theta[\cos(\theta_1-\omega)+\cos\sigma_0]-\sin\sigma_0\sin\theta\sin(\theta_1-\omega)}{1+\cos\sigma_0\cos(\theta_1-\omega)}, \\ \sin\omega_1 = \dfrac{\sin\theta[\cos(\theta_1-\omega)+\cos\sigma_0]+\sin\sigma_0\cos\theta\sin(\theta_1-\omega)}{1+\cos\sigma_0\cos(\theta_1-\omega)}; \end{cases}$$

hinzugefügt sei die Formel

$$(3)\quad [1+\cos\sigma_0\cos(\theta_1-\omega)][1-\cos\sigma_0\cos(\omega_1-\theta)] = \sin^2\sigma_0.$$

Die für die Bäcklundsche Transformation B_σ in geometrischer Hinsicht charakteristische Konstante σ hängt mit σ_0 und $\varkappa$ in der folgenden Weise zusammen:

$$(4)\quad \cos\sigma = \frac{\cos\sigma_0}{\sqrt{1+\varkappa^2}-\varkappa\sin\sigma_0}, \qquad \sin\sigma = \frac{\sqrt{1+\varkappa^2}\sin\sigma_0-\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}-\varkappa\sin\sigma_0}.$$ [25])

Die Bäcklundsche Transformierte $(x_1;\alpha,\beta)$ einer durch $v=$ konst. definierten pseudosphärischen Fläche $(x;\alpha,\beta)$ des schiefen Weingartenschen Systems, allgemeiner: *der das transformierte System beschreibende Punkt* x_1 ist durch

$$(5)\quad x_1 = x + \cos\sigma(\cos\theta_1 X^{(1)} + \sin\theta_1 X^{(2)})$$

gegeben. Das rechtwinklige Dreikant $(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)})$ dieses neuen Systems ist mit dem des ursprünglichen durch die orthogonale Substitution

$$(6)\quad \begin{cases} X_1^{(1)} = \alpha_{11}X^{(1)} + \alpha_{12}X^{(2)} + \alpha_{13}X^{(3)}, \\ X_1^{(2)} = \alpha_{21}X^{(1)} + \alpha_{22}X^{(2)} + \alpha_{23}X^{(3)}, \\ X_1^{(3)} = \alpha_{31}X^{(1)} + \alpha_{32}X^{(2)} + \alpha_{33}X^{(3)} \end{cases}$$

verbunden, deren Koeffizienten die folgenden Werte haben:

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha_{11} = \cos\theta\cos\theta_1 - \sin\sigma\sin\theta\sin\theta_1, \quad \alpha_{12} = \cos\theta\sin\theta_1 + \sin\sigma\sin\theta\sin\theta_1, \\ \qquad \alpha_{13} = \cos\sigma\sin\theta, \\ \alpha_{21} = \sin\theta\cos\theta_1 + \sin\sigma\cos\theta\sin\theta_1, \quad \alpha_{22} = \sin\theta\sin\theta_1 - \sin\sigma\cos\theta\cos\theta_1, \\ \qquad \alpha_{23} = -\cos\sigma\cos\theta, \\ \alpha_{31} = -\cos\sigma\sin\theta_1, \quad \alpha_{32} = \cos\sigma\cos\theta_1, \quad \alpha_{33} = -\sin\sigma. \end{cases}$$

Es gelten dann sämtliche Formeln von § 2, 2 auch für den Index 1.

---

[25]) Für $\varkappa=0$ wird $\sigma=\sigma_0$. Das orthogonale Weingartensche System mit konstanter Flexion, aus dem das betrachtete schiefe System durch die Liesche Transformation hervorgeht, erfährt also eine Bäcklundsche Transformation B_{σ_0}.

Für die Trajektorien als Bertrandsche Kurven bedeutet die Operation B_σ die in der Einleitung erwähnte Razzabonische Transformation. Ohne nähere Ausführungen sei bemerkt, daß zwischen den von den Punkten $\bar{x}$ und

$$(8)\qquad \bar{x}_1 = x_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(\cos\omega_1 X_1^{(1)} + \sin\omega_1 X_1^{(2)})$$

beschriebenen *assoziierten* Systemen eine simultane Bäcklundsche Transformation B_σ vermittelt[26]).

2. Nach dem in § 2, 4 gewonnenen Ergebnis ist klar, daß *auch eine einzelne Fläche* **B** *der Operation B_σ unterworfen werden kann.* Es liege eine auf die Parameter u, v bezogene Fläche (x) der Klasse **B** vor. Wir benutzen das durch die Substitution § 2 (7) eingeführte Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$, so daß nach § 2 (5), (11)

$$(9)\qquad \begin{cases} x_u = \left(c\,U_1 + \frac{1}{c}U_2\right)\cos\theta\, X^{(1)} + \left(c\,U_1 - \frac{1}{c}U_2\right)\sin\theta\, X^{(2)}, \\ x_v = \frac{\varkappa\,\theta_v}{1+\varkappa^2}(-\sin\omega\, X^{(1)} + \cos\omega\, X^{(2)}) + \frac{\theta_v}{1+\varkappa^2}X^{(3)} \end{cases}$$

wird. Anknüpfend an die Entwicklungen von § 2, 3 erhalten wir jetzt für θ_1 das an die Stelle von (1) tretende Gleichungspaar:

$$(10)\qquad \begin{cases} (\theta_1)_u = \frac{1-\sin\sigma_0}{\cos\sigma_0}U_1\sin(\theta_1-\theta) + \frac{1+\sin\sigma_0}{\cos\sigma_0}U_2\sin(\theta_1+\theta) - \Omega, \\ (\theta_1)_v = -\frac{\theta_v}{\sin\sigma_0}[1+\cos\sigma_0\cos(\theta_1-\omega)], \end{cases}$$

wobei wieder [siehe § 2 (9)]

$$\Omega = -\omega_u + U_1\sin(\theta-\omega) - U_2\sin(\theta+\omega)$$

ist. Im übrigen dienen zur Bestimmung der gleichfalls zur Klasse **B** gehörenden transformierten Fläche (x_1) und ihrer konjugierten Fläche $(\bar{x}_1)$ die Formeln (2) bis (8) in unveränderter Gestalt.

§ 4.

Weitere Untersuchung des schiefen Weingartenschen Systems.

1. Wir betrachten von neuem ein durch die Formeln von § 2, 2 gegebenes schiefes Weingartensches System und führen ein weiteres rechtwinkliges Dreikant $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(2)}, \mathfrak{X}^{(3)})$ ein. Es sei gesetzt:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(X + c\,X'') = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(-\sin\omega\, X^{(1)} + \cos\omega\, X^{(2)} + c\,X^{(3)}), \\ \mathfrak{X}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(c\,X - X'') = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}[c(\sin\omega\, X^{(1)} - \cos\omega\, X^{(2)}) + X^{(3)}], \\ \mathfrak{X}^{(3)} = X' \qquad\qquad = \cos\omega\, X^{(1)} + \sin\omega\, X^{(2)} \qquad (c = \sqrt{1+\varkappa^2} - \varkappa). \end{cases}$$

---

[26]) Ein Sonderfall des Vertauschbarkeitssatzes.

Da man mit Berücksichtigung von § 1 (8) auch

$$\mathfrak{X}^{(1)} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{2}(X + \overline{X}), \qquad \mathfrak{X}^{(2)} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{2}(X - \overline{X})$$

schreiben kann, stellt $\mathfrak{X}^{(1)}$ die *Winkelhalbierende zwischen den Tangentenrichtungen der beiden zueinander konjugierten Bertrandschen Kurven*, $\mathfrak{X}^{(2)}$ *die Halbierungslinie des Nebenwinkels* dar; $\mathfrak{X}^{(3)}$ ist die Richtung der gemeinsamen Hauptnormale, also der Verbindungslinie des Punktes x mit dem korrespondierenden Punkte $\bar{x}$ des assoziierten Systems.

Aus § 2 (4) gewinnt man die Differentialrelationen des Dreikants $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(2)}, \mathfrak{X}^{(3)})$:

$$(2) \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{X}_\alpha^{(1)} = -c\cos(\theta-\omega)\,\mathfrak{X}^{(2)} - \sqrt{1+c^2}\sin(\theta-\omega)\,\mathfrak{X}^{(3)}, \quad \mathfrak{X}_\alpha^{(2)} = c\cos(\theta-\omega)\,\mathfrak{X}^{(1)},\\
&\qquad\qquad \mathfrak{X}_\alpha^{(3)} = \sqrt{1+c^2}\sin(\theta-\omega)\,\mathfrak{X}^{(1)},\\
&\mathfrak{X}_\beta^{(1)} = \frac{1}{c}\cos(\theta+\omega)\,\mathfrak{X}^{(2)}, \quad \mathfrak{X}_\beta^{(2)} = -\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\sin(\theta+\omega)\,\mathfrak{X}^{(3)} - \frac{1}{c}\cos(\theta+\omega)\,\mathfrak{X}^{(1)},\\
&\qquad\qquad \mathfrak{X}_\beta^{(3)} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\sin(\theta+\omega)\,\mathfrak{X}^{(2)},\\
&\mathfrak{X}_v^{(1)} = -\frac{\theta_v+\omega_v}{\sqrt{1+c^2}}\,\mathfrak{X}^{(3)}, \quad \mathfrak{X}_v^{(2)} = -\frac{c(\theta_v-\omega_v)}{\sqrt{1+c^2}}\,\mathfrak{X}^{(3)},\\
&\qquad\qquad \mathfrak{X}_v^{(3)} = \frac{\theta_v+\omega_v}{\sqrt{1+c^2}}\,\mathfrak{X}^{(1)} + \frac{c(\theta_v-\omega_v)}{\sqrt{1+c^2}}\,\mathfrak{X}^{(2)}.
\end{aligned}\right.$$

Bianchi benutzte die Tatsache, daß in dieser Formelgruppe die drei mit $p^{(1)}, q^{(2)}, r^{(3)}$ zu bezeichnenden Rotationen verschwinden, um gewisse dreifach-orthogonale Systeme aus den schiefen Weingartenschen Systemen abzuleiten[27]). Dabei bemerkte er eine weitere Eigenschaft des betrachteten Dreikants: $\mathfrak{X}^{(1)}$ stellt für $\alpha =$ konst. und variables β, v das *sphärische Bild* einer pseudosphärischen Strahlenkongruenz mit konjugiert-imaginären Brennflächen dar; β, v sind dabei die asymptotischen Parameter der Brennflächen. Entsprechendes gilt von $\mathfrak{X}^{(2)}$ für $\beta =$ konst. und variables α, v.

2. Als Ergänzung dieses Bianchischen Ergebnisses wollen wir jetzt zeigen, wie *die betreffenden Kongruenzen selber durch ein einfaches geometrisches Band mit den schiefen Weingartenschen Systemen verknüpft sind.* Wir nehmen den von den drei Variablen α, β, v abhängigen *Mittelpunkt* $\mathfrak{x}$ *zwischen korrespondierenden Punkten* x, $\bar{x}$ *der beiden einander assoziierten Systeme*

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$$

[27]) Siehe die Einleitung und das Zitat [6]).

und finden mittels (1), (2) und § 2 (5) zunächst die Beziehungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_\alpha = -\dfrac{c^2}{\sqrt{1+c^2}} \sin(\theta-\omega)\,\mathfrak{X}^{(2)} + c\cos(\theta-\omega)\,\mathfrak{X}^{(3)}, \\ \mathfrak{x}_\beta = -\dfrac{1}{c\sqrt{1+c^2}} \sin(\theta+\omega)\,\mathfrak{X}^{(1)} + \dfrac{1}{c}\cos(\theta+\omega)\,\mathfrak{X}^{(3)}, \\ \mathfrak{x}_v = \dfrac{c}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}[(\theta_v-\omega_v)\,\mathfrak{X}^{(1)} + c(\theta_v+\omega_v)\,\mathfrak{X}^{(2)}], \end{cases}$$

während

$$x = \mathfrak{x} + \frac{c}{1+c^2}\mathfrak{X}^{(3)}, \qquad \bar{x} = \mathfrak{x} - \frac{c}{1+c^2}\mathfrak{X}^{(3)}$$

wird. Den Punkt $\mathfrak{x}$ wählen wir zum Scheitel des Dreikants $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(2)}, \mathfrak{X}^{(3)})$. Dann gilt der Satz: *Ähnlich wie für $v =$ konst. der Strahl mit der Richtung $\mathfrak{X}^{(3)}$ eine pseudosphärische Kongruenz mit den Brennflächen $(x; \alpha, \beta)$, $(\bar{x}; \alpha, \beta)$ und dem Strahlmittelpunkt $\mathfrak{x}$ beschreibt, bilden die Strahlen mit den Richtungen $\mathfrak{X}^{(1)}$ und $\mathfrak{X}^{(2)}$ für $\alpha =$ konst. bzw. $\beta =$ konst. pseudosphärische Kongruenzen mit dem gleichen Strahlmittelpunkt $\mathfrak{x}$. Für diese beiden Scharen pseudosphärischer Kongruenzen sind die Brennflächen konjugiert-imaginär und haben bezüglich das Krümmungsmaß $-(1+c^2)^2$ und $-\frac{(1+c^2)^2}{c^4}$.* Die Gesamtheit der ∞^3 rechtwinkligen Tripel von Strahlen, die sich in drei Scharen pseudosphärischer Kongruenzen anordnen lassen, soll ein *dreifach-orthogonaler pseudosphärischer Komplex* genannt werden.

Der Beweis werde für eine durch $\beta =$ konst. definierte Kongruenz mit der Strahlrichtung $\mathfrak{X}^{(2)}$ geführt. Die Brennflächen derselben sind durch

$$\tilde{x} = \mathfrak{x} \pm \frac{i}{\sqrt{1+c^2}}\mathfrak{X}^{(2)} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

gegeben. Wir finden nämlich, wobei es genügt, das obere Vorzeichen zu schreiben, mit Benutzung von (2) und (3):

$$(4)\quad \begin{cases} \tilde{x}_\alpha = -\dfrac{c^2}{\sqrt{1+c^2}} \sin(\theta-\omega)\,\mathfrak{X}^{(2)} + \dfrac{i c\cos(\theta-\omega)}{\sqrt{1+c^2}}(\mathfrak{X}^{(1)} - i\sqrt{1+c^2}\,\mathfrak{X}^{(3)}), \\ \tilde{x}_v = \dfrac{c^2}{(1+c^2)^{3/2}}(\theta_v+\omega_v)\,\mathfrak{X}^{(2)} + \dfrac{c(\theta_v-\omega_v)}{(1+c^2)^{3/2}}(\mathfrak{X}^{(1)} - i\sqrt{1+c^2}\,\mathfrak{X}^{(3)}) \end{cases}$$

und daraus die Normalenrichtung

$$\tilde{X} = \frac{1}{c}(\sqrt{1+c^2}\,\mathfrak{X}^{(1)} - i\,\mathfrak{X}^{(3)}),$$

also senkrecht zum Strahl. Aus (4) und aus den mittels (2) gebildeten

Ableitungen von $\tilde{X}$ berechnen wir die Fundamentalgrößen der Brennflächen (x):

$$\tilde{E} = \frac{c^4}{1+c^2}, \qquad \tilde{G} = \frac{4\varepsilon c^2}{(1+c^2)^3},$$

$$\tilde{F} = -\frac{c^4}{(1+c^2)^2}[(\theta_v + \omega_v)\sin(\theta-\omega) + i(\theta_v - \omega_v)\cos(\theta-\omega)],$$

$$\tilde{L} = \tilde{N} = 0, \qquad \tilde{M} = \frac{c^2}{1+c^2}[(\theta_v + \omega_v)\cos(\theta-\omega) - i(\theta_v - \omega_v)\sin(\theta-\omega)],$$

erkennen so, daß u, v die Parameter der Asymptotenlinien sind, und erhalten als Wert des konstanten Krümmungsmaßes:

$$\tilde{K} = -\frac{\tilde{M}^2}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2} = -\frac{(1+c^2)^2}{c^4}.$$

Die hier betrachtete Abart der pseudosphärischen Kongruenzen erscheint bei Bianchi zum ersten Male in den Untersuchungen über die Spurfläche (superficie traccia), die der Koordinatenanfang relativ zum Hauptdreikant einer Fläche beschreibt[28]). Offenbar erfährt die Kenntnis dieser Kongruenzen nun eine wesentliche Erweiterung durch Heranziehen der Flächen $\mathbf{B}^*$ und der mit ihnen verbundenen Viereckssysteme. Die darauf bezüglichen Entwicklungen folgen in § 5, und zwar unabhängig von der Theorie der schiefen Weingartenschen Systeme.

§ 5.

Eine reelle geometrische Eigenschaft der pseudosphärischen Kongruenzen mit konjugiert-imaginären Brennflächen.

1[29]). Die Formeln, deren wir uns zur Darstellung der pseudosphärischen Kongruenzen bedienen, gelten zunächst ohne Unterschied für den Fall reeller und für den Fall konjugiert-imaginärer Brennflächen. Im Gegensatz zu Bianchi[30]) ziehen wir es wieder vor, die Differentialgleichungen des Problems von der charakteristischen Konstanten frei zu halten. Bekanntlich gehören die pseudosphärischen Kongruenzen zur allgemeineren Klasse derjenigen W-Kongruenzen, deren Brennflächen in korrespondierenden Punkten

[28]) Siehe das Zitat [7]).

[29]) Es sei ausdrücklich bemerkt, daß in diesem und dem folgenden Paragraphen über die bisher verwendeten Zeichen nach Bedarf neu verfügt wird. Allerdings soll zur Erleichterung des Überblicks das weiterhin auftretende Paar von Flächen $\mathbf{B}^*$ wieder mit (x), $(\bar{x})$, das einzuschaltende, von den Tangentenschnittpunkten beschriebene Flächenpaar wie in § 1, 4 mit (x'), $(\bar{x}')$ bezeichnet werden; auch wird, wie a. a. O. u der Parameter der Kurven von konstanter Torsion, v der Parameter der Bertrandschen Kurven sein.

[30]) Siehe wieder unter [7]).

gleiches Krümmungsmaß besitzen[31]). Den Asymptotenlinien der Brennflächen entspricht unter dieser Bedingung in der sphärischen Abbildung der Kongruenz ein Orthogonalnetz.

Es sei also

$$\sum dX^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

das Quadrat des Linienelements der Bildkugel. Wird

$$\text{(1)} \qquad \frac{(\sqrt{e})_v}{\sqrt{g}} = m, \quad \frac{(\sqrt{g})_u}{\sqrt{e}} = n$$

gesetzt, so lautet die Gaußsche Relation:

$$\text{(2)} \qquad m_v + n_u + \sqrt{eg} = 0.$$

Die Differentialrelationen des von der Strahlrichtung und den Tangenten der sphärischen Kurven (u, v) gebildeten rechtwinkligen Dreikants $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ werden:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} X_u = \sqrt{e}\,X^{(1)}, & X_v = \sqrt{g}\,X^{(2)}, \\ X_u^{(1)} = -m\,X^{(2)} - \sqrt{e}\,X, & X_v^{(1)} = n\,X^{(2)}, \\ X_u^{(2)} = m\,X^{(1)}, & X_v^{(2)} = -n\,X^{(1)} - \sqrt{g}\,X. \end{cases}$$

Die Mittelfläche (x_0) der pseudosphärischen Kongruenz bestimmt sich, wenn für die Brennflächen $K = -1$ sein soll, auf Grund des Ansatzes:

$$\text{(4)} \qquad (x_0)_u = m\,X - k\sqrt{e}\,X^{(2)}, \quad (x_0)_v = n\,X - (1-k)\sqrt{g}\,X^{(1)},$$

wobei k eine charakteristische Konstante ist. Die Brennflächen sind dann durch

$$\tilde{x} = x_0 \pm \sqrt{k(1-k)}\,X$$

gegeben. In der Tat erhält man (unter Beschränkung auf das obere Vorzeichen) aus den Beziehungen

$$\tilde{x}_u = m\,X + \sqrt{k}\,\sqrt{e}\,(X^{(1)}\sqrt{1-k} - X^{(2)}\sqrt{k}),$$
$$\tilde{x}_v = n\,X - \sqrt{1-k}\,\sqrt{g}\,(X^{(1)}\sqrt{1-k} - X^{(2)}\sqrt{k})$$

die zum Strahl senkrechte Richtung der Flächennormalen von $(\tilde{x})$:

$$\tilde{X} = X^{(1)}\sqrt{k} + X^{(2)}\sqrt{1-k}.$$

Man bestätigt wie in § 4, 2 durch Berechnung der Fundamentalgrößen, daß auf der Brennfläche $(\tilde{x})$ das Kurvennetz (u, v) aus den Asymptotenlinien besteht und das Krümmungsmaß den Wert -1 hat.

---

[31]) In der Tat sind nach dieser Richtung die Ergebnisse des vorliegenden Paragraphen noch einer Erweiterung fähig, über die in anderem Zusammenhang berichtet werden soll. Vgl. Jonas, Über neue zweifach-unendliche Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die Ortsflächen der Eckpunkte berühren. Berl. Math. Ges. Ber., Vortr. vom 26. März 1930.

Die Integrabilitätsbedingung für (4) bedeutet eine Zerfällung der Gaußschen Gleichung (2) in die beiden Relationen:

$$m_v + k\sqrt{eg} = 0, \qquad n_u + (1-k)\sqrt{eg} = 0,$$

aus denen sich mit Benutzung von (1) durch Integration

$$m^2 + ke = f_1(u), \qquad n^2 + (1-k)g = f_2(v)$$

ergibt. Durch geeignete Wahl der Parameter u, v können $f_1(u), f_2(v)$ zu Konstanten gemacht werden, über deren absolute Werte (soweit von Null verschieden) auch noch verfügt werden darf. Wir haben damit zunächst das Gleichungssystem:

$$(5) \qquad \begin{cases} m^2 + ke = C_1, & n^2 + (1-k)g = C_2, \\ (\sqrt{e})_v = m\sqrt{g}, & (\sqrt{g})_u = n\sqrt{e}, \end{cases}$$

von dem (2) wieder eine Folge ist.

2. An die beiden ersten Formeln (5) knüpft sich die *Einteilung der pseudosphärischen Kongruenzen* (mit reellen Strahlen):

I. $\underline{0 < k < 1}$; *Brennflächen reell.* Da $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, setzen wir:

$$C_1 = \frac{k}{1-k}, \quad \sqrt{e} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-k}}, \quad m = \sqrt{\frac{k}{1-k}}\cos\varphi,$$

$$C_2 = \frac{1-k}{k}, \quad \sqrt{g} = \frac{\sin\psi}{\sqrt{k}}, \quad n = \sqrt{\frac{1-k}{k}}\cos\psi$$

und erhalten das mit den Differentialgleichungen der Bäcklundschen Transformation gleichwertige Paar:

$$\varphi_v = \sin\psi, \qquad \psi_u = \sin\varphi.$$

II. $\underline{k > 1}$[32]); *Brennflächen konjugiert-imaginär.* $C_1 > 0$, also:

$$C_1 = \frac{k}{k-1}, \quad \sqrt{e} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{k-1}}, \quad m = \sqrt{\frac{k}{k-1}}\cos\varphi.$$

C_2 gibt Anlaß, zwei Hauptfälle und einen Ausartungsfall zu unterscheiden:

a) $\underline{C_2 > 0}$; $\quad C_2 = \frac{k-1}{k}, \quad \sqrt{g} = \frac{\operatorname{sh}\psi}{\sqrt{k}}, \quad n = \sqrt{\frac{k-1}{k}}\operatorname{ch}\psi,$

$$\varphi_v = \operatorname{sh}\psi, \qquad \psi_u = \sin\varphi.$$

b) $\underline{C_2 < 0}$; $\quad C_2 = -\frac{k-1}{k}, \quad \sqrt{g} = \frac{\operatorname{ch}\psi}{\sqrt{k}}, \quad n = \sqrt{\frac{k-1}{k}}\operatorname{sh}\psi,$

$$\varphi_v = \operatorname{ch}\psi, \qquad \psi_u = \sin\varphi.$$

---

[32]) Die Annahme $k < 0$ führt man durch Vertauschung von u und v auf $k > 1$ zurück.

c) $C_2 = 0$; *Ausartungsfall der Kongruenzen mit Serretschen Flächen als Brennflächen.*

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{\psi}, \quad n = \sqrt{\frac{k-1}{k}} e^{\psi}; \quad \varphi_v = e^{\psi}, \quad \psi_u = \sin\varphi \text{ [33]}).$$

3. Die durch den Strahlmittelpunkt x_0 gelegten Parallelen zu den Tangenten der sphärischen Bildkurven (u, v) wollen wir Querstrahlen nennen; insbesondere heiße für $k > 1$, also im Falle der *pseudosphärischen Kongruenzen mit konjugiert-imaginären Brennflächen* die Gerade mit der Richtung $X^{(2)}$ *Hauptquerstrahl.* Die Unterfälle (IIa) und (IIb) unterscheiden wir durch die folgende, leicht erweisbare Feststellung: *Die Kongruenz der Hauptquerstrahlen hat für* (IIa) *reelle, für* (IIb) *konjugiert-imaginäre Brennflächen*[34]).

Wir erledigen nun zunächst den wichtigsten Punkt der gegenwärtigen Untersuchung: *Aus der pseudosphärischen Kongruenz mit konjugiert-imaginären Brennflächen läßt sich ein System windschiefer Vierecke konstruieren, deren Seiten die Ortsflächen der Eckpunkte paarweise berühren.* Zu beachten ist, daß im Gegensatz zu § 4, 2, wo für die betreffenden Kongruenzen das Krümmungsmaß der imaginären Brennflächen den Wert $-(1+c^2)^2$ bzw. $-\frac{(1+c^2)^2}{c^4}$ hatte, jetzt $K = -1$ vorausgesetzt ist.

Auf dem Hauptquerstrahl markieren wir im gleichen, konstanten Abstande vom Mittelpunkt x_0 die beiden Punkte $x, \bar{x}$:

$$(6) \qquad x = x_0 + \sqrt{k-1}\, X^{(2)}, \qquad \bar{x} = x_0 - \sqrt{k-1}\, X^{(2)},$$

bilden:

$$(7) \quad \begin{cases} x_u = m(X + \sqrt{k-1}\, X^{(1)}) - k\sqrt{e}\, X^{(2)}, & x_v = (n - \sqrt{k-1}\sqrt{g})(X - \sqrt{k-1}\, X^{(1)}), \\ \bar{x}_u = m(X - \sqrt{k-1}\, X^{(1)}) - k\sqrt{e}\, X^{(2)}, & \bar{x}_v = (n + \sqrt{k-1}\sqrt{g})(X + \sqrt{k-1}\, X^{(1)}) \end{cases}$$

und überzeugen uns leicht davon, daß die Tangente der v-Kurve auf der Fläche (x) die Tangente der u-Kurve von $(\bar{x})$ im Punkte

$$x' = x - 2\frac{\sqrt{k-1}}{k}\frac{m}{\sqrt{e}}(X - \sqrt{k-1}\, X^{(1)})$$

trifft. Ebenso schneiden sich die Tangenten an die u-Kurve von (x) und an die v-Kurve von $(\bar{x})$ im Punkte

$$\bar{x}' = \bar{x} + 2\frac{\sqrt{k-1}}{k}\frac{m}{\sqrt{e}}(X + \sqrt{k-1}\, X^{(1)}).$$

---

[33]) e bedeutet die Exponentialgröße.

[34]) Vgl. den Schluß von § 1.

Die Lote der in x' bzw. in $\bar{x}'$ zusammenstoßenden Tangentenpaare haben die Richtungen:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}(X^{(1)} + \sqrt{k-1}\,X), \qquad \frac{1}{\sqrt{k}}(X^{(1)} - \sqrt{k-1}\,X).$$

Man zeigt schließlich, daß

$$\Sigma(X^{(1)} + \sqrt{k-1}\,X)\,dx' = 0, \qquad \Sigma(X^{(1)} - \sqrt{k-1}\,X)\,d\bar{x}' = 0$$

ist; das bedeutet aber: *Die Ebene der Punkte $x, x', \bar{x}$ ist Tangentialebene der Fläche (x'), die Ebene $x, \bar{x}', \bar{x}$ Tangentialebene von $(\bar{x}')$.*

4. Wir verzichten auf die Wiedergabe der weiteren Rechnungen, durch die bestätigt wird, daß *die Flächen (x), $(\bar{x})$ ein Paar konjugierter Flächen* B *vorstellen.* Sie lassen sich also (auf unendlichfache Weise) zwei assoziierten schiefen Weingartenschen Systemen als asymptotische Trajektorienflächen einordnen. Die pseudosphärischen Flächen der Systeme haben hier das Krümmungsmaß $-\frac{1}{k^2}$.

Das Endergebnis kann folgendermaßen formuliert werden: *Die auf den Hauptquerstrahlen einer pseudosphärischen Kongruenz mit konjugiert-imaginären Brennflächen $(K = -1)$ durch (6) bestimmten Punkte x und $\bar{x}$ beschreiben, den Asymptotenlinien der imaginären Brennflächen entsprechend, v-Kurven der Bertrandschen Klasse*

$$\frac{1}{R} - \frac{k-2}{2\sqrt{k-1}}\frac{1}{T} + \frac{1}{2\sqrt{k-1}} = 0$$

und u-Kurven mit konstanter Torsion $\frac{1}{k}$. Die Bertrandsche Kurve der einen Fläche hat mit der Kurve von konstanter Torsion der anderen Fläche die Schmiegungsebene gemein. Diese Schmiegungsebenen sind die Tangentialebenen der beiden von den Tangentenschnittpunkten gebildeten Flächen (x'), $(\bar{x}')$ [35]).

Die Betrachtung des *Ausartungsfalles* (IIc) führt auf Bekanntes. Der Punkt x beschreibt dann, wie aus (7) zu ersehen ist, keine Fläche, sondern eine Kurve von konstanter Torsion. Die Konstruktion einer pseudosphärischen Kongruenz mit Serretschen Brennflächen aus einer Kurve von konstanter Torsion hat Bianchi[36]) gefunden. Die von uns aufgedeckte Eigenschaft der pseudosphärischen Kongruenzen mit konjugiert-imaginären Brennflächen kann als eine weitgehende Verallgemeinerung dieses Bianchischen Ergebnisses angesehen werden.

---

[35]) In dieser Fassung erscheint der Inhalt des letzten Satzes als unmittelbare Folge des voraufgehenden.

[36]) Siehe § 8—11 der unter [7]) genannten Arbeit.

Von Interesse ist noch die *Annahme* $k=2$. Die Bertrandschen Kurven gehen dabei in Kurven konstanter Flexion über; die Fläche (x), ebenso $(\bar{x})$, läßt sich als asymptotische Trajektorienfläche eines orthogonalen Weingartenschen Systems mit konstanter Flexion auffassen; die von den Tangentenpaaren gebildeten windschiefen Vierecke haben in den Gegenecken x und $\bar{x}$ rechte Winkel.

§ 6.

Flächen mit Bertrandschen Kurven in Verbindung mit nicht-geradlinigen Biegungsflächen des einschaligen Rotationshyperboloids.

1. Auf einer Biegungsregelfläche des einschaligen Rotationshyperboloids

$$(\mathfrak{H}) \qquad \frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}{a^2} - \frac{\mathfrak{z}^2}{c^2} = 1$$

stellt der verbogene Kehlkreis, die Striktionslinie, eine Bertrandsche Kurve dar. Rollt das Hyperboloid auf der Biegungsfläche, wobei die Erzeugenden der einen Schar der Reihe nach mit den Geraden der Biegungsfläche zur Deckung kommen, so rollt gleichzeitig sein Kehlkreis derart auf der Bertrandschen Kurve, daß seine Ebene ständig mit der Schmiegungsebene der letzteren zusammenfällt. Sein Mittelpunkt, also der Mittelpunkt des rollenden Hyperboloids, beschreibt die konjugierte Bertrandsche Kurve, deren Schmiegungsebene normal zu der gemeinsamen Erzeugenden ist, in der sich Hyperboloid und Biegungsregelfläche berühren. Der Radius des rollenden Kehlkreises ist die gemeinschaftliche Hauptnormale der beiden Bertrandschen Kurven.

Es liege nun eine *nicht-geradlinige Biegungsfläche* $S(x)$ *des einschaligen Rotationshyperboloids* $\mathfrak{H}(\mathfrak{x})$ vor. Beide Flächen beziehen wir auf die Parameter u, v der Erzeugenden von $\mathfrak{H}$. Wir setzen:

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = a\frac{1+uv}{u+v}, \qquad \mathfrak{y} = a\frac{u-v}{u+v}, \qquad \mathfrak{z} = c\frac{1-uv}{u+v}$$

und haben für $\mathfrak{H}$ und S die Formeln:

$$(2) \quad \begin{cases} E = \dfrac{(a^2+c^2)(1+v^2)^2}{(u+v)^4}, \quad G = \dfrac{(a^2+c^2)(1+u^2)^2}{(u+v)^4}, \\ F = \dfrac{(a^2+c^2)(1+u^2)(1+v^2) - 2a^2(u+v)^2}{(u+v)^4}, \quad \sqrt{EG-F^2} = \dfrac{2a^2c\sqrt{H}}{(u+v)^3}, \end{cases}$$

wobei

$$H = \frac{1}{a^2}(1+u^2)(1+v^2) + \frac{1}{c^2}(1-uv)^2$$

ist. Die Fundamentalgrößen 2. Ordnung werden für $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N} = 0, \qquad \mathfrak{M} = -\frac{2}{(u+v)\sqrt{H}},$$

während sie für S mit L, M, N bezeichnet sein mögen. Wir denken uns auf der Biegungsfläche S auch die Asymptotenlinien (α, β) festgelegt, etwa in der Weise, daß wir u und v als Funktionen ihrer Parameter α, β auffassen[37]). Die Unterscheidung der beiden Scharen treffen wir so, daß der Windungssinn der α-Asymptotenlinien von S mit dem der u-Geraden[38]) von $\mathfrak{H}$ übereinstimmt. Es gelten dann die wichtigen, hinsichtlich des Vorzeichens eindeutigen Beziehungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} M du + N dv = \mathfrak{M}(u_\alpha d\alpha - u_\beta d\beta), \\ L du + M dv = \mathfrak{M}(-v_\alpha d\alpha + v_\beta d\beta). \end{cases}$$

Wir lassen das Hyperboloid $\mathfrak{H}$ auf der Biegungsfläche S rollen und betrachten neben der *Rollfläche des Mittelpunktes* M die *Ortsflächen der Kehlkreispunkte* N und N'; darunter seien die auf den beiden Erzeugenden gelegenen Schnittpunkte des Kehlkreises mit der gemeinsamen Tangentialebene von S und $\mathfrak{H}$ verstanden. Bei isometrischer Verbiegung werden, wie wir beiläufig bemerken, die Punkte M, N, N' in starrer Koppelung mit den Flächenelementen von S mitgeführt.

Rollt $\mathfrak{H}$ insbesondere längs einer α-Asymptotenlinie von S, so folgt aus einer bekannten Eigenschaft der *kinematisch-konjugierten Richtungen*[39]) in Verbindung mit dem Chieffischen Satze, daß dieser Vorgang gleichbedeutend ist mit dem Rollen des Hyperboloids auf derjenigen Biegungsregelfläche, die man erhält, indem man durch die Punkte der α-Kurve die Erzeugenden mit entgegengesetztem Windungssinn, also die Tangenten an die v-Linien von S legt. M und der Kehlkreispunkt N der v-Geraden beschreiben also konjugierte Bertrandsche Kurven. Allgemeiner: *Rollt* $\mathfrak{H}$ *auf* S, *so entsprechen den* α*-Asymptotenlinien von* S *auf der Rollfläche* (M) *des Mittelpunkts und auf der Ortsfläche* (N) *des Kehlkreispunktes der* v*-Geraden konjugierte Bertrandsche Kurven der gleichen Klasse.*

2. Den hiermit erst unvollständig wiedergegebenen geometrischen Sachverhalt ergänzen wir in Art. **3.** Für den Augenblick werde die Tatsache ins Auge gefaßt, daß die Fläche (N) von einer Schar Bertrandscher Kurven der gleichen Klasse bedeckt ist, aus denen sich die Biegungsfläche S des Rotationshyperboloids konstruieren läßt. Legt man durch die Punkte einer dieser Bertrandschen Kurven die Parallelen zu den Binormalen der konjugierten Kurve, so bilden diese jedesmal die Erzeugenden einer Biegungsregelfläche des Hyperboloids; die sämtlichen so entstehenden Biegungsregel-

[37]) Die Differentialgleichungen, von denen die Bestimmung der Biegungsfläche abhängt, werden im folgenden überhaupt nicht herangezogen.

[38]) Als Schmiegungsebene der Erzeugenden ist die Tangentialebene des Hyperboloids anzusehen.

[39]) Bianchi, Lezioni di geom. diff. 2_1 (3ª ed.), §§ 320—322, insb. S. 121; s. ferner 1_1, §§ 152, 153 und 1_2, § 169.

flächen berühren eine allgemeine Biegungsfläche S längs der Asymptotenlinien der einen Schar. S erscheint so als Umhüllungsgebilde der ∞^1 Biegungsregelflächen oder, was auf dasselbe hinausläuft, als Brennflächenmantel der aus den ∞^2 konstruierten Parallelen bestehenden Strahlenkongruenz.

Es liegt nun die *Frage* nahe, *ob nicht eine solche Schar Bertrandscher Kurven, die in der angegebenen Weise eine allgemeine Biegungsfläche des einschaligen Rotationshyperboloids bestimmt, aus den ∞^2 Trajektorien eines schiefen Weingartenschen Systems ausgewählt werden kann.* Die Fläche (N) müßte dazu die in § 1, 2 aufgestellte, für die Flächen **B** charakteristische Bedingung erfüllen. Wir zeigen, daß dies nicht zutrifft, und beantworten damit die aufgeworfene Frage *im verneinenden Sinne.*

$(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ sei das von dem rollenden Rotationshyperboloid $\mathfrak{H}$ mitgeführte rechtwinklige Dreikant seiner Koordinatenachsen. Es bestehen dann Relationen der folgenden Gestalt:

$$dx = X^{(1)}\, d\mathfrak{x} + X^{(2)}\, d\mathfrak{y} + X^{(3)}\, d\mathfrak{z}. \tag{4}$$ [40])

Bezeichnen wir mit P, Q, R, P', Q', R' die Rotationen des Dreikants in bezug auf die Variablen u, v, so daß also

$$X_u^{(1)} = R\,X^{(2)} - Q\,X^{(3)}, \qquad X_v^{(1)} = R'\,X^{(2)} - Q'\,X^{(3)} \quad \text{usw.} \tag{5}$$

wird, so gelten die Formeln:

$$P = \frac{(M - \mathfrak{M})\,\mathfrak{x}_u - L\,\mathfrak{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad P' = \frac{N\,\mathfrak{x}_u - (M - \mathfrak{M})\,\mathfrak{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \quad \text{usw.} \tag{6}$$

Für die Rollfläche des Mittelpunkts M erhalten wir:

$$x^{(M)} = x - \mathfrak{x}\,X^{(1)} - \mathfrak{y}\,X^{(2)} - \mathfrak{z}\,X^{(3)}. \tag{7}$$

Mit Hilfe von (4) und (5) folgt:

$$\left\{\begin{aligned} x_u^{(M)} &= (\mathfrak{y}R - \mathfrak{z}Q)\,X^{(1)} + (\mathfrak{z}P - \mathfrak{x}R)\,X^{(2)} + (\mathfrak{x}Q - \mathfrak{y}P)\,X^{(3)}, \\ x_v^{(M)} &= (\mathfrak{y}R' - \mathfrak{z}Q')\,X^{(1)} + (\mathfrak{z}P' - \mathfrak{x}R')\,X^{(2)} + (\mathfrak{x}Q' - \mathfrak{y}P')\,X^{(3)}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Die an sich bemerkenswerte Umformung, die diese Gleichungen noch zulassen, ist für den gegenwärtigen Zweck nicht erforderlich. Für die Ortsfläche des Kehlkreispunktes N genügt die Darstellung:

$$x^{(N)} = x - \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_v}\,x_v. \tag{9}$$

Die Binormale der u-Kurve von (M) hat die Richtung $\frac{1}{\sqrt{G}}x_v$, die der u-Kurve von (N) die Richtung $X^{(3)}$. Soll ein Paar konjugierter Flächen **B** vorliegen, so müssen durch

$$\text{(a)}\quad \sum X^{(3)}\,dx^{(M)} = 0, \qquad \text{(b)}\quad \sum x_v\,dx^{(N)} = 0$$

---

[40]) $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ sind nur in der Formelgruppe (6), dagegen nicht in (4), (7), (8) zu permutieren.

korrespondierende Kurven auf (M) und (N) definiert sein. Die Differentialgleichung (a) geht mittels (8) in

$$(\mathfrak{x}\,Q - \mathfrak{y}\,P)\,du + (\mathfrak{x}\,Q' - \mathfrak{y}\,P')\,dv = 0$$

über. Schreiben wir (b) in der Form $A\,du + B\,dv = 0$, so ist $A \neq 0$[41]), während sich mit Benutzung von (1) und (2)

$$B = \sum x_v x_v^{(N)} = \sum x_v \left\{\left[1 - \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_v\right] x_v - \frac{\partial}{\partial v} x_{vv}\right\} = \left[1 - \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_v\right] G - \frac{\partial G_v}{2\,\partial v} = 0$$

ergibt. Damit reduziert sich (b) auf $du = 0$, so daß das geforderte Zusammenfallen von (a) und (b) die Gleichung

$$\mathfrak{x}\,Q' - \mathfrak{y}\,P' = 0, \quad \text{d. h.} \quad N\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}\right)_u - (M - \mathfrak{M})\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}\right)_v = 0$$

nach sich zieht. Da aber

$$(M - \mathfrak{M})\,du + N\,dv = 0$$

die Differentialgleichung der einen Asymptotenlinienschar von S (und zwar, wie aus (3) ersichtlich ist, der α-Kurven) ist, so gelangt man zu der nicht nur im allgemeinen *nicht* erfüllten, sondern *überhaupt nicht erfüllbaren* Bedingung, daß sich die Meridiane $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} =$ konst. des Rotationshyperboloids bei der Verbiegung, die es in S überführt, in Asymptotenlinien verwandeln müßten[42]).

3. Nach Feststellung dieses negativen Ergebnisses bringen wir die Entwicklungen von Art. 1 zum Abschluß. Es ist klar, daß auf der Rollfläche (M) des Mittelpunkts auch den β-Asymptotenlinien von S eine Schar Bertrandscher Kurven entspricht. Ihre konjugierten Kurven bedecken die Ortsfläche (N') des anderen Kehlkreispunktes, der auf der u-Geraden von $\mathfrak{H}$ bzw. auf der Tangente der u-Linie von S liegt. Der Zyklus wird durch Hinzufügung einer vierten Hilfsfläche (M') geschlossen, deren laufender Punkt M' aus M durch Spiegelung an der gemeinsamen Tangentialebene von S und $\mathfrak{H}$ hervorgeht. Läßt man das symmetrische Hyperboloid $\mathfrak{H}'$ auf der anderen Seite von S rollen, so wird infolge der Umkehrung des Windungssinns der Erzeugenden die Zuordnung zwischen diesen und den Tangenten der Asymptotenlinien von S als kinematisch-konjugierten Richtungen die entgegengesetzte. Wir können sagen: *Auf den vier zur Biegungsfläche S gehörigen Hilfsflächen (M), (N), (M'), (N'), deren Punkte die Ecken windschiefer Rhomben mit konstanter Seitenlänge a bilden, entsprechen den Asymptotenlinien (α, β) von S je zwei Scharen Bertrandscher*

---

[41]) (N) ist *nicht* Evolventenfläche der von den verbogenen v-Geraden gebildeten geodätischen Linien.

[42]) Als geodätische Linien müßten die Meridiane sogar in Geraden übergehen, eine Forderung, der nur das Linienelement des Katenoids genügt.

Kurven; für jede der vier Flächen liegen die zu ihren Bertrandschen Kurven konjugierten auf den beiden benachbarten Flächen, so z. B. für (M) *die konjugierten* α*-Kurven auf* (N), *die konjugierten* β*-Kurven auf* (N').

Die rechnerische Bestätigung dieser geometrischen Verhältnisse gelingt leicht im Anschluß an Art. 2, wobei man, um die Ableitungen von $x^{(M)}$ und $x^{(N)}$ nach α und β auszudrücken, sich der Relationen (3) bedienen muß. Weniger bequem gestaltet sich auf diesem Wege die noch erforderliche Einbeziehung der *Komplementärfläche* $\bar{S}$, die von der Theorie der W-Flächen aus leichter zugänglich erscheint. Die Achsen der beiderseits rollenden Rotationshyperboloide $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ treffen sich nämlich im zweiten Brennpunkte $\bar{x}$ der an den verbogenen Meridian gelegten Tangente von S und bilden für die von ihm beschriebene, auf das gleiche Rotationshyperboloid abwickelbare Fläche $\bar{S}$ die Tangenten an die Biegungslinien der Erzeugenden. Mit dieser Komplementärfläche $\bar{S}$ verbunden, vertauschen die Flächenpaare (M), (M') und (N), (N') also nur ihre ursprünglichen Rollen.

4. An die in Art. **1** und **3** auseinandergesetzten, im wesentlichen wohl als bekannt zu betrachtenden Beziehungen knüpfen wir noch eine Bemerkung, deren Inhalt neu sein dürfte und ein beachtenswertes *Analogon zu den Eigenschaften der Paare konjugierter Flächen* **B*** darstellt. Die *nicht* einander zugeordneten Bertrandschen Kurven auf den Ortsflächen (N) und (N') der Kehlkreispunkte — ihre Tangenten fallen mit den in N und N' an jeden der beiden Kehlkreise von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ konstruierten Tangentenpaaren zusammen — haben die Schmiegungsebenen, nämlich die Ebenen der Kehlkreise, miteinander gemein. Wir bedenken nun, daß der zweite Brennflächenmantel einer Kongruenz die Enveloppe der Schmiegungsebenen für die Schar der den ersten Brennflächenmantel bedeckenden, von den Strahlen berührten Kurven bildet. Die Schnittpunkte Q und Q' der betrachteten Tangentenpaare, symmetrisch zu beiden Seiten der Meridiantangente in der durch dieselbe bestimmten Normalebene von $\mathfrak{H}$ und S gelegen, beschreiben demnach die Enveloppen der beiden Systeme von Schmiegungsebenen. Entsprechendes gilt von den Flächen (M), (M') und den zugehörigen Tangentenschnittpunkten P, P', die in der Tangentialebene von S, und zwar symmetrisch zur Meridiantangente, liegen. Wir haben damit den Satz: *Für jedes der beiden mit dem verbogenen einschaligen Rotationshyperboloid verbundenen Flächenpaare* (M), (M') *und* (N), (N') *bilden die Schnittpunkte der Tangenten ihrer* *nicht* *einander zugeordneten Bertrandschen Kurven je zwei Flächen* (P), (P') *bzw.* (Q), (Q'), *die auch ihrerseits von den Tangentenpaaren berührt werden*[43]).

[43]) Einen allgemeineren Satz über die Biegungsflächen des dreiachsigen Hyperboloids wird die unter [31]) angeführte Mitteilung enthalten.

Die Flächennormalen von (M) und (M'), gleichzeitig also die gemeinschaftlichen Lote zu MP, MP' und zu $M'P$, $M'P'$, treffen sich im Punkte x der Biegungsfläche S[44]), mithin die Normalen von (N) und (N') im Punkte $\bar{x}$ der Komplementärfläche $\bar{S}$. Da die Kehlkreistangenten die senkrechten Projektionen der Erzeugenden auf die Ebene des Kehlkreises vorstellen, schließt man leicht, daß die Flächennormalen von (Q) und (Q') durch den Punkt x, die von (P) und (P') also durch $\bar{x}$ gehen.

Die beiden Systeme windschiefer Rhomben $MPM'P'$ und $NQN'Q'$ können nun mit den Flächenelementen des Rotationshyperboloids $\mathfrak{H}$ starr gekoppelt werden. Dabei soll $\mathfrak{H}$ jetzt also nicht mehr auf einer Biegungsfläche S rollen, sondern nachträglich durch Biegung in alle möglichen isometrischen Flächen S übergehen. *Im Mittelpunkt stoßen ∞^2 zu koppelnde, von den Punkten des Hyperboloids ausgehende Strahlsegmente mit ihren Endpunkten M zusammen; durch Spiegelung an den Tangentialebenen ergeben sich die Punkte M'. In den Tangentialebenen werden auf den Erzeugenden die Kehlkreispunkte N, N' markiert. Die Punkte Q, Q' sind die Fußpunkte der von den Punkten des Hyperboloids auf die Kehlkreisebene gefällten Lote ($\mathfrak{z}$-Koordinaten) und ihre Gegenpunkte bezüglich der Tangentialebenen. Um die Punkte P, P' zu konstruieren, hat man durch die Treffpunkte der Meridiantangenten mit der Achse*[45]) *die in die Tangentialebenen fallenden Normalen zu den Ebenen MNM' und $MN'M'$ zu legen. Die windschiefen Rhomben $MPM'P'$ und $NQN'Q'$ haben dann nicht nur die Eigenschaft, daß nach beliebiger Verbiegung des Hyperboloids $\mathfrak{H}$ ihre Seiten stets Tangenten der von den Eckpunkten gebildeten Flächen sind, sondern auch noch die weitere, daß diese Seiten die Bertrandschen Kurven berühren, die auf den Flächen (M), (M') und (N), (N') den Asymptotenlinien der jeweiligen Biegungsfläche entsprechen.*

Jedes der beiden Systeme windschiefer Rhomben bedeutet übrigens, worauf ohne nähere Ausführungen noch hingewiesen sei, einen (eben durch das Auftreten der Bertrandschen Kurven ausgezeichneten) Spezialfall der in der Einleitung erwähnten[46]) allgemeineren derartigen Systeme, die sich mit einer beliebigen Rotationsfläche verbinden lassen und von zwei willkürlichen Konstanten abhängen.

---

[44]) Das geht aus (8) hervor, folgt auch auf Grund kinematischer Gesichtspunkte oder aus einer bekannten Eigenschaft der *im Beltramischen Sinne* verbogenen Strahlenkongruenzen.

[45]) Diese Punkte gehen bei der Biegung in die Punkte $\bar{x}$ der Komplementärfläche $\bar{S}$ über.

[46]) Siehe dort die Fußnote [4]).

(Eingegangen am 20. 1. 1930.)

Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde.

Von

J. A. Schouten in Delft und E. R. van Kampen im Haag.

Ein m-Richtungsfeld in einer X_n, $m \leqq n$, das nicht aus den m-Richtungen von ∞^{n-m} m-dimensionalen X_m besteht, ist ein nichtholonomes Gebilde, das in bezug auf Einbettung und Krümmung Eigenschaften besitzt, die denen einer eingebetteten X_m analog sind. Gebilde dieser Art sind von verschiedener Seite untersucht worden[1]). In der vorliegenden Arbeit wird nach einem vorbereitenden Paragraphen zunächst erörtert, welche Größenarten bei einer eingespannten X_n^m vorkommen und welche Identifizierungen zwecks Erleichterung der Rechnung vorgenommen werden können. Es ergibt sich eine in bezug auf die X_n^m und auf die Einspannung vollständig duale Behandlung, die zur Identifizierung einerseits der kontravarianten, anderseits der kovarianten Größen der X_n^m mit Größen der X_n führt. Sodann wird in der X_n eine allgemeine lineare Übertragung festgelegt und es werden die hierdurch entstehenden verschiedenen kovarianten Differentiale erörtert. Die Formeln bleiben aber behaftet mit vielen Faktoren B und C, die nur zur Komponentenbildung dienen. Dieser Übelstand wird nun beseitigt durch Verwendung der D-Symbolik, die Erweiterung

---

[1]) G. Vranceanu, Sur les espaces non-holonomes, Comptes Rendus **183** (1926), p. 825—854; Sur le calcul différentiel absolu pour les variétés non-holonomes, Comptes Rendus **183** (1926), p. 1083—1085; Horak (tschechisch), Sur une généralisation de la notion de variété, Publ. de l'Univ. Masaryk, Brno 1927; J. A. Schouten, Über nichtholonome Übertragungen in einer L_n, Math. Zeitschrift **30** (1929), S. 149—172; G. Vranceanu, Studio geometrico dei sistemi anolonomi, Ann. di Mat. **6** (1929), p. 9—43; Les trois points de vue dans l'étude des espaces non-holonomes, Comptes Rendus **188** (1929), p. 973—975; man vergleiche auch die in diesen Arbeiten angegebene Literatur. — D. Sintsow, Zur Krümmungstheorie der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung, Math. Annalen **101** (1929), S. 261—272, untersucht unabhängig von den oben genannten Autoren die Krümmungstheorie einer V_3^2 im R_3.

einer auf v. d. Waerden und Bortolotti zurückgehenden Methode, die durch geschickte Verwendung der zu den lokalen Bezugssystemen gehörigen Indizes den Gebrauch der Faktoren B und C nahezu vollständig zu vermeiden gestattet. Mit Hilfe dieser D-Symbolik gestaltet sich die Behandlung der Krümmungstheorie besonders einfach, wie insbesondere an der V_n^m in V_n (X_n mit Riemannscher Maßbestimmung) gezeigt wird. Es treten dabei vier zur V_n^m gehörige Krümmungsgrößen auf und es ergeben sich für diese Identitäten, die den gewöhnlichen vier Identitäten analog sind. Zum Schluß wird noch die in X_n eingespannte V_n^m behandelt, bei der merkwürdigerweise Maßbestimmung und Einspannung zusammen eine Übertragung festzulegen imstande sind, obwohl in der X_n keine Übertragung vorliegt.

§ 1.
Vorbereitendes.

Lokale Bezugssysteme abhängig von den ξ^ν.

Unter einer X_n verstehen wir zunächst die Gesamtheit aller Werte, die n Variablen, die Urvariablen ξ^ν, $\nu = 1, \ldots, n$, annehmen können, sodann aber, sobald Funktionen der ξ^ν auftreten, nur ein solches Gebiet, wo diese Funktionen hinreichend oft stetig differenzierbar sind. Die *laufenden* Indizes $\alpha, \ldots, \omega$ können durch jedes Zeichen einer Reihe von *festen* Indizes ersetzt werden. Für diese festen Indizes haben wir die *kursiv* gedruckten Zahlen $1, \ldots, n$ gewählt. Bei Transformation der Urvariablen

(1) $$\xi^{\mathrm{N}} = \xi^{\mathrm{N}}(\xi^\nu)$$

bleibe der *Kernbuchstabe* ξ unverändert, während die *laufenden Indizes* einer anderen Buchstabenreihe entnommen werden, der eine bestimmte Reihe von *festen Indizes* zugeordnet ist. Im folgenden sollen z. B. den laufenden Indizes $\mathrm{A}, \ldots, \Omega$ stets die festen Indizes $\bar{1}, \ldots, \bar{n}$ zugeordnet werden, so daß sich für die neuen Urvariablen bei Verwendung dieser Buchstabenreihe ξ^{N} schreiben läßt. Wird dagegen die X_n einer *Transformation* unterworfen, so bezeichnen wir die *neuen* Punkte mit *demselben* Index, aber mit *anderem* Kernbuchstaben:

(2) $$\eta^\nu = \eta^\nu(\xi^\nu).$$

Bekanntlich dient die aus (1) ableitbare Gleichung

(3) $$d\xi^{\mathrm{N}} = (\partial_\lambda \xi^{\mathrm{N}})\, d\xi^\lambda, \quad \partial_\lambda = \partial/\partial\xi^\lambda$$

als Ausgangspunkt zur Definition der *Größen*, worunter wir erstens verstehen Größen ersten Grades, das sind kontra- und kovariante Vektoren:

(4a) $$v^{\mathrm{N}} = (\partial_\lambda \xi^{\mathrm{N}})\, v^\lambda,$$

(4b) $$w_{\mathrm{A}} = (\partial_{\mathrm{A}} \xi^\nu)\, w_\nu,$$

zweitens die aus diesen in bekannter Weise ableitbaren *Größen höheren Grades* und drittens die *Skalare* oder Größen *nullten* Grades, die durch die Invarianz ihrer Bestimmungszahl bei (1) charakterisiert sind. Auch bei diesen Größen ***bleibe der Kernbuchstabe bei Transformation unverändert, und bedeute Änderung des Kernbuchstabens stets Änderung der Größe selbst.***

Der Einheitsaffinor A_λ^ν und die zu den ξ^ν gehörigen Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}{}^\nu$ und $\overset{\nu}{e}_\lambda$ werden definiert durch die Gleichungen

$$(5) \qquad \underset{\lambda}{e}{}^\nu \stackrel{*}{=} \overset{\nu}{e}_\lambda \stackrel{*}{=} \delta_\lambda^\nu = \begin{cases} 0, & \nu \neq \lambda, \\ 1, & \nu = \lambda, \end{cases}$$

$$(6) \qquad A_\lambda^\nu = \overset{\mu}{e}_\lambda \underset{\mu}{e}{}^\nu \stackrel{*}{=} \delta_\lambda^\nu,$$

wo das Zeichen $\stackrel{*}{=}$ bedeutet, daß die Gleichung nur in dem verwendeten Bezugssystem gilt und nicht invariant ist beim Übergang zu einem anderen System. δ_λ^ν ist das bekannte Kroneckersche Symbol, das bei allen vorkommenden Buchstabenreihen zur Verwendung gelangt. Wir deuten das System der Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}{}^\nu$, $\overset{\nu}{e}_\lambda$ im Text an durch (ν). Ebenso gehören zu den ξ^{N} die Bestimmungszahlen A_Λ^{N} des Einheitsaffinors und ein System von Maßvektoren $\underset{\Lambda}{e}{}^{\mathrm{N}}$ und $\overset{\mathrm{N}}{e}_\Lambda$:

$$(7) \qquad A_\Lambda^{\mathrm{N}} \stackrel{*}{=} \overset{\mathrm{N}}{e}_\Lambda \stackrel{*}{=} \underset{\Lambda}{e}{}^{\mathrm{N}} \stackrel{*}{=} \delta_\Lambda^{\mathrm{N}},$$

das im Text mit (N) angedeutet wird, und es ist gemäß (3)

$$(8) \qquad \begin{aligned} &A_\Lambda^{\mathrm{N}} = (\partial_\nu \xi^{\mathrm{N}})(\partial_\Lambda \xi^\lambda) A_\lambda^\nu = (\partial_\mu \xi^{\mathrm{N}}) \partial_\Lambda \xi^\mu, \\ &\underset{\lambda}{e}{}^{\mathrm{N}} = (\partial_\mu \xi^{\mathrm{N}}) \underset{\lambda}{e}{}^\mu \stackrel{*}{=} \partial_\lambda \xi^{\mathrm{N}}; \qquad \underset{\Lambda}{e}{}^\nu = (\partial_{\mathrm{N}} \xi^\nu) \underset{\Lambda}{e}{}^{\mathrm{N}} \stackrel{*}{=} \partial_\Lambda \xi^\nu, \\ &\overset{\nu}{e}_\Lambda = (\partial_\Lambda \xi^\mu) \overset{\nu}{e}_\mu \stackrel{*}{=} \partial_\Lambda \xi^\nu; \qquad \overset{\mathrm{N}}{e}_\lambda = (\partial_\lambda \xi^{\mathrm{M}}) \overset{\mathrm{N}}{e}_{\mathrm{M}} \stackrel{*}{=} \partial_\lambda \xi^{\mathrm{N}}. \end{aligned}$$

Die in (5) bis (8) oben und unten in der Mitte auftretenden Indizes heißen im Gegensatz zu den transformierenden Indizes *unterscheidende*. Wie bei den transformierenden Indizes gibt es natürlich auch *laufende* und *feste* unterscheidende Indizes. Bei der Abmachung über die Änderung der Kernbuchstaben sind unterscheidende Indizes stets als zum Kernbuchstaben gehörig zu betrachten. Die unterscheidenden Indizes, *auch die laufenden,* transformieren *nicht* mit und werden niemals an den Stellen rechts oben oder unten geschrieben, die ausschließlich für die transformierenden Indizes rexniert bleiben. Nur bei den beiden unterscheidenden Indizes des Kroneckerschen Symbols δ_λ^ν soll aus historischen Gründen eine Ausnahme zugelassen sein.

Nicht alle Indizes einer Größe brauchen sich auf dasselbe lokale Bezugssystem zu beziehen. Bestimmungszahlen mit verschiedenartigen Indizes heißen *verbindend*. Geht man beim Einheitsaffinor nur für den oberen Index zu (N) über, so ergibt sich

$$A_\lambda^{N} = \overset{\mu}{e}_\lambda \underset{\mu}{e}^{N} = \overset{\mu}{e}_\lambda \underset{\mu}{e}^{\nu} \partial_\nu \xi^{N} = \partial_\lambda \xi^{N} \tag{9}$$

und es stellt sich also heraus, daß die $\partial_\lambda \xi^N$ nichts anderes sind als verbindende Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors. In derselben Weise erhält man die A_Λ^ν, so daß sich die Definitionsgleichungen (4) jetzt schreiben lassen

$$\begin{aligned} v^{N} &= A_\lambda^{N} v^{\lambda}, \\ w_\Lambda &= A_\Lambda^{\nu} w_\nu . \end{aligned} \tag{10}$$

Mit Hilfe von A_λ^N und A_Λ^ν lassen sich die verbindenden Bestimmungszahlen aller Größen ableiten, z. B.

$$v_{\lambda M}{}^{\cdot\cdot N} = v_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\nu} A_{\nu M}^{N\mu} = v_{\Lambda M}{}^{\cdot\cdot N} A_\lambda^{\Lambda}. \tag{11}$$

Der Unterschied in der Transformationsweise von A_λ^ν, $\underset{\lambda}{e}^\nu$, $\overset{\nu}{e}_\lambda$ und δ_λ^ν beim Übergang von (ν) auf (N) wird in folgender Tabelle übersichtlich dargestellt:

(12)

	Transf. des kontr. Index	Transf. des kov. Index	Kombiniert
$\underset{\lambda}{e}^{\nu}$	$\underset{\lambda}{e}^{N}$	$\underset{\lambda}{e}^{\nu}$	$\underset{\lambda}{e}^{N}$
$\overset{\nu}{e}_\lambda$	$\overset{\nu}{e}_\lambda$	$\overset{\nu}{e}_\Lambda$	$\overset{\nu}{e}_\Lambda$
A_λ^{ν}	A_λ^{N}	A_Λ^{ν}	A_Λ^{N}
δ_λ^{ν}	δ_λ^{ν}	δ_λ^{ν}	δ_λ^{ν}

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (N) und (ν) zusammenfallen, lautet

$$A_\lambda^{N} \stackrel{*}{=} \delta_\lambda^{N}, \tag{13}$$

wo δ_λ^N eine *Erweiterung* des Kroneckerschen Symbols ist, die 1 oder 0 bedeutet, je nachdem die laufenden Indizes N und λ durch feste Indizes aus den ihnen zugeordneten Zeichenreihen ersetzt werden, deren Stellen korrespondieren oder nicht korrespondieren. Wir werden auch dieses Symbol bei allen vorkommenden Buchstabenreihen verwenden.

Durch (3) wird jedem Punkte der X_n eine *lokale Mannigfaltigkeit* zugeordnet mit einer in ihr definierten linearen homogenen Gruppe oder, was dasselbe ist, eine E_n (X_n mit einer gewöhnlichen affinen Geometrie).

Die Vektoren und Größen höheren Grades sind Systeme von Bestimmungszahlen, die sich eben bei dieser *lokalen* Gruppe in bestimmter von der Transformation der ξ^ν abhängiger Weise transformieren. Sind die Bestimmungszahlen einer Größe, z. B. v^ν, über X_n, definiert, d. h. also als Funktionen der ξ^ν gegeben, so spricht man von einem *Feld*. Bei der Transformation (1) betrachtet man die durch (4) gegebenen v^{N} als *neue* Bestimmungszahlen *desselben* Feldes. Die Transformation von v^ν zu v^{N} hat also nichts damit zu tun, wie die v^ν von den ξ^ν abhängen. Bei der Transformation (3) kann man dagegen neben v^ν ein neues Feld betrachten, dessen Bestimmungszahlen $'v^\nu$ sich in derselben Weise in den η^ν ausdrücken wie die v^ν in der ξ^ν. Man beweist leicht, daß die $'v^\nu$ sich beim Übergang von (ν) zu (N) wie die Bestimmungszahlen eines Vektors transformieren, und daß dasselbe für Größen beliebigen Grades gilt. Dieses Verfahren, das *Mitschleppen des Feldes* bei einer Transformation der Art (2) heißt, und das namentlich bei Variationsproblemen benutzt wird, ist grundverschieden von dem Verfahren, das von v^ν zu v^{N} führt.

Allgemeinere lokale Bezugssysteme.

Die bisherigen Begriffsbildungen lassen eine Verallgemeinerung zu, die sich in drei Stufen vollzieht:

1. Loslösung der lokalen Transformation von der Transformation der ξ^ν.

Die Transformationen der lokalen Gruppe, die im obigen Beispiel den Transformationen der ξ^ν in eindeutiger Weise zugeordnet waren, können ganz frei gemacht werden. Dies geschieht, indem statt des zu den ξ^ν gehörigen Systems (ν) ein System (k) von n beliebigen linear unabhängigen kontravarianten Vektoren $\underset{i}{e}^\nu$ und den zu diesen reziproken Vektoren $\overset{k}{e}_\lambda$ eingeführt wird, die sich in beliebiger von der Transformation der ξ^ν unabhängiger Weise transformieren in ein System (K), bestehend aus den Vektoren $\underset{I}{e}^\nu$ und $\overset{K}{e}_\lambda$. Werden die Bestimmungszahlen in bezug auf (k) bzw. (K) mit den laufenden Indizes $h, \ldots, m$ bzw. $H, \ldots, M$ versehen, so ist offenbar

$$(14)\qquad \begin{aligned} \underset{i}{e}^k &\stackrel{*}{=} \overset{k}{e}_i \stackrel{*}{=} \delta_i^k, \\ \underset{I}{e}^K &\stackrel{*}{=} \overset{K}{e}_I \stackrel{*}{=} \delta_I^K. \end{aligned}$$

Den *laufenden* Indizes $h, \ldots, m$ ordnen wir die *festen* Indizes aus der *vertikal* gedruckten Zahlenreihe $\mathsf{1}, \ldots, \mathsf{n}$ zu, den laufenden Indizes $H, \ldots, M$ dagegen die festen Indizes aus der Reihe $\bar{\mathsf{1}}, \ldots, \bar{\mathsf{n}}$. Die Beziehungen zwischen den Bestimmungszahlen in bezug auf (ν) und in bezug auf (k) ergeben

sich aus den Gleichungen

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} v^k &= v^\nu \overset{j}{e}_\nu \underset{j}{e}^k \overset{*}{=} v^\nu \overset{k}{e}_\nu, \\ w_i &= w_\lambda \underset{j}{e}^\lambda \overset{j}{e}_i \overset{*}{=} w_\lambda \overset{\lambda}{e}_i. \end{aligned}$$

Nicht stets läßt sich das System (k) mit einem System von Urvariablen ξ^k in Verbindung setzen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür lautet bekanntlich

$$\text{(16)} \qquad \partial_{[\mu} \overset{k}{e}_{\lambda]} = 0\,.$$

Im anderen Falle, den wir als den *nichtholonomen* bezeichnen, sollen die Bestimmungszahlen von $d\xi^\nu$ in bezug auf (k) geschrieben werden $(d\xi)^k$, da die ξ^k für sich keine Bedeutung haben und dieselbe Rolle spielen wie die nichtholonomen Parameter in der Mechanik.

2. Einführung mehrerer lokaler Mannigfaltigkeiten. Jedem Punkte der X_n werden mehrere lokale Mannigfaltigkeiten zugeordnet, jede mit ihrer eigenen affinen Gruppe.

Der einfachste Fall dieser Art tritt auf, wenn wir nicht (ν) durch (k) ersetzen, sondern (k) *neben* (ν) einführen. Die beiden lokalen Mannigfaltigkeiten fallen dann in einer einzigen E_n zusammen, aber in dieser E_n sind jetzt zwei Gruppen definiert, die von den Transformationen der ξ^ν abhängige zu (ν) gehörige und die von diesen Transformationen unabhängige die zu (k) gehört. Auch hier treten bei einer Größe höheren Grades *verbindende* Bestimmungszahlen auf, z. B. die des Einheitsaffinors

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} A_\lambda^k &= \overset{j}{e}_\lambda \underset{j}{e}^k \overset{*}{=} \overset{k}{e}_\lambda, \\ A_i^\nu &= \overset{j}{e}_i \underset{j}{e}^\nu \overset{*}{=} \underset{i}{e}^\nu, \end{aligned}$$

mit deren Hilfe sich die aller anderen Größen ableiten lassen, z. B.:

$$\text{(18)} \qquad v_{\lambda j}^{\cdot\cdot k} = v_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} A_{j\nu}^{\mu k} = v_{ij}^{\cdot\cdot k} A_\lambda^i.$$

Ein allgemeiner Fall, der in dieser Arbeit dauernd auftritt, entsteht, indem jedem Punkte der X_n außer der E_n der zu (ν) gehörigen Gruppe eine E_m, $m \neq n$, mit einer von den Transformationen der ξ^ν unabhängigen Gruppe zugeordnet wird. Es existieren dann drei Arten von Größen, die rein zu E_n bzw. E_m gehörigen und die *Verbindungsgrößen*, deren Indizes sich zum Teil auf (ν), zum Teil auf das in E_m gelegene Bezugssystem beziehen.

3. Übergang zu einer beliebigen Gruppe in der lokalen Mannigfaltigkeit. Bei dieser letzten Erweiterung kann von den betrachteten

Systemen von Bestimmungszahlen natürlich keine lineare homogene Transformation mehr verlangt werden. Das einfachste fast triviale Beispiel bildet das System der ξ^ν selbst, jedem Punkt der X_n ist jetzt die X_n selbst zugeordnet und die lokale Gruppe ist die Gruppe aller Transformationen (1). Wir wollen solche sich nicht linear homogen transformierende Systeme „geometrische Objekte“ [2]) nennen. Sie treten übrigens auch schon bei den lokalen E_n auf, das bekannteste Beispiel bilden wohl die Parameter $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ einer affinen Übertragung. Überall, wo in der Differentialgeometrie solche geometrische Objekte auftreten, ist das Bestreben bemerkbar, die Behandlung auf Systeme mit linear homogener Transformation [3]) zurückzuführen. In der affinen Geometrie geschieht dies durch Einführung der kovarianten Differentiation. In der verallgemeinerten projektiven und konformen Geometrie, wo jedem Punkte der X_n eine lokale X_n mit einer projektiven bzw. konformen Gruppe zugeordnet ist, erreicht man dasselbe Ziel durch Einführung überzähliger Koordinaten, wodurch die lokale X_n ersetzt wird durch eine E_N, $N > n$, mit einer mit den Transformationen der ξ^ν fest gekuppelten Gruppe und nachfolgender Einführung einer kovarianten Differentiation. Auch für geometrische Objekte halten wir uns an der Regel, daß der *Kernbuchstabe* bei Transformationen *fest* bleibt, während die neuen *laufenden Indizes* einer *anderen* Buchstabenreihe entnommen werden, z. B.:

$$\Gamma_{\Lambda M}^{N} = A_{\Lambda M \nu}^{\lambda \mu N} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + A_{\mu}^{N} \partial_{M} A_{\Lambda}^{\mu}. \tag{19}$$

Abdrosselung.

Aus den Urvariablen ξ^ν lassen sich n Skalarfelder $\overset{\nu}{\xi}$ bilden, die den ξ^ν numerisch gleich sind. Beim Übergang zu neuen Urvariablen bleiben die $\overset{\nu}{\xi}$ also als Skalar invariant, während die ξ^ν in ξ^N übergehen. Wir bringen dies zum Ausdruck durch die Gleichung

$$\overset{\nu}{\xi} \overset{*}{=} \xi^\nu. \tag{20}$$

Die ξ^ν sind nicht zu verwechseln mit den $\xi^\mu \overset{\nu}{e}_\mu$, die keine Skalare sind.

---

[2]) Veblen, der wohl zuerst nachdrücklich auf die Bedeutung dieser Systeme hingewiesen hat, prägte den Ausdruck „invariant“, den wir lieber durch „geometrical object“ ersetzen, zunächst mit Rücksicht darauf, daß die in einer differentialgeometrischen Untersuchung auftretenden Systeme dieser Art stets eine vom Bezugssysteme unabhängige geometrische Bedeutung haben, dann aber auch um falsche Assoziationen zu vermeiden, die bei der üblichen Bedeutung des Wortes „invariant“ leicht entstehen könnten.

[3]) Außer den Größen besitzen auch Größendichten und Pseudogrößen eine solche Transformation. Vgl. J. A. Schouten und V. Hlavaty, Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung, Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 414—432.

Es ist klar, daß die kovarianten Maßvektoren $\overset{\nu}{e}_\lambda$ aus den $\overset{\nu}{\xi}$ entstehen durch die kovariante Operation der Gradientbildung

$$\overset{\nu}{e}_\lambda = \partial_\lambda \overset{\nu}{\xi} \tag{21}$$

und daß man die kontravarianten Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}^{\nu}$ bekommt durch Division des Vektors $d\xi^\nu$ durch die Skalare $d\overset{\lambda}{\xi}$:

$$\underset{\lambda}{e}^{\nu} = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \overset{\lambda}{\xi}}. \tag{22}$$

Dividiert man schließlich die Skalare $d\overset{\nu}{\xi}$ durch die Skalare $d\overset{\lambda}{\xi}$, so entstehen die n^2 Skalare des Kroneckerschen Symbols:

$$\delta_\lambda^\nu = \frac{\partial \overset{\nu}{\xi}}{\partial \overset{\lambda}{\xi}}. \tag{23}$$

Die Gleichungen (21) bis (23) zeigen zusammen mit

$$A_\lambda^\nu = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^\lambda} \tag{24}$$

den Unterschied zwischen den vier in den Gleichungen (5), (6) auftretenden Symbolen, deren Transformationsweise in der Tabelle (12) übersichtlich dargestellt wurde.

Den Übergang von ξ^ν zu $\overset{\nu}{\xi}$ nennen wir *Abdrosseln* des Index ν. In derselben Weise nennen wir den Übergang einer Größe oder eines geometrischen Objektes mit p Indizes zu den n^p Skalaren, die den Bestimmungszahlen in bezug auf die zu diesen Indizes gehörigen Bezugssysteme gleich sind, *Abdrosseln* der Indizes in bezug auf diese Systeme und geben diese Abdrosselung an durch Überführung der betreffenden Indizes nach den Stellen oben und unter dem Kernbuchstaben, z. B.

$$\begin{aligned}
&\underset{\lambda\mu}{\Gamma} \overset{*}{=} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}. \\
&\underset{\lambda}{\overset{\nu}{A}} = \delta_\lambda^\nu \overset{*}{=} A_\lambda^\nu, \\
&\underset{\lambda}{\overset{\nu}{e}} = \delta_\lambda^\nu \overset{*}{=} \overset{\nu}{e}_\lambda \overset{*}{=} \underset{\lambda}{e}^{\nu}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Es ist klar, daß Abdrosselung der Indizes *bei einer Größe* (aber *nicht* bei einem allgemeinen geometrischen Objekt) erreicht werden kann durch Überschiebung mit allen möglichen Kombinationen von geeignet gewählten Maßvektoren, z. B.

$$\underset{\lambda\mu}{\overset{\nu}{v}} = v_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \underset{\lambda}{e}^{\alpha}\, \underset{\mu}{e}^{\beta}\, \overset{\nu}{e}_{\gamma} \tag{26}$$

und rückgängig gemacht werden kann durch Multiplikation der gewonnenen Skalare mit geeigneten Maßvektoren und Addition, z. B.

$$v_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{\gamma} = \overset{\nu}{\underset{\lambda\mu}{v}}\, \overset{\lambda}{e}_{\alpha}\, \overset{\mu}{e}_{\beta}\, \underset{\nu}{e}{}^{\gamma}. \tag{27}$$

Von diesem Umstande kann man Gebrauch machen, um für *Größen* die Abdrosselung eines einzigen oder einiger Indizes zu definieren. Darunter wird dann verstanden die Überschiebung jedes abzudrosselnden kontra- bzw. kovarianten Index mit den n ko- bzw. kontravarianten Maßvektoren, die den Urvariablen des Index angehören, z. B.

$$\underset{\lambda\mathrm{M}}{v}{}_{\cdot\cdot}{}^{\nu} = v_{\alpha\mathrm{B}}{}^{\nu}\, \underset{\lambda}{e}{}^{\alpha}\, \underset{\mathrm{M}}{e}{}^{\mathrm{B}}. \tag{28}$$

Auch diese Abdrosselung läßt sich rückgängig machen, z. B.

$$v_{\dot{\alpha}\dot{\mathrm{B}}}{}^{\nu} = \underset{\lambda\mathrm{M}}{v}{}_{\cdot\cdot}{}^{\nu}\, \overset{\lambda}{e}_{\alpha}\, \overset{\mathrm{M}}{e}_{\mathrm{B}}. \tag{29}$$

Es ist klar, daß eine kovariante Gleichung bei Abdrosselung eines Index oder einiger Indizes die Eigenschaft des Kovariantseins behält.

Verwendete Indizes.

Wir geben hier schließlich noch eine Übersicht über die verwendeten Buchstabenreihen und Zeichenreihen für die laufenden bzw. festen Indizes:

	laufende Indizes	feste Indizes
(30)	$\alpha, \ldots, \omega$	$1, \ldots, n$
	$\mathrm{A}, \ldots, \Omega$	$\bar{1}, \ldots, \bar{n}$
	$h, \ldots, m$	$\mathrm{1}, \ldots, \mathrm{n}$
	$H, \ldots, M$	$\bar{\mathrm{1}}, \ldots, \bar{\mathrm{n}}$
	$a, \ldots, g$	$\mathrm{1}, \ldots, \mathrm{m}$
	$A, \ldots, G$	$\bar{\mathrm{1}}, \ldots, \bar{\mathrm{m}}$
	$p, \ldots, w$	$m+1, \ldots, n$
	$P, \ldots, W$	$\overline{m+1}, \ldots, \bar{n}$

Theoretisch ist man natürlich vollständig frei in der Wahl der laufenden Indizes innerhalb der angenommenen Buchstabenreihe. Die Lesbarkeit der Formeln und die Wahrscheinlichkeit, Fehler zu vermeiden bzw. noch zeitig zu entdecken, werden aber beide sehr erhöht, wenn man diese Freiheit, die für jeden besonderen Fall natürlich aufrechterhalten werden muß, für sehr oft vorkommende Fälle etwas einschränkt. Es empfiehlt sich dabei, im griechischen Alphabet *im allgemeinen* ν zu bevorzugen für den kontravarianten Index, λ für den kovarianten, μ für die erste kovariante Diffe-

rentiation, ω für die zweite und ξ für die dritte. Man schreibe also z. B.

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda \tag{31}$$

und nicht etwa

$$\nabla_\nu v^\lambda = \partial_\nu v^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v^\mu, \tag{32}$$

was zu vielen Verwirrungen und Druckfehlern Anlaß geben würde. Die entsprechenden Indizes in den anderen Buchstabenreihen ergeben sich aus folgender Tabelle:

(33)

	kontr.	kov.	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.
(ν)	ν	λ	μ	ω	ξ
(N)	N	Λ	M	Ω	Ξ
(k)	k	i	j	l	h
(K)	K	I	J	L	H
(c)	c	a	b	d	e
(C)	C	A	B	D	E

§ 2.

Die in X_n eingebettete und eingespannte X_n^m.

In der X_n sei eine X_m mit den Urvariablen η^c, $a, \ldots, g = 1, \ldots, m$ „eingebettet" mittels der Gleichungen

$$\xi^\nu = \xi^\nu(\eta^c), \tag{34}$$

bei welchen wir die Stetigkeitsbedingungen am Anfang des § 1 in Erinnerung bringen. Etwaige neue Urvariablen in X_n bzw. X_m seien ξ^{N} bzw. η^{C}. Jedem Punkte der X_m ist dann eine lokale E_n mit dem Bezugssystem (ν) der Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}{}^\nu$, $\overset{\nu}{e}_\lambda$, und eine lokale E_m mit dem Bezugssystem (c) der Maßvektoren $\underset{a}{e}{}^c$, $\overset{c}{e}_a$ zugeordnet. Dementsprechend gibt es in diesem Punkte den Einheitsaffinor A^ν_λ der X_n, den Einheitsaffinor B^c_a der X_m und die Verbindungsgröße

$$\overline{B}{}^\nu_a = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^a} \tag{35}$$

mit der Transformationsweise

$$\overline{B}{}^{\mathrm{N}}_A = A^{\mathrm{N}}_\nu B^a_A \overline{B}{}^\nu_a . \tag{36}$$

Durch Abdrosselung entstehen aus dieser Größe zunächst die m kontravarianten Vektoren der X_m

$$\underset{a}{\overline{e}}{}^\nu = \underset{a}{\overline{B}}{}^\nu = \overline{B}{}^\nu_b \underset{a}{e}{}^b = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \overset{a}{\eta}}, \tag{37}$$

die in jedem Punkte der X_n einerseits eine m-Richtung bestimmen, die wir *die m-Richtung der* X_m nennen, und anderseits eine in der lokalen E_n gelegene E_m, die wir zur Unterscheidung von der lokalen E_m der X_m mit $\overline{E}_m$ bezeichnen. Ferner entstehen die n kovarianten Vektoren

(38) $$\overset{\nu}{\overline{B}}_a = \frac{\partial \overset{\nu}{\xi}}{\partial \eta^a}$$

der X_m. Aus (35) und (37) folgt, daß $\overline{B}_a^\nu$ sich folgendermaßen in den Maßvektoren $\overset{c}{e}$ und $\underset{a}{\overline{e}}$ ausdrücken läßt

(39) $$\boxed{\overline{B}_a^\nu = \overset{b}{e}_a \underset{b}{\overline{e}}^\nu}\,.$$

Jedem Linienelement $d\eta^c$ der X_m in der lokalen E_m der X_m ist das Linienelement

(40) $$d\xi^\nu = \overline{B}_a^\nu d\eta^a$$

der X_n in der lokalen $\overline{E}_m$ zugeordnet. Man kann nun das System (c) auch in jedem Punkte beliebig wählen und sich beliebig linear homogen transformieren lassen ohne Bezugnahme auf irgendwelche Urvariablen der X_m. In den Formeln (35) bis (38) ist dann nur $\partial\eta^c$ durch $(\partial\eta)^c$ und $d\eta^c$ durch $(d\eta)^c$ zu ersetzen, da die η^c im allgemeinen nichtholonome Parameter werden. Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen, überhaupt auf eine Gleichung der Form (34) verzichten und statt dessen von der Gleichung (40) mit $(d\eta)^a$ statt $d\eta^a$ ausgehen, wo die Größe $\overline{B}_a^\nu$, die den Rang m haben soll, jetzt über X_n gegeben ist und die $(d\eta)^c$ im allgemeinen keine exakten Differentiale darstellen. Die sich beliebig linear homogen transformierenden $(d\eta)^c$ lassen sich als Bestimmungszahlen eines Vektors in einer E_m auffassen, und die $\overline{B}_a^\nu$ bestimmen eine E_m in der lokalen E_n, die mit $\overline{E}_m$ bezeichnet werden mag. An den Gleichungen (35) bis (40) ändert dies nichts, nur sind die $d\eta^c$ und $\partial\eta^c$ durch $(d\eta)^c$ bzw. $(\partial\eta)^c$ zu ersetzen und es ist zu beachten, daß der Definitionsbereich der $\overline{B}_a^\nu$ jetzt im allgemeinen n-dimensional ist. Die X_m ist in dieser Weise ersetzt durch eine in jedem Punkte mit einer m-Richtung ausgestatteten X_n, die *eine in X_n eingebettete X_n^m* heißen soll. Werden die m-Richtungen X_m bildend, so geht die X_n^m auf ein System von ∞^{n-m} X_m zurück, und wird der Definitionsbereich der m-Richtungen genügend eingeschränkt, so entsteht der Fall der einzelnen X_m.

Wir betrachten den allgemeinsten Fall der X_n^m in X_n. Die schon bei den Linienelementen zur Sprache gebrachte Korrespondenz zwischen der lokalen E_m und der lokalen $\overline{E}_m$ äußert sich auch darin, daß jedem kontravarianten Vektor v^c der X_n^m stets in eindeutiger Weise ein kontravarianter

Vektor $\bar{v}^\nu$ der X_n

(41) $$\bar{v}^\nu = \bar{B}_b^\nu v^b$$

zugeordnet ist. Den Vektoren $\underset{a}{e}^c$ entsprechen dabei nach (37) die Vektoren $\underset{a}{\bar{e}}^\nu$. Umgekehrt korrespondiert mit einem kontravarianten Vektor $\bar{v}^\nu$ der X_n dann und nur dann ein einziger Vektor der X_n^m, wenn es einen Vektor v^c gibt, der der Gleichung (41) genügt. Da diese Gleichung sich infolge (37) auch schreiben läßt

(42) $$\bar{v}^\nu = \overset{b}{v}\, \underset{b}{\bar{e}}^\nu,$$

ist dies dann und nur dann der Fall, wenn $\bar{v}^\nu$ zur $\bar{E}^m$ gehört. Die Korrespondenz zwischen den kontravarianten Vektoren der E_m und der $\bar{E}_m$ ist also eine eineindeutige. Von einem Vektor $\bar{v}^\nu$, der zur $\bar{E}_m$ gehört, wollen wir sagen, daß er *in der X_n^m liegt*.

Jedem kovarianten Vektor w_λ der X_n ist dagegen stets in eindeutiger Weise ein kovarianter Vektor $'w_a$ der X_n^m zugeordnet:

(43) $$'w_a = \bar{B}_a^\mu w_\mu.$$

Dieser Vektor wird dann und nur dann Null, wenn die $(n-1)$-Richtung von w_λ die m-Richtung von X_n^m enthält. Aus der Gleichung

(44) $$\overset{\nu}{B}_a = \bar{B}_a^\mu \overset{\nu}{e}_\mu$$

folgt, daß die $\overset{\nu}{B}_a$ mit den kovarianten Maßvektoren $\overset{\nu}{e}_\lambda$ korrespondieren. Umgekehrt ist einem kovarianten Vektor $'w_a$ der X_n^m *kein* kovarianter Vektor der X_n zugeordnet.

Wir machen jetzt von der eineindeutigen Korrespondenz zwischen der E_m und der $\bar{E}_m$ Gebrauch, indem wir die korrespondierenden kontravarianten Vektoren identifizieren und also $\bar{v}^\nu$ und v^c auffassen als Bestimmungszahlen einer und derselben Größe, die sich sowohl als Vektor der X_n als auch als Vektor der X_n^m auffassen läßt. Dementsprechend heben wir den Unterschied in den Kernbuchstaben auf und schreiben von jetzt an v^ν statt $\bar{v}^\nu$. Diese Identifizierung wird geometrisch nahegelegt durch den Umstand, daß sich $d\xi^\nu$ und $d\eta^a$ in (40) auffassen lassen als Bestimmungszahlen desselben Linienelementes, das sowohl in der X_n als in der X_n^m liegt. *Nach* dieser Identifizierung von E_m und $\bar{E}_m$ erhält jetzt (43) folgende geometrische Deutung. Der durch zwei parallele E_{m-1} in E_m darstellbare Vektor $'w_a$ entsteht aus dem durch zwei parallele E_{n-1} in E_n darstellbaren Vektor w_λ durch Schnitt mit E_m.

Aus dieser *ersten Identifizierung* folgt bei Anwendung auf B_a^c

(45) $$B_a^\nu = \bar{B}_b^\nu B_a^b = \bar{B}_a^\nu,$$

wodurch $\bar{B}$ und B identifiziert werden und bei Anwendung auf $\underset{a}{e}^c$

(46) $$\underset{a}{e}^\nu = \underset{a}{\bar{e}}^\nu,$$

woraus sich Identifizierung von $\underset{a}{e}$ und $\underset{a}{\bar{e}}$ ergibt. Die Kernbuchstaben $\bar{B}$ und $\underset{a}{\bar{e}}$ verschwinden von hieran aus der Rechnung, (41) geht also über in

(47) $$\boxed{v^\nu = B_b^\nu v^b}$$

und (43) in

(48) $$\boxed{{}'w_a = B_a^\mu w_\mu}$$

Weitere Vereinfachungen ergeben sich erst, wenn die X_n^m *eingespannt* wird, d. h. jedem Punkte der X_n eine $(n-m)$-Richtung zugeordnet wird, die keine Richtung mit der m-Richtung der X_n^m gemeinschaftlich hat. Dies kann geschehen durch Festlegung von m unabhängigen kovarianten Vektoren $\overset{c}{e}_\lambda$, deren $(n-1)$-Richtung die m-Richtung der X_n^m nicht enthält, in jedem Punkte der X_n. Diese $\overset{c}{e}_\lambda$ können unter sich beliebig linear homogen transformiert werden. Die $\overset{c}{e}_\lambda$ können also durch Abdrosselung entstehen aus einer Verbindungsgröße $\underline{B}_\lambda^c$ m-ten Ranges, die mit dem unteren Index in der X_n, mit dem oberen in der zu diesen Transformationen gehörigen E_m liegt:

(49) $$\overset{c}{e}_\lambda = \underline{B}_\lambda^b \overset{c}{e}_b, \qquad \text{(vgl. (37))},$$

(50) $$\boxed{\underline{B}_\lambda^c = \overset{b}{e}_\lambda \underset{b}{e}^c} \qquad \text{(vgl. (39))}.$$

Die Maßvektoren $\overset{c}{e}_b$ und $\underset{b}{e}^c$ dieser E_m hier sind natürlich im allgemeinen nicht identisch mit den in (37) und (39) auftretenden Maßvektoren der dort eingeführten E_m, sie werden aber identisch, und es fallen somit die beiden E_m zusammen, sobald man die Transformationen der $\overset{c}{e}_\lambda$ mit denen der $\underset{a}{\bar{e}}^\nu$ kuppelt, indem die $\overset{c}{e}_\lambda$ so gewählt werden, daß

(51) $$\overset{c}{e}_\mu \underset{a}{\bar{e}}^\mu = \delta_a^c.$$

Dies bedeutet geometrisch, daß die Schnitte der $\overset{c}{e}_\lambda$ mit der lokalen E_m der $\underset{a}{e}^\nu$ die Doppel-E_{m-1} des Parallelepipeds der $\underset{a}{e}^\nu$ sind.

Wir machen jedoch vorläufig von dieser Kupplung noch keinen Gebrauch und gehen von (50) aus, dabei sogar noch vollständig außer acht lassend, daß außer der $(n-m)$-Richtung in jedem Punkte der X_n noch eine m-Richtung definiert ist. Es ergibt sich dann eine Gedankenreihe, die zu der von (39) ausgehenden vollkommen dualistisch ist. Neben der

E_m der $\underset{a}{e}^c$ in (50), die jetzt noch nichts mit der E_m der $(d\eta)^c$ zu tun hat, existiert die m-dimensionale Gesamtheit der linear aus den $\overset{c}{\underline{e}}_\lambda$ ableitbaren Vektoren, die sich in eineindeutiger Weise abbildet auf die kovarianten Vektoren derjenigen E_m, die aus der E_n durch Zusammenlegung nach der $(n-m)$-Richtung der Einspannung entsteht. Diese letzte E_m soll zur Unterscheidung mit $\underline{E}_m$ bezeichnet werden. Jedem kovarianten Vektor w_a der E_m ist stets in eindeutiger Weise ein kovarianter Vektor $\underline{w}_\lambda$ der X_n zugeordnet:

$$\underline{w}_\lambda = \underline{B}_\lambda^b w_b \qquad (52) \quad \text{(vgl. (41)).}$$

Den Vektoren $\overset{c}{e}_a$ entsprechen dabei nach (49) die Vektoren $\overset{c}{\underline{e}}_\lambda$. Umgekehrt korrespondiert mit einem kovarianten Vektor $\underline{w}_\lambda$ der X_n dann und nur dann ein einziger Vektor der E_m, wenn es einen Vektor w_c gibt, der der Gleichung (52) genügt. Da diese Gleichung sich auch schreiben läßt

$$\underline{w}_\lambda = \overset{b}{\underline{e}}_\lambda \underset{b}{w} \qquad (53) \quad \text{(vgl. (42)),}$$

ist dies dann und nur dann der Fall, wenn $\underline{w}_\lambda$ zur $\underline{E}_m$ gehört. Die Korrespondenz zwischen den kovarianten Vektoren der E_m und der $\underline{E}_m$ ist also eine eineindeutige. Von einem kovarianten Vektor $\underline{w}_\lambda$, der zur $\underline{E}_m$ gehört, wollen wir sagen, daß er *in der* X_n^m *liegt*.

Jedem kontravarianten Vektor v^ν der X_n ist dagegen stets in eindeutiger Weise ein kontravarianter Vektor der E_m zugeordnet:

$$'v^c = \underline{B}_\mu^c v^\mu \qquad (54) \quad \text{(vgl. (43)).}$$

Dieser Vektor wird dann und nur dann Null, wenn v^ν in der $(n-m)$-Richtung der Einspannung liegt. Aus der Gleichung

$$\underline{B}_\lambda^c = \underline{B}_\mu^c \underset{\lambda}{e}^\mu \qquad (55) \quad \text{(vgl. (44))}$$

folgt, daß die $\underset{\lambda}{\underline{B}}^c$ mit den kontravarianten Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}^\nu$ korrespondieren. Umgekehrt ist einem kontravarianten Vektor $'v^c$ der E_m kein kontravarianter Vektor der X_n zugeordnet. Wir machen jetzt von der eineindeutigen Korrespondenz zwischen der E_m und der $\underline{E}_m$ Gebrauch, indem wir die korrespondierenden kovarianten Vektoren identifizieren und also sowohl $\underline{w}_\lambda$ als w_a auffassen als Bestimmungszahlen einer und derselben Größe, die sich sowohl als Vektor der X_n als auch als Vektor der E_m auffassen läßt. Dementsprechend schreiben wir von jetzt an w_λ statt $\underline{w}_\lambda$. Nach Identifizierung von E_m und $\underline{E}_m$ erhält jetzt (54) folgende Bedeutung. Der durch zwei Punkte in E_m darstellbare Vektor $'v^c$ entsteht aus dem durch zwei Punkte in E_n darstellbaren Vektor v^ν, indem die beiden letzten Punkte mit der $(n-m)$-Richtung der Einspannung zwei E_{n-m} bestimmen, die bei der Zusammenlegung Punkte der E_m werden.

Aus dieser *zweiten Identifizierung* folgt bei Anwendung auf B^c_a

$$B^c_\lambda = \underline{B}^b_\lambda B^c_b = \underline{B}^c_\lambda \tag{56}$$ (vgl. (45)),

wodurch $\underline{B}$ und B identifiziert werden, und bei Anwendung auf $\overset{c}{e}_a$

$$\overset{c}{e}_\lambda = \overset{c}{\underline{e}}_\lambda \tag{57}$$ (vgl. (46)),

woraus sich die Identifizierung von $\overset{c}{e}$ und $\overset{c}{\underline{e}}$ ergibt. Die Kernbuchstaben $\underline{B}$ und $\overset{c}{\underline{e}}$ verschwinden von hieran aus der Rechnung. (52) geht also über in

$$\boxed{w_\lambda = B^b_\lambda w_b} \tag{58}$$ (vgl. (47))

und (54) in

$$\boxed{'v^c = B^c_\mu v^\mu} \tag{59}$$ (vgl. (48)).

Erst jetzt führen wir die Gleichung (51) ein, die die beiden Gedankenreihen, ausgehend von (39) bzw. (50), kuppelt. Aus (51), (45) und (56) ergibt sich dann:

$$\boxed{B^{\mu c}_{a \mu} = B^c_a}\,. \tag{60}$$

Aus (47) und (58):

$$\boxed{B^\nu_\lambda = B^\nu_b B^b_\lambda}\,. \tag{61}$$

Aus (61) und (47) bzw. (58) folgen:

$$\boxed{v^c = B^c_\mu v^\mu}\,, \tag{62}$$

$$\boxed{w_a = B^\mu_a w_\mu} \tag{63}$$ (vgl. (62)).

Schließlich folgt aus (60) und (61)

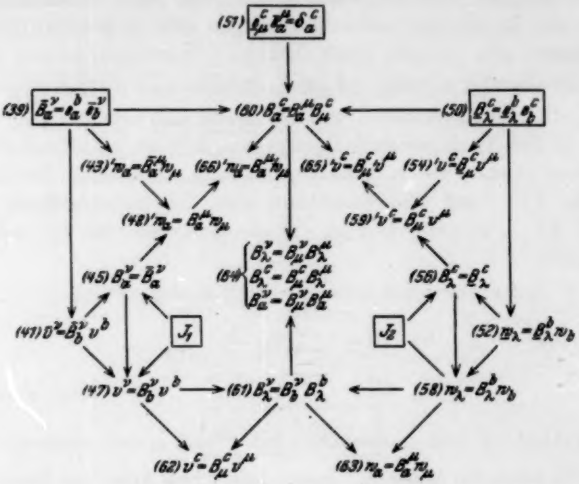
$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad B^\nu_\lambda = B^\nu_\mu B^\mu_\lambda, \\ &\text{b)}\quad B^c_\lambda = B^c_\mu B^\mu_\lambda, \\ &\text{c)}\quad B^\nu_a = B^\nu_\mu B^\mu_a. \end{aligned} \tag{64}$$

Nachstehendes Schema*) erleichtert die Übersicht und gibt an, wie die verschiedenen Formeln aus den drei Voraussetzungen (39), (50), (51) und den beiden Identifizierungen I_1 und I_2 folgen.

Für den Fall, daß v^ν bzw. w_λ in der X^m_n liegt (vgl. S. 763 und 765) und also ein Vektor v^c bzw. w_a der X^m_n existieren muß, der der Gleichung (47)

*) In dem Schema sind in den Formeln (39) und (50) die Indizes b und in (51 die Indizes a und c links zu weit nach rechts eingezeichnet.

bzw. (58) genügt, liefert nun (62) bzw. (63) das Mittel, diesen Vektor in v^ν bzw. w_λ auszudrücken. Liegt v^ν bzw. w_λ nicht in der X_n^m, so läßt sich mit Hilfe von (59) bzw. (48) ein Vektor $'v^c$ bzw. $'w_a$ konstruieren, dessen



Bestimmungszahlen $'v^\nu$ bzw. $'w_\lambda$ aus (47) bzw. (58) folgen. Anwendung von (62) bzw. (63) ergibt dann

(65) $$'v^c = B_\nu^c v^\nu = B_\nu^c \, 'v^\nu$$

bzw.

(66) $$'w_a = B_a^\lambda w_\lambda = B_a^\lambda \, 'w_\lambda ,$$

woraus hervorgeht, daß v^ν bzw. w_λ sich zerlegen läßt in eine Komponente $'v^\nu$ bzw. $'w_\lambda$, die in der X_n^m liegt, und eine Komponente, die in der $(n-m)$-Richtung der Einspannung liegt bzw. die m-Richtung der X_n^m enthält. Wir nennen dementsprechend von jetzt an $'v^\nu = B_\mu^\nu v^\mu$ bzw. $w_\lambda = B_\lambda^\mu w_\mu$ *die* X_n^m*-Komponente* von v^ν bzw. w_λ. Zusammenfassend haben wir also jetzt folgendes erreicht. Es gibt beliebige kontra- bzw. kovariante Vektoren der X_n und solche, die *in der* X_n^m *liegen*. Jeder in der X_n^m liegende Vektor besitzt sowohl Bestimmungszahlen mit den Indizes $\alpha, \ldots, \omega$, als solche mit den Indizes $a, \ldots, g$. Den Übergang zwischen beiden Arten von Bestimmungszahlen geben die Formeln (47), (62) bzw. (58), (63). Beliebige Vektoren der X_n besitzen dagegen keine Bestimmungszahlen mit den Indizes $a, \ldots, g$. Sagen wir von einer Größe der X_n, daß sie *an der Stelle eines bestimmten Index in* X_n^m *liegt*, wenn sie sich an dieser Stelle mit B_λ^ν überschoben nicht ändert, so folgt die Regel:

Eine Größe der X_n kann Bestimmungszahlen haben, die an einer bestimmten Stelle einen Index der Reihe $a, \ldots, h$ tragen, wenn sie an dieser Stelle in der X_n^m liegt.

Ein Beispiel gibt die Größe B, die vier Arten Bestimmungszahlen besitzt: B_λ^ν, B_a^ν, B_λ^c, B_a^c, deren Beziehungen sich in (60), (61) und (64) ausdrücken.

Nach der Einspannung ist jedem Punkte eine m-Richtung und eine $(n-m)$-Richtung zugeordnet, und das Ganze läßt sich also auch auffassen als eine in der X_n eingebettete eingespannte $X_n^{m'}$, wo einfachheitshalber m' geschrieben ist statt $n-m$. Führt man nun genau dieselben Betrachtungen für diese $X_n^{m'}$ durch und bezeichnet man den Einheitsaffinor der $X_n^{m'}$ mit C_p^r, $p, \ldots, w = m+1, \ldots, n$, so ergeben sich für C_p^ν und C_λ^r die Gleichungen

$$(67)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad C_p^\nu = \overset{q}{e}_p \underset{q}{e}^\nu; \qquad C_\lambda^r = \underset{q}{e}^r \overset{q}{e}_\lambda, \\ &\text{b)}\quad C_p^r = C_\mu^{r\,\mu}{}_p = \underset{q}{e}^r \overset{q}{e}_p, \\ &\text{c)}\quad C_\lambda^\nu = C_q^{\nu q}{}_\lambda = \underset{q}{e}^\nu \overset{q}{e}_\lambda, \end{aligned}$$

wo die Vektoren $\underset{q}{e}^\nu$ und $\overset{q}{e}_\lambda$ zusammen mit $\underset{a}{e}^\nu$ und $\overset{c}{e}_\lambda$ zwei reziproke Systeme bilden. Vektoren, die in der $X_n^{m'}$ liegen, haben zwei Arten von Bestimmungszahlen, deren Beziehungen folgendermaßen lauten:

$$(68)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad v^\nu = C_r^\nu v^r; \qquad v^r = C_\nu^r v^\nu, \\ &\text{b)}\quad w_\lambda = C_\lambda^p w_p; \qquad w_p = C_p^\lambda w_\lambda, \end{aligned}$$

und der Zusammenhang zwischen A, B und C ist gegeben durch die Formel

$$(69)\qquad A_\lambda^\nu = B_\lambda^\nu + C_\lambda^\nu.$$

Ferner gilt die Regel:

Eine Größe kann dann und nur dann Bestimmungszahlen haben, die an einer bestimmten Stelle einen Index der Reihe $p, \ldots, w$ tragen, wenn sie an dieser Stelle in der $X_n^{m'}$ liegt.

Jedem Punkte der X_n sind also jetzt eine E_n, eine E_m und eine $E_{m'}$ zugeordnet, und es gibt

1. Größen der X_n mit Indizes aus den Reihen $\alpha, \ldots, \omega$;

2. Größen der X_n^m mit Indizes aus den Reihen $\alpha, \ldots, \omega$ und $a, \ldots, g$;

3. Größen der $X_n^{m'}$ mit Indizes aus den Reihen $\alpha, \ldots, \omega$ und $p, \ldots, w$;

4. Verbindungsgrößen, die überall Indizes aus der Reihe $\alpha, \ldots, \omega$ tragen können, und an den Stellen, wo sie in X_n^m bzw. $X_n^{m'}$ liegen, auch Indizes aus den Reihen $a, \ldots, g$ bzw. $p, \ldots, w$.

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, wo die Einspannung zustande kommt durch einen in der X_n gegebenen Fundamentaltensor $a_{\lambda\mu}$. Die X_n wird zur V_n und die $(n-m)$-Richtung der Einspannung ist die zur m-Richtung der X_n^m in bezug auf den eingeführten Fundamentalsensor orthogonale. Eine mit einer quadratischen Maßbestimmung ausgestattete X_n^m wird mit V_n^m bezeichnet. Es muß dann möglich sein, aus B_a^ν und $a_{\lambda\mu}$ allein die B_λ^c und B_λ^ν zu bilden. Zunächst bilden wir den Fundamentaltensor der V_n^m:

$$\boxed{b_{ab} = B_{ab}^{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}}. \tag{70}$$

Aus der Gleichung

$$\boxed{B_a^\lambda C_p^\mu a_{\lambda\mu} = 0}, \tag{71}$$

die die Orthogonalität der Einspannung zum Ausdruck bringt, (69) und (70) folgt dann

$$B_a^\lambda A_\omega^\mu a_{\lambda\mu} = B_a^\lambda B_\omega^\mu a_{\lambda\mu} = B_\omega^b b_{ab}, \tag{72}$$

woraus hervorgeht

$$\boxed{B_\lambda^c = b^{cb} B_b^\mu a_{\lambda\mu}} \tag{73}$$

und

$$\boxed{B_\lambda^\nu = B_{ab}^{\nu\mu} b^{ab} a_{\lambda\mu}}. \tag{74}$$

In derselben Weise gilt für den Fundamentaltensor c_{pq} der $V_n^{m'}$:

$$\boxed{c_{pq} = C_{pq}^{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}}, \tag{75}$$

sowie die aus (71) und (75) folgenden Gleichungen

$$C_\mu^q c_{pq} = C_p^\lambda a_{\lambda\mu}, \tag{76}$$

$$\boxed{C_\lambda^r = c^{rq} C_q^\mu a_{\lambda\mu}}, \tag{77}$$

$$\boxed{C_\lambda^\nu = C_{pq}^{\nu\mu} c^{pq} a_{\lambda\mu}}. \tag{78}$$

§ 3.

Induzierte Übertragung in einer in L_n eingespannten X_n^m.

Durch Einführung einer linearen Übertragung mit den Parametern $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$

$$\delta v^\nu = dv^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu v^\lambda d\xi^\mu \tag{79}$$

werde die X_n zur L_n. In bezug auf das nichtholonome Bezugssystem (k) des vorigen Paragraphen lautet die Übertragungsgleichung

$$(80) \qquad \delta v^k = d v^k + \Gamma_{ij}^k v^i (d\xi)^j$$

mit der Transformationsgleichung

$$(81) \qquad \Gamma_{ij}^k = A_{i\,j\,\nu}^{\lambda\mu k} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + A_\mu^k \partial_j A_i^\mu .$$

Liegen v^ν und $d\xi^\nu$ in X_n^m, so ist durch die X_n^m-Komponente von δv^ν eine Übertragung in X_n^m gegeben, die sogenannte *induzierte* Übertragung. Eine X_n^m mit einer in ihr gegebenen linearen Übertragung heiße L_n^m. Dasselbe gilt für die $X_n^{m'}$. Wir gehen jetzt einen Schritt weiter, legen v^ν in X_n^m und w^ν in $X_n^{m'}$ und betrachten stets nur die Komponente des Differentials in der zum Felde gehörigen Mannigfaltigkeit. Es entstehen dann zwei kovariante Differentiale:

$$(82) \qquad \begin{aligned} &\alpha) \quad \overset{m}{\delta} v^c = d v^c + \Gamma_{ab}^c v^a (d\xi)^b, \\ &\beta) \quad \overset{m}{\delta} w^r = d w^r + \Gamma_{pb}^r w^p (d\xi)^b, \\ &\gamma) \quad \overset{m'}{\delta} v^c = d v^c + \Gamma_{aq}^c v^a (d\xi)^q, \\ &\delta) \quad \overset{m'}{\delta} w^r = d w^r + \Gamma_{pq}^r w^p (d\xi)^q, \end{aligned}$$

und zu jedem ein kovariantes Differentialquotient:

$$(83) \qquad \begin{aligned} &\alpha) \quad \overset{m}{\nabla}_b v^c = B_{b\,\nu}^{\mu c} \nabla_\mu v^\nu \; = \partial_b v^c + \Gamma_{ab}^c v^a, \\ &\beta) \quad \overset{m}{\nabla}_b w^r = B_b^\mu C_\nu^r \nabla_\mu w^\nu = \partial_b w^r + \Gamma_{pb}^r w^p, \\ &\gamma) \quad \overset{m'}{\nabla}_q v^c = C_q^\mu B_\nu^c \nabla_\mu v^\nu = \partial_q v^c + \Gamma_{aq}^c v^a, \\ &\delta) \quad \overset{m'}{\nabla}_q w^r = C_{q\,\nu}^{\mu r} \nabla_\mu w^\nu \; = \partial_q w^r + \Gamma_{pq}^r w^p. \end{aligned}$$

Beide lassen sich auch mit griechischen Indizes schreiben:

$$(84) \qquad \begin{aligned} &\alpha) \quad \overset{m}{\nabla}_\mu v^\nu = B_{\mu\,c}^{b\nu} \overset{m}{\nabla}_b v^c, \\ &\beta) \quad \overset{m}{\nabla}_\mu w^\nu = B_\mu^b C_r^\nu \overset{m}{\nabla}_b w^r, \\ &\gamma) \quad \overset{m'}{\nabla}_\mu v^\nu = C_\mu^q B_c^\nu \overset{m'}{\nabla}_q v^c, \\ &\delta) \quad \overset{m'}{\nabla}_\mu w^\nu = C_{\mu\,r}^{q\nu} \overset{m'}{\nabla}_q w^r. \text{ [4]} \end{aligned}$$

---

[4]) Es ist zu beachten, daß, nach unseren Voraussetzungen über den Gebrauch der Indizes, Ausdrücke wie δv^c oder $\nabla_b v^c$ sinnlos sind, da δv^ν und $\nabla_\mu v^\nu$ nicht in X_n^m liegen. Gerade aus diesem Grunde müssen hier neue Differentiationssymbole eingeführt werden.

Aus (84α) ergibt sich

$$B_{\mu}^{\beta} \nabla_{\beta} v^{\nu} = \overset{m}{\nabla}_{\mu} v^{\nu} + v^{\lambda} \overset{m}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}, \tag{85}$$

und ebenso

$$B_{\mu}^{\beta} \nabla_{\beta} v_{\lambda} = \overset{m}{\nabla}_{\mu} v_{\lambda} + v_{\nu} \overset{m}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu}, \tag{86}$$

wo

$$(87)\qquad \begin{aligned} &\alpha) \quad \overset{m}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = - B_{\mu\lambda}^{\beta\alpha} \nabla_{\beta} C_{\alpha}^{\nu} = B_{\mu\lambda}^{\beta\alpha} \nabla_{\beta} B_{\alpha}^{\nu} = - B_{\mu\lambda}^{\beta\alpha} (\nabla_{\beta} \overset{q}{e}_{\alpha}) \underset{q}{e}^{\nu}, \\ &\beta) \quad \overset{m}{L}{}_{\mu\cdot\nu}^{\cdot\nu} = - B_{\mu\gamma}^{\beta\nu} \nabla_{\beta} C_{\lambda}^{\gamma} = B_{\mu\gamma}^{\beta\nu} \nabla_{\beta} B_{\lambda}^{\gamma} = - B_{\mu\gamma}^{\beta\nu} (\nabla_{\beta} \underset{q}{e}^{\gamma}) \overset{q}{e}_{\lambda} \end{aligned}$$

der erste und der zweite *Krümmungsaffinor* der L_n^m sind, die mit ν bzw. λ in der $L_n^{m'}$ und mit $\mu\lambda$ bzw. $\mu\nu$ in der L_n^m liegen. In derselben Weise gibt es zwei Krümmungsaffinoren $\overset{m'}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ und $\overset{m'}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu}$ der $L_n^{m'}$.

Da *die neuen Operatoren den gewöhnlichen Regeln in bezug auf Summen und Produkte genügen*, lassen sie sich auf Größen höheren Grades anwenden, die mit einigen Indizes in der L_n^m und mit den übrigen in der $L_n^{m'}$ liegen, z. B.

$$\overset{m}{\nabla}_{b} T_{a}^{\cdot r} = B_{ba}^{\mu\lambda} C_{\nu}^{r} \nabla_{\mu} T_{\lambda}^{\cdot\nu} = \partial_{b} T_{a}^{\cdot r} + \Gamma_{pb}^{r} T_{a}^{\cdot p} - \Gamma_{ab}^{c} T_{c}^{\cdot r}. \tag{88}$$

Da nun aber jeder der Operatoren $\overset{m}{\delta}, \overset{m'}{\delta}, \overset{m}{\nabla}, \overset{m'}{\nabla}$ nur Größen erzeugen kann, die mit einigen Indizes in der L_n^m und mit den übrigen in der $L_n^{m'}$ liegen, folgt daraus, daß jede beliebige Aufeinanderfolge dieser Operatoren, angewandt auf Größen der angegebenen Art, stets Sinn hat.

§ 4.

Die D-Symbolik.

Es sei $v_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ ein Feld, das mit dem Index λ in L_n^m liegt, mit dem Index μ in $L_n^{m'}$, während es in bezug auf ν als Größe der L_n aufzufassen ist. Es existiert dann das gewöhnliche kovariante Differential $\delta v_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$, bei welchem $v_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ über alle Indizes als Größen der L_n aufgefaßt wird. Nun ist der Ausdruck

$$d\xi^{\omega} B_{\omega\lambda}^{\delta\alpha} C_{\mu}^{\beta} \nabla_{\delta} v_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\nu} \tag{89}$$

ebenfalls ein kovariantes Differential von $v_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$, und zwar eins, dessen Indizes in derselben Lage in bezug auf L_n^m, $L_n^{m'}$ und L_n sind als die von $v_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$. *Mit den bisher eingeführten Symbolen $\delta, \overset{m}{\delta}, \overset{m'}{\delta}$ läßt sich dieses Differential aber ohne Verwendung von Faktoren B und C nicht bilden.* Man müßte also hier ein neues Differentiationssymbol und einen entsprechenden Differentialoperator einführen, und dies hätte für jedes Feld, das mit einigen Indizes in L_n^m, mit anderen in $L_n^{m'}$ liegt und das in bezug auf die übrigen als Größe der L_n aufzufassen ist, aufs neue zu geschehen. Die verschiede-

nen Operatoren unterscheiden sich nun offenbar nur durch die Anzahl der Faktoren B und C, mit denen in den Formeln wie (89) überschoben wird, und die Angriffsstellen, wo die Überschiebung stattfindet. Verschiedene Autoren sind da ungefähr gleichzeitig auf den Gedanken gekommen, diese lästige Einführung von neuen Operatoren dadurch zu umgehen, daß die Anzahl der Faktoren B und C und die Angriffsstellen statt durch irgendeinen am Operator angehefteten Index durch die Wahl der Indizes aus den Reihen $a, \ldots, g$; $p, \ldots, w$ oder $\alpha, \ldots, \omega$ angegeben wird. Man kann dann mit einem einzigen Operator, etwa D, auskommen, z. B.:

$$D_b v_{a p}^{\cdot\cdot\,\nu} = B_{ba}^{\delta\alpha} C_p^\beta \nabla_\delta v_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\,\nu}. \tag{90}$$

Es ist aber eins zu beachten. Bisher galt für alle Ausdrücke die Regel, daß Indizes $a, \ldots, g$ *nur* dort auftreten können, wo der Ausdruck Überschiebung mit B verträgt, daß aber an *allen* Stellen auch Indizes $\alpha, \ldots, \omega$ auftreten können, und entsprechendes für die Indizes $p, \ldots, w$, so daß also z. B. $\nabla_\omega v_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu}$ einen Sinn hat, $\nabla_b v_{a p}^{\cdot\cdot\,\nu}$ dagegen nicht. *Der zweite Teil dieser Regel gilt nicht mehr in D-Formeln,* wird z. B. a in (90) durch λ ersetzt, so bedeutet dies, daß $v_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu}$ bei der Differentiation, auch was den Index λ betrifft, als Größe der L_n aufzufassen ist, und es entsteht also eine ganz andere Größe:

$$D_b v_{\lambda p}^{\cdot\cdot\,\nu} = B_b^\delta C_p^\beta \nabla_\delta v_{\lambda\beta}^{\cdot\cdot\,\nu}. \tag{91}$$

D-Formeln und ∇- oder δ-Formeln *dürfen also niemals verwechselt oder durcheinander verwendet werden, da die Indizes in ihnen eine grundverschiedene Bedeutung haben.* Charakteristisch für ∇-Formeln und Formeln ohne Differentiation ist, daß ihre Bedeutung nur vom *Skelett* (= Inbegriff von Kernbuchstaben, Stellung der Indizes und Stellung der vorgenommenen Überschiebungen) abhängt, nicht aber davon, welche von den erlaubten Arten von Indizes verwendet sind. Die D-Formeln besitzen diese Eigenschaft nicht.

Wir definieren jetzt die D-Operatoren folgendermaßen. u^ν ist ein Feld der L_n, v^c liege in L_n^m, w^r in $L_n^{m'}$.

$$(92)\qquad \begin{aligned} &\alpha)\quad D_\mu p = \nabla_\mu p, \\ &\beta)\quad D_\mu u^\nu = \nabla_\mu u^\nu, \\ &\gamma)\quad D_\mu v^c = B_\nu^c \nabla_\mu v^\nu, \\ &\delta)\quad D_\mu w^r = C_\nu^r \nabla_\mu w^\nu. \end{aligned}$$

$$(93)\qquad \begin{aligned} &\alpha)\quad D_b p = B_b^\mu \nabla_\mu p, \\ &\beta)\quad D_b u^\nu = B_b^\mu \nabla_\mu u^\nu, \\ &\gamma)\quad D_b v^c = B_{b\nu}^{\mu c} \nabla_\mu v^\nu. \\ &\delta)\quad D_b w^r = B_b^\mu C_\nu^r \nabla_\mu w^\nu \end{aligned}$$

$$(94)\quad \begin{aligned} &\alpha)\quad D_q p = C_q^{\mu} \nabla_{\mu} p, \\ &\beta)\quad D_q u^{\nu} = C_q^{\mu} \nabla_{\mu} u^{\nu}, \\ &\gamma)\quad D_q v^{c} = C_q^{\mu} B_{\nu}^{c} \nabla_{\mu} v^{\nu}, \\ &\delta)\quad D_q w^{r} = C_{q\nu}^{\mu r} \nabla_{\mu} w^{\nu}. \end{aligned}$$

Die Operationen D_{μ}, D_b, D_q sollen *Differentiation nach* L_n bzw. *nach* L_n^m bzw. *nach* $L_n^{m'}$ heißen. Entsprechende Formeln gelten für kovariante Vektoren. B und C lassen sich also jetzt folgendermaßen ausdrücken:

$$(95)\qquad B_a^{\nu} = D_a \xi^{\nu}; \qquad C_p^{\nu} = D_p \xi^{\nu}.$$

Die Operatoren D *genügen den formalen Regeln der Differentiation von Summen und Produkten* und es ergeben sich daraus die Regeln für die Differentiation einer Größe höheren Grades mit verschiedenen Arten von Indizes, wie z. B. (90), (91). Sehr wichtig ist, daß auch die formalen Regeln für Überschiebungen gelten, und zwar für die drei möglichen Arten von Überschiebungen entsprechend den drei Arten von Indizes, z. B.

$$(96)\qquad D_b v_a^{\cdot\nu} w^a = (D_b v_a^{\cdot\nu}) w^a + v_a^{\cdot\nu} (D_b w^a).$$

In den Formeln (92), (93), (94) fehlen gerade die Bildungen, die entstehen durch Überschiebung des differenzierten zu L_n^m gehörigen v mit C und des differenzierten zu $L_n^{m'}$ gehörigen w mit B. Diese Bildungen sind aber keine êigentlichen Differentialkomitanten, da sie nur von den lokalen Werten von v bzw. w und von den im vorigen Paragraphen definierten Krümmungsaffinoren abhängen. Ist doch

$$(97)\quad \begin{aligned} &\alpha)\quad C_{\nu}^{r} \nabla_{\mu} v^{\nu} = - C_{\gamma}^{r} v^{\nu} \nabla_{\mu} C_{\nu}^{\gamma} = - \Big(\overset{m}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot r} + \overset{m'}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot r}\Big) v^{\lambda}, \\ &\beta)\quad B_{\nu}^{c} \nabla_{\mu} w^{\nu} = - B_{\gamma}^{c} w^{\nu} \nabla_{\mu} B_{\nu}^{\gamma} = - \Big(\overset{m'}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot r} + \overset{m}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot c}\Big) w^{\lambda}, \end{aligned}$$

woraus sich bei Überschiebung mit B bzw. C ergibt:

$$(98)\quad \begin{aligned} &\alpha)\quad B_b^{\mu} C_{\nu}^{r} \nabla_{\mu} v^{\nu} = - B_b^{\mu} C_{\gamma}^{r} v^{\nu} \nabla_{\mu} C_{\nu}^{\gamma} = - \overset{m}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot r} v^{a}, \\ &\beta)\quad B_{b\nu}^{\mu c} \nabla_{\mu} w^{\nu} = - B_{b\gamma}^{\mu c} w^{\nu} \nabla_{\mu} B_{\nu}^{\gamma} = - \overset{m}{L}{}_{b\cdot p}^{\cdot c} w^{p}, \\ &\gamma)\quad C_{q\nu}^{\mu r} \nabla_{\mu} v^{\nu} = - C_{q\gamma}^{\mu r} v^{\nu} \nabla_{\mu} C_{\nu}^{\gamma} = - \overset{m'}{L}{}_{q\cdot a}^{\cdot r} v^{a}, \\ &\delta)\quad C_q^{\mu} B_{\nu}^{c} \nabla_{\mu} w^{\nu} = - C_q^{\mu} B_{\gamma}^{r} w^{\nu} \nabla_{\mu} B_{\nu}^{\gamma} = - \overset{m'}{H}{}_{qp}^{\cdot\cdot c} w^{p}. \end{aligned}$$

Für die Krümmungsaffinoren folgt aus (92), (94)

$$(99)\quad \begin{aligned} &\alpha)\quad \overset{m}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} = D_b B_a^{\nu} = D_b D_a \xi^{\nu}, \\ &\beta)\quad \overset{m}{L}{}_{b\cdot\lambda}^{\cdot c} = D_b B_{\lambda}^{c} \end{aligned}$$

und entsprechende Formeln gelten für $\overset{m'}{H}$ und $\overset{m'}{L}$. Von den in (92), (93), (94) für eine in L_n eingespannte L_n^m definierten Differentialquotienten verlieren (92γ), (92δ) und (94) ihre Bedeutung, wenn man zu einer in L_n eingespannten L_m übergeht. Dasselbe gilt von (92δ), (94), (93γ) und (93δ), wenn man die Einspannung der L_n^m aufhebt. Ist aber aus irgendeinem Grunde eine Übertragung in der L_n^m vorhanden, so bleibt die Definitionsgleichung $D_b v^c = \overset{m}{\nabla}_b v^c$, das Band mit ∇_μ fehlt aber jetzt.

Die D-Symbolik ist von verschiedenen Autoren unabhängig voneinander aufgefunden worden. Ein erster Ansatz findet sich bei Lagrange[5]), der das kovariante Differential einer Größe der L_n ausschreibt für die verbindenden Bestimmungszahlen in bezug auf zwei Systeme von Urvariablen (ν) und (N)

$$\delta v_\lambda^{\cdot N} = d v_\lambda^{\cdot N} + \Gamma^N_{\Lambda M} v_\lambda^{\cdot \Lambda} d\xi^M - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v_\nu^{\cdot N} d\xi^\mu .$$

Es liegt hier natürlich noch kein Grund vor, δ und D zu unterscheiden, da es sich immer noch um zwei verschiedene Systeme von n Koordinaten in derselben Mannigfaltigkeit handelt[6]). Erst bei van der Waerden[7]) werden Größen betrachtet, die mit einigen Indizes in V_n, mit den anderen in einer in V_n eingebetteten V_m liegen, und es werden die Operatoren $d\xi^\mu D_\mu$ wirkend auf Größen der V_n und $d\eta^b D_b$ wirkend auf Größen der V_n und der V_m (mit der Bezeichnung $\boldsymbol{d}$) definiert. Unabhängig von ihm wurden diese Operatoren mit derselben Wirkungssphäre aufgefunden von E. Bortolotti[8]). Leider hat Bortolotti kein neues Differentiationssymbol eingeführt, sondern das Zeichen ∇ beibehalten, was zu Verwirrungen führen kann und unnötigerweise den Gebrauch der nur durch das Skelett bestimmten alten Formeln im Verlauf der Rechnung unmöglich macht. Schließlich findet sich derselbe Operator $d\eta^b D_b$ (mit der Bezeichnung D) auch bei Duschek-Mayer[9]). Der Operator D_b, auf Größen der V_m ausgeübt, findet sich in einer späteren Arbeit von Bortolotti[10]) und wird dort (in seinem System

---

[5]) Calcul différentiel absolu, Mém. des Sciences Math. Fasc. 19 (1926), p. 10.

[6]) Der Index p auf S. 10, Z. 9 v. ob., der den Schein des Gegenteils weckt, ist offenbar nur ein Druckfehler.

[7]) Differentialkovarianten von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in Riemannschen m-dimensionalen Räumen, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), S. 153—160.

[8]) Spazi subordinati: equazioni di Gauß e Codazzi, Boll. Un. Matem. 6 (1927), p. 134—137; Sulle varietà subordinate negli spazi a connessione affine e su di una espressione dei simboli di Riemann, Boll. Un. Matem. 7, 2 (1928), p. 8.

[9]) Lehrbuch der Differentialgeometrie, Teubner 1930, S. 156. Herr Mayer teilte mir am 21. 1. 1930 brieflich mit, daß ihm die bezüglichen Arbeiten der oben genannten Autoren unbekannt seien und daß er über den Operator D schon im Wintersemester 1926/27 an der Wiener Universität vorgetragen hat.

[10]) Scostamento geodetico e sue generalizzazioni, Giorn. di Matem. di Battaglini 66 (1928), p. 153—191.

weniger konsequent) mit ∇^* bezeichnet. Die Zerlegungen der Differentiale von v und w, die in (82) zum Ausdruck kommen, finden sich übrigens schon viel früher bei Weyl[11]) und Cartan[12]).

§ 5.

Krümmungsgrößen der V_n^m in V_n.

Wir betrachten den Fall einer V_n^m in V_n, deren Maßbestimmung durch den Fundamentaltensor $a_{\lambda\nu}$ der V_n gegeben ist (vgl. S. 769). Für die Fundamentaltensoren b_{ab} und c_{pq} gilt dann infolge (93) und (94):

(100) $$\alpha)\ D_b b_{ac} = 0; \qquad \beta)\ D_q b_{ac} = 0;$$

(101) $$\alpha)\ D_b c_{pr} = 0; \qquad \beta)\ D_q c_{pr} = 0;$$

(102) $$D_\mu a_{\lambda\nu} = 0; \qquad D_b a_{\lambda\nu} = 0; \qquad D_q a_{\lambda\nu} = 0,$$

und daraus folgt unter Berücksichtigung von (99)

(103) $$\overset{m}{L}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} = D_b b_{ac} B_\lambda^c a^{\lambda\nu} = D_b B_a^\nu = \overset{m}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}.$$

Der Unterschied zwischen $\overset{m}{L}$ und $\overset{m}{H}$ verschwindet also und dasselbe gilt für $\overset{m'}{L}$ und $\overset{m'}{H}$, so daß statt (97) kommt

(104) $$\alpha)\ c_{p\nu} \nabla_\mu v^\nu = -\left(\overset{m}{H}_{\mu\lambda p} + \overset{m'}{H}_{\mu p\lambda}\right) v^\lambda,$$
$$\beta)\ b_{a\nu} \nabla_\mu w^\nu = -\left(\overset{m}{H}_{\mu a\lambda} + \overset{m'}{H}_{\mu\lambda a}\right) w^\lambda.$$

Zweimalige Differentiation nach V_n^m eines Skalars p und Alternation führt zu

(105) $$D_{[b} D_{a]} p = D_{[b} B_{a]}^\lambda D_\lambda p = \overset{m}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot r} D_r p.$$

Da aber anderseits

(106) $$D_{[b} D_{a]} p = \partial_{[b} \partial_{a]} p + \Gamma_{[ab]}^c \partial_c p,$$

folgt

(107) $$\partial_{[b} \partial_{a]} p = -\Gamma_{[ab]}^c \partial_c p + \overset{m}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot r} \partial_r p.$$

Die linke Seite von (107) verschwindet also dann und nur dann identisch, wenn *sowohl* $\overset{m}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot r}$ *als auch* $\Gamma_{[ab]}^c$ verschwinden. Nun ist laut (87)

(108) $$\overset{m}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot r} = -B_{ba}^{\beta\alpha}\left(\partial_{[\beta} \overset{q}{e}_{\alpha]}\right) \underset{q}{e}^r$$

---

[11]) Zur Infinitesimalgeometrie: p-dimensionale Flächen im n-dimensionalen Raum, Math. Zeitschr. 12 (1922) S. 154—160, insbes. S. 155.

[12]) La géometrie des espaces de Riemann, Mém. des Sc. Math. 9 (1925), p. 47.

und $\overset{m}{H}_{[ba]}{}^{r}$ verschwindet also dann und nur dann, wenn die V_n^m zu einem System von $\infty^{m'} V_m$ degeneriert. In dem Falle verschwinden außerdem die $\Gamma_{[ab]}^c$ dann und nur dann, wenn die η^c in diesen V_m holonome Parameter sind. Aus (108) folgt für $p = \overset{r}{\xi}$ bei Überschiebung mit $\underset{r}{e}^c$

$$\Gamma_{[ab]}^c = \underset{r}{e}^c \, \partial_{[b} \overset{r}{e}_{a]} = B_r^c \, \partial_{[b} B_{a]}^r \tag{109}$$

und die $\Gamma_{[ab]}^c$ *hängen also nur von der Einspannung und nicht von der Übertragung in der V_m ab.* Aus (109) und der ausgeschriebenen Formel (100 α)

$$\partial_b b_{ac} - \Gamma_{ab}^d b_{dc} - \Gamma_{cb}^d b_{ad} = 0 \tag{110}$$

lassen sich aber die $\Gamma_{(ab)}^c$ in bekannter Weise berechnen, und daraus folgt, daß die in V_n^m induzierte Übertragung nur von b_{ab} und von der Einspannung abhängt und folglich *invariant ist bei solchen Änderungen des Fundamentaltensors a, die b und die Einspannung unverändert lassen.*

Bei zweimaliger Differentiation nach V_n eines Vektors u^ν der V_n ergibt sich die bekannte Gleichung

$$D_{[\omega} D_{\mu]} u^\nu = -\frac{1}{2} K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} u^\lambda, \tag{111}$$

wo $K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ die Krümmungsgröße der V_n ist.

Bei zweimaliger Differentiation nach V_n eines Vektors v^c der V_n^m ergibt sich

$$D_{[\omega} D_{\mu]} v^c = D_{[\omega} B_{|\nu|}^c D_{\mu]} v^\nu = \left\{ \overset{m'}{H}_{[\omega|\lambda|}{}^{c} + \overset{m}{H}_{[\omega}{}^{c}{}_{|\lambda|} \right\} D_{\mu]} v^\lambda - \frac{1}{2} B_\nu^c K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} v^\lambda \tag{112}$$

und eine entsprechende Formel besteht für einen Vektor w^r der $V_n^{m'}$. Zweimalige Differentiation eines Vektors u^ν der V_n nach V_n^m und Alternation ergibt nach (103) und (111)

$$D_{[d} D_{b]} u^\nu = D_{[d} B_{b]}^\mu D_\mu u^\nu = \overset{m}{H}_{[db]}{}^{q} D_q u^\nu - \frac{1}{2} B_d^\omega{}_b^\mu K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} u^\lambda. \tag{113}$$

Zweimalige Differentiation nach V_n^m und Alternation eines Vektors v^c in V_n^m ergibt infolge (106)

$$\begin{aligned} D_{[d} D_{b]} v^c = D_{[d} D_{b]} \overset{a}{v} \underset{a}{e}^c &= \overset{m}{H}_{[db]}{}^{r} D_r v^c - \overset{m}{H}_{[db]}{}^{r} \Gamma_{ar}^c v^a + \overset{a}{v} D_{[d} D_{b]} \underset{a}{e}^c \\ &= \overset{m}{H}_{[db]}{}^{r} D_r v^c - \frac{1}{2} \overset{m}{K}_{dba}{}^{c} v^a, \end{aligned} \tag{114}$$

wo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overset{m}{K}_{dba}{}^{c} &= -\overset{e}{e}_a D_{[d} D_{b]} \underset{e}{e}^c + \overset{m}{H}_{[db]}{}^{r} \Gamma_{ar}^c \\ &= \overset{m}{H}_{[db]}{}^{r} \Gamma_{ar}^c - \partial_{[d} \Gamma_{|a|b]}^c - \Gamma_{e[d}^c \Gamma_{|a|b]}^e - \Gamma_{[db]}^e \Gamma_{ae}^c. \end{aligned} \tag{115}$$

Ebenso folgt für einen kovarianten Vektor v_a in V_n^m

$$D_{[d} D_{b]} v_a = \overset{m}{H}_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{r} D_r v_a + \frac{1}{2} \overset{m}{K}_{\dot{d}\dot{b}a}{}^{c} v_c . \tag{116}$$

Die Größe $\overset{m}{K}$ ist *nicht* wie die linke Seite von (114) und (116) nur von b und von der Einspannung abhängig und also keine eigentliche Krümmungsgröße der V_n^m. Dies liegt daran, daß der erste Term rechts in (114) und (116) außer von der Einspannung noch von der Übertragung in der V_n^m abhängt. Nun ist aber

$$D_r v^c + \overset{m}{H}_{a\cdot r}^{\cdot c} v^a = \partial_r v^c + 2 v^a B_a^\omega C_r^\mu \partial_{[\omega} B_{\mu]}^c \tag{117}$$

und der Ausdruck in der linken Seite dieser Gleichung ist also *nur von der Einspannung abhängig und nicht von der Übertragung in der V_n*. Sie ist eine Art Ableitung, die wir mit dem Zeichen D'_q belegen. Da entsprechendes für kovariante Vektoren gilt, lauten die Definitionsgleichungen von D'_q

$$(118)\quad \begin{aligned} &\alpha)\quad D'_q v^c = D_q v^c + \overset{m}{H}_{a\cdot q}^{\cdot c} v^a = \partial_q v^c + 2 v^a B_a^\omega C_q^\mu \partial_{[\omega} B_{\mu]}^c, \\ &\beta)\quad D'_q v_a = D_q v_a - \overset{m}{H}_{a\cdot q}^{\cdot c} v_c = \partial_q v_a - 2 v_c B_a^\omega C_q^\mu \partial_{[\omega} B_{\mu]}^c \\ &\qquad\qquad = 2 B_a^\omega C_q^\mu \partial_{[\omega} v_{\mu]} . \end{aligned}$$

(114) und (116) lassen sich dann schreiben

$$D_{[d} D_{b]} v^c = \overset{m}{H}_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{q} D'_q v^c - \frac{1}{2} \overset{m}{K}{}^{*}{}_{\dot{d}\dot{b}a}{}^{c} v^a , \tag{119}$$

$$D_{[d} D_{b]} v_a = \overset{m}{H}_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{q} D'_q v_a + \frac{1}{2} \overset{m}{K}{}^{*}{}_{\dot{d}\dot{b}a}{}^{c} v_c , \tag{120}$$

wo

$$\overset{m}{K}{}^{*}{}_{\dot{d}\dot{b}a}{}^{c} = \overset{m}{K}_{\dot{d}\dot{b}a}{}^{c} - 2 \overset{m}{H}_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{r} \overset{m}{H}_{a\cdot r}^{\cdot c} \tag{121}$$

nur von b_{ab} und von der Einspannung abhängig und also eine richtige Krümmungsgröße der V_n^m ist.

(118β) gibt Aufschluß über die geometrische Bedeutung von D'_q, $D'_q v_a$ ist die Komponente von $2\partial_{[\omega} v_{\mu]}$ in $V_n^{m'}$ über den ersten und in V_n^m über den zweiten Index. *D'_q hängt also weder von der Maßbestimmung noch von irgendeiner Übertragung ab* und existiert demzufolge auch bei einer in X_n eingespannten X_n^m. Man überzeugt sich leicht, daß die Komponente in $V_n^{m'}$ oder V_n^m über *beide* Indizes *nicht* zu einer linearen Übertragung führt.

Zweimalige Differentiation nach V_n^m und Alternation eines Vektors w^r der $V_n^{m'}$ ergibt

$$(122)\quad \begin{aligned} D_{[d} D_{b]} w^r = D_{[d} D_{b]} \overset{p}{w} \underset{p}{e}{}^r &= \overset{m}{H}_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{q} D_q w^r - \overset{m}{H}_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{q} \Gamma_{pq}^r w^p + \overset{p}{w} D_{[d} D_{b]} \underset{p}{e}{}^r \\ &= \overset{m}{H}_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{q} D_q w^r - \frac{1}{2} \overset{mm'}{K}_{\dot{d}\dot{b}p}{}^{r} w^p , \end{aligned}$$

wo

$$(123)\qquad \frac{1}{2}\overset{mm'}{K}{}_{\dot d \dot b p}{}^{r} = \overset{m}{H}{}_{[\dot d \dot b]}{}^{q}\,\Gamma^{r}_{pq} - \partial_{[d}\,\Gamma^{r}_{|p|b]} - \Gamma^{r}_{q[d}\,\Gamma^{q}_{|p|b]} - \Gamma^{e}_{[db]}\,\Gamma^{r}_{pe}\,.$$

In derselben Weise lassen sich, ausgehend von $V_n^{m'}$, die Krümmungsgrößen $\overset{m'}{K}{}_{sqp}{}^{r}$ und $\overset{m'm}{K}{}_{sqa}{}^{e}$ ableiten und ein Differentialoperator D'_b wirkend auf Größen der $V_n^{m'}$. Die zu D' gehörige Übertragung hat die Eigenschaft, daß es Parallelogramme gibt mit zwei Seiten in V_n^m und zwei in $V_n^{m'}$ und ist, wie man leicht nachrechnet, durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Bei zweimaliger Differentiation nach V_n^m einer Größe mit drei verschiedenen Arten von Indizes tritt, wie leicht aus (113), (114) und (122) hervorgeht, für jeden Index ein Term mit der entsprechenden Krümmungsgröße auf und außerdem noch ein einziger Term mit $\overset{m}{H}{}_{[\dot d \dot b]}{}^{q}$, z. B.

$$(124)\qquad D_{[d}D_{b]}T_{\lambda a}{}^{r} = \overset{m}{H}{}_{[\dot d \dot b]}{}^{q}\,D_q T_{\lambda a}{}^{r} + \frac{1}{2}B^{\omega\mu}_{d\,b}\,K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}\,T_{\nu a}{}^{r} + \frac{1}{2}\overset{m}{K}{}_{\dot d b a}{}^{c}\,T_{\lambda c}{}^{r} - \frac{1}{2}\overset{mm'}{K}{}_{\dot d b p}{}^{r}\,T_{\lambda a}{}^{p}\,.$$

§ 6.

Die verallgemeinerten Gleichungen von Gauß, Codazzi und Ricci für V_n^m in V_n, abgeleitet mit Hilfe der D-Symbolik.

Die Gleichung (124) führt uns in einfachster Weise zu den verallgemeinerten Gleichungen von Gauß, Ricci und Codazzi. Bei Anwendung auf B_a^{ν} ergibt sich

$$(125)\qquad D_{[d}\,\overset{m}{H}{}_{b]a}{}^{\nu} = D_{[d}\,D_{b]}\,B_a^{\nu} = \overset{m}{H}{}_{\dot d \dot b}{}^{q}\,D_q\,B_a^{\nu} + \frac{1}{2}\overset{m}{K}{}_{\dot d b a}{}^{c}\,B_c^{\nu} - \frac{1}{2}B^{\omega\mu\lambda}_{d\,b\,a}\,K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$$

oder

$$(126)\qquad \begin{aligned} B^{\omega\mu\lambda}_{d\,b\,a}\,K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} &= \overset{m}{K}{}_{\dot d b a}{}^{\nu} - 2\,\overset{m}{H}{}_{[\dot d \dot b]}{}^{q}\,\overset{m'}{H}{}_{q\cdot a}{}^{\nu} - 2\,D_{[d}\,H_{b]a}{}^{\nu} \\ &= \overset{m}{K}{}^{*}{}_{\dot d b a}{}^{\nu} + 2\,\overset{m}{H}{}_{[\dot d \dot b]}{}^{q}\left(\overset{m}{H}{}_{a\cdot q}{}^{\nu} - \overset{m'}{H}{}_{q\cdot a}{}^{\nu}\right) - 2\,D_{[d}\,H_{b]a}{}^{\nu}, \end{aligned}$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich bei Überschiebung mit B^c_{ν} die verallgemeinerte Gleichung von Gauß (vgl. Der Riccikalkül, Berlin: Julius Springer 1923, weiterhin zitiert als R.K., S. 198 Formel (157))

$$(127)\qquad \boxed{B^{\omega\mu\lambda c}_{d\,b\,a\,\nu}\,K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = \overset{m}{K}{}^{*}{}_{\dot d b a}{}^{c} + 2\,\overset{m}{H}{}_{[\dot d \dot b]}{}^{q}\,\overset{m}{H}{}_{a\cdot q}{}^{c} + 2\,\overset{m}{H}{}_{[\dot d\cdot|q|}{}^{c}\,\overset{m}{H}{}_{b]a}{}^{q}}\,,$$

die bei Abdrosselung der Indizes q die Gestalt

$$(128)\qquad \boxed{B^{\omega\mu\lambda c}_{d\,b\,a\,\nu}\,K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = \overset{m}{K}{}^{*}{}_{\dot d b a}{}^{c} + 2\,\overset{q}{h}{}_{[\dot d \dot b]}\,\underset{q}{l}{}_{a\cdot}{}^{c} + 2\,\underset{q}{l}{}_{[\dot d}{}^{c}\,\overset{q}{h}{}_{b]c}}$$

annimmt (vgl. R.K. S. 198 Formel (158)), wo

$$(129)\qquad \begin{aligned} \overset{r}{h}_{ba} &= - \overset{m}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot q}\, \overset{r}{e}_q = (D_b \overset{r}{e}_\lambda)\, B^\lambda_a, \\ \underset{p}{l}{}_b^{\cdot c} &= - H_{b\cdot q}^{\cdot c}\, \underset{p}{e}{}^q = (D_b \underset{p}{e}{}^\nu)\, B^c_\nu \end{aligned}$$

und bei Überschiebung mit C^r_ν die verallgemeinerte Gleichung von Codazzi

$$(130)\qquad \boxed{B^{\omega\mu\lambda}_{dba}\, C^r_\nu\, K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -2\, \overset{m}{H}{}_{[db]}^{\cdot\cdot q}\, \overset{m'}{H}{}_{q\cdot a}^{\cdot r} - 2\, D_{[d}\, \overset{m}{H}{}_{b]a}^{\cdot\cdot r}}$$

oder, in anderer Form, bei Abdrosselung der Indizes q und r (vgl. R.K. S. 200 Formel (168 b)):

$$(131)\qquad \boxed{2\, D_{[d}\, \overset{r}{h}_{b]a} = + B^{\omega\mu\lambda}_{dba}\, \overset{r}{e}_\nu\, K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - 2\, \overset{q}{h}_{[db]}\, \underset{q}{\overset{r}{u}}_a - 2\, \underset{q}{\overset{r}{v}}_{[d}\, \overset{q}{h}_{b]a}},$$

wo

$$(132)\qquad \begin{aligned} \underset{p}{\overset{r}{v}}_d &= - \underset{p}{e}{}^q\, D_d\, \overset{r}{e}_q = \overset{r}{e}_q\, D_d\, \underset{p}{e}{}^q \overset{*}{=} \Gamma^r_{pd}, \\ \underset{p}{\overset{r}{u}}_a &= \overset{m'}{H}{}_{q\cdot a}^{\cdot s}\, \underset{p}{e}{}^q\, \overset{r}{e}_s. \end{aligned}$$

Bei Anwendung von (124) auf C^ν_p ergibt sich

$$(133)\qquad \begin{aligned} D_{[d}\, \overset{m}{H}{}_{b]\cdot r}^{\cdot\nu} &= - D_{[d}\, D_{b]}\, C^\nu_p \\ &= \overset{m}{H}{}_{[db]}^{\cdot\cdot q}\, D_q\, C^\nu_p + \frac{1}{2} \overset{mm'}{K}{}_{dbp}^{\cdot\cdot\cdot r}\, C^\nu_r - \frac{1}{2} B^{\omega\mu}_{d\,b}\, K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, C^\lambda_p \end{aligned}$$

oder

$$(134)\qquad B^{\omega\mu}_{d\,b}\, C^\lambda_p\, K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \overset{mm'}{K}{}_{dbp}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + 2\, \overset{m}{H}{}_{[db]}^{\cdot\cdot q}\, \overset{m'}{H}{}_{qp}^{\cdot\cdot\nu} - 2\, D_{[d}\, \overset{m}{H}{}_{b]\cdot p}^{\cdot\nu}.$$

Überschiebung mit C^r_ν ergibt die verallgemeinerte Gleichung von Ricci

$$(135)\qquad \boxed{B^{\omega\mu}_{d\,b}\, C^{\lambda r}_{p\nu}\, K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \overset{mm'}{K}{}_{dbp}^{\cdot\cdot\cdot r} + 2\, \overset{m}{H}{}_{[d|\,e|}^{\cdot\cdot r}\, \overset{m}{H}{}_{b]\cdot p}^{\cdot e}},$$

während Überschiebung mit B^c_ν auf (130) zurückführt. Abdrosselung der Indizes p und r ergibt

$$(136)\qquad B^{\omega\mu}_{d\,b}\, \underset{p}{e}{}^\lambda\, \overset{r}{e}_\nu\, K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \overset{mm'}{K}{}_{db\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, \underset{p}{e}{}^\lambda\, \overset{r}{e}_\nu + 2\, \overset{r}{h}_{[d|\,e|}\, \underset{p}{l}{}_{b]}^{\cdot e}.$$

Da aber

$$(137)\qquad \begin{aligned} \overset{mm'}{K}{}_{db\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, \overset{r}{e}_\nu\, \underset{p}{e}{}^\lambda &= 2\, D_{[d} \left\{ \underset{|p|}{e}{}^q\, D_{b]}\, \overset{r}{e}_q \right\} - 2 \left(D_{[d}\, \underset{p}{e}{}^q\right) \left(D_{b]}\, \overset{r}{e}_q\right) - 2\, \overset{s}{h}_{[db]}\, \underset{s}{e}{}^t \left(D_t\, \overset{r}{e}_q\right) \underset{p}{e}{}^q \\ &= 2\, D_{[d}\, \underset{p}{\overset{r}{v}}_{b]} - 2\, \underset{p}{\overset{q}{v}}_{[d}\, \underset{q}{\overset{r}{v}}_{b]} + 2\, \overset{s}{h}_{[db]}\, \underset{sp}{\overset{r}{u}}, \end{aligned}$$

wo

$$(138)\qquad \underset{sp}{\overset{r}{u}} = \underset{s}{e}^{t}\,\underset{p}{e}^{q}\,D_t\,\overset{r}{e}_q \overset{*}{=} -\Gamma^{r}_{ps}\,,$$

läßt sich die verallgemeinerte Gleichung von Ricci in der Form (vgl. R.K. S. 200 Formel (170 b))

$$(139)\qquad \boxed{B^{\omega\mu}_{d\,b}\,K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\,\underset{p}{e}^{\lambda}\,\overset{r}{e}_{\nu} = 2\,D_{[d}\,\underset{p}{\overset{r}{v}}_{b]} - 2\,\underset{p}{\overset{q}{v}}_{[d}\,\underset{q}{\overset{r}{v}}_{b]} + 2\,\overset{s}{h}_{[db]}\,\underset{sp}{\overset{r}{u}} + 2\,\overset{r}{h}_{[d|e|}\,\underset{p}{l}_{b]}^{\cdot e}}$$

schreiben.

Die Gleichungen (130), (131) und (139) unterscheiden sich von den korrespondierenden Gleichungen für V_m in V_n durch das Auftreten der $\overset{m}{H}_{[db]}^{\cdot\cdot r}$ bzw. $\overset{r}{h}_{[db]}$ enthaltenden Zusatzglieder. Die Krümmungsgrößen $\overset{m}{K}$, $\overset{mm'}{K}$, $\overset{m'm}{K}$ und $\overset{m'}{K}$ genügen ihrer Definition nach der *ersten Identität* (vgl. R. K., S. 87)

$$(140)\qquad \begin{aligned} &\overset{m}{K}_{(db)a}^{\cdot\cdot\cdot c} = 0\,, \quad && \overset{mm'}{K}_{(db)p}^{\cdot\cdot\cdot r} = 0\,,\\ &\overset{m'm}{K}_{(sq)a}^{\cdot\cdot\cdot c} = 0\,, && \overset{m'}{K}_{(sq)p}^{\cdot\cdot\cdot r} = 0\,. \end{aligned}$$

Aus (101), (102) folgt in bekannter Weise, daß sie auch der *dritten Identität* (vgl. R. K., S. 88) genügen

$$(141)\qquad \begin{aligned} D_{[d}\,D_{b]}\,b_{ac} = \overset{m}{K}_{db(ac)} &= 0\,, \quad & \overset{mm'}{K}_{db(pr)} &= 0\,,\\ \overset{m'm}{K}_{sq(ac)} &= 0\,, & \overset{m'}{K}_{sq(pr)} &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Krümmungsgrößen $\overset{mm'}{K}$ und $\overset{m'm}{K}$ genügen zusammen einer Art von *vierter Identität* (vgl. R. K., S. 89), die erhalten wird durch Vergleichung von (135) mit einer analogen Formel für $\overset{m'm}{K}$:

$$(142)\qquad \overset{mm'}{K}_{acpr} + 2\,\overset{m}{H}_{[a\cdot|r|}^{\cdot\cdot e}\,\overset{m}{H}_{c]ep} = \overset{m'm}{K}_{prac} + 2\,\overset{m'}{H}_{[p\cdot|c|}^{\cdot\cdot e}\,\overset{m'}{H}_{r]ea}\,.$$

Berechnen wir $D_{[d}\,D_b\,v_{a]}$ auf zwei verschiedene Arten:

$$D_{[d}\,D_b\,v_{a]} = \overset{m}{H}_{[db}^{\cdot\cdot q}\,D_{|q|}\,v_{a]} + \frac{1}{2}\,\overset{m}{K}_{[dba]}^{\cdot\cdot\cdot c}\,v_c\,,$$

$$D_{[d}\,D_b\,v_{a]} = D_{[d}\,B^{\lambda\mu}_{ba]}\,D_\lambda\,v_\mu = \overset{m}{H}_{[db}^{\cdot\cdot q}\,D_{|q|}\,v_{a]} - v_c\,\overset{m}{H}_{[db}^{\cdot\cdot q}\,\overset{m}{H}_{a]\cdot q}^{\cdot c}\,,$$

so entsteht eine *zweite Identität* (vgl. R. K., S. 88) für $\overset{m}{K}$:

$$(143)\qquad \overset{m}{K}_{[dba]}^{\cdot\cdot\cdot c} = -2\,\overset{m}{H}_{[db}^{\cdot\cdot q}\,\overset{m}{H}_{a]\cdot q}^{\cdot c}\,,$$

und also auch eine für $\overset{m}{K}{}^{*}$:

$$\overset{m}{K}{}^{*}{}_{[dba]}{}^{\cdot\cdot\cdot c} = -4\,\overset{m}{H}{}_{[db}{}^{\cdot\cdot q}\,H_{a]\cdot q}^{\cdot c}. \tag{144}$$

Diese Formel kann auch direkt aus (127) abgeleitet werden.

Eine Beziehung zwischen $\overset{m}{H}$ und $\overset{m'}{H}$ erhält man aus (130) durch Alternation über d, b und a:

$$\overset{m}{H}{}_{[db}^{\cdot\cdot q}\,\overset{m'}{H}{}_{|q|\cdot a]}^{\cdot r} + D_{[d}\,\overset{m}{H}{}_{ba]}^{\cdot\cdot r} = 0. \tag{145}$$

Aus der ersten, zweiten und dritten Identität von $\overset{m}{K}$ folgt die *vierte Identität*:

$$\overset{m}{K}{}_{dbac} - \overset{m}{K}{}_{acdb} = 12\,\overset{m}{H}{}_{[ac}^{\cdot\cdot q}\,\overset{m}{H}{}_{db]q}, \tag{146}$$

in anderer Form:

$$\overset{m}{K}{}^{*}_{dbac} - \overset{m}{K}{}^{*}_{acdb} = 12\,\overset{m}{H}{}_{[ac}^{\cdot\cdot q}\,\overset{m}{H}{}_{db]q} - 2\,\overset{m}{H}{}_{[db]}^{\cdot\cdot q}\,\overset{m}{H}{}_{acq} + 2\,\overset{m}{H}{}_{[ac]q}\,\overset{m}{H}{}_{db}^{\cdot\cdot q}. \tag{147}$$

§ 7.

Krümmungstheorie einer V_n^m in X_n.

Wir betrachten jetzt eine in X_n eingespannte X_n^m und stempeln diese durch Einführung eines Fundamentaltensors b_{ab} zu einer V_n^m.[13]) Die Maßbestimmung in der V_n^m, *für sich allein, wäre nicht imstande, eine Übertragung zu erzeugen*, ist aber *auch die Einspannung* mit gegeben, so lassen sich die Γ_{ab}^c aus den Gleichungen (109) und (110) berechnen, und dadurch ist dann in der V_n^m eine metrische Übertragung festgelegt. Der Operator D_b bekommt also einen Sinn, allerdings nur bei Anwendung auf Größen der V_n^m:

$$D_b v^c = \partial_b v^c + \Gamma_{ab}^c v^a, \tag{148}$$

die Operatoren D_q und D_μ existieren dagegen gar nicht. Da es keine Übertragung in der X_n gibt, existiert $\overset{m}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$ nicht, dagegen existiert laut (107) die Größe $\overset{m}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu}$, die wir hier, wo $\overset{m}{H}{}_{bc}^{\cdot\cdot\nu}$ nicht existiert, lieber $M_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$ schreiben (vgl. (108)), und die nur von der Einspannung und nicht von b_{ab} abhängt:

$$M_{ba}^{\cdot\cdot\nu} = \partial_{[b} B_{a]}^{\nu} - \Gamma_{[ab]}^{c} B_c^{\nu} = C_\lambda^{\nu}\,\partial_{[b} B_{a]}^{\lambda}. \tag{149}$$

---

[13]) Vgl. Vranceanu, C. R. 188 (1929), p. 973–975.

Der nur von der Einspannung abhängige Operator D'_q behält seine Bedeutung:

$$(150) \qquad D'_q v^c = \partial_q v^c + 2\, v^a B^\omega_a C^\mu_q \partial_{[\omega} B^c_{\mu]},$$

verliert aber die in (118) zum Ausdruck kommenden Beziehungen zu $\overset{m}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot r}$. Daneben existiert D'_b:

$$(151) \qquad D'_b w^r = \partial_b w^r + 2\, w^p C^\omega_p B^\mu_b \partial_{[\omega} C^r_{\mu]},$$

und es ist wie vorhin:

$$(152) \qquad D'_{[q} D'_{b]} p = 0 .$$

Bei zweimaliger Differentiation nach V^m_n eines Vektors v^c der V^m_n und Alternation ergibt sich wie in (119):

$$(153) \qquad D_{[d} D_{b]} v^c = M_{db}^{\cdot\cdot q} D'_q v^c - \frac{1}{2} \overset{m}{K}{}^{*}{}_{dba}^{\cdot\cdot\cdot c} v^a,$$

wo $\overset{m}{K}{}^{*}{}_{dba}^{\cdot\cdot\cdot c}$ aber jetzt nicht mehr durch (121), sondern durch

$$(154) \qquad \overset{m}{K}{}^{*}{}_{dba}^{\cdot\cdot\cdot c} = 4\, M_{db}^{\cdot\cdot \mu} B^\omega_a \partial_{[\omega} B^c_{\mu]} - 2\, \partial_{[d} \Gamma^c_{|a|b]} - \Gamma^c_{e[d} \Gamma^e_{|a|b]} - \Gamma^e_{[db]} \Gamma^c_{ae}$$

gegeben ist. Eine entsprechende Größe $\overset{m'}{K}{}^{*}{}_{sqp}^{\cdot\cdot\cdot r}$ existiert hier natürlich nicht. Dagegen läßt sich eine Krümmungsgröße bilden durch Anwendung des Operators $D^*_q D^*_b - D^*_b D^*_q$ auf v^c, wo die Operatoren D^* folgende Bedeutung haben:

$$(155) \qquad \begin{aligned} D^*_b v^c &= D_b v^c, \\ D^*_q v^c &= D'_q v^c, \\ D^*_b w^r &= D'_b w^r. \end{aligned}$$

Es ergibt sich dann

$$(156) \qquad D^*_{[q} D^*_{b]} v^c = \overset{mm'}{M}{}_{qba}^{\cdot\cdot\cdot c} v^a,$$

wo

$$(157) \qquad \begin{aligned} \overset{mm'}{M}{}_{qba}^{\cdot\cdot\cdot c} = {} & \partial_q \Gamma^c_{ab} - 2\, \partial_b C^\mu_q B^\lambda_a \partial_{[\mu} B^c_{\lambda]} \\ & - \partial_{[\mu} B^e_{\lambda]} \{ 2\, \Gamma^c_{ae} C^\mu_q B^\lambda_b + 2\, \Gamma^c_{eb} C^\mu_q B^\lambda_a - 2\, \Gamma^d_{ab} C^\mu_q B^{\lambda c}_{de} \\ & - 4\, B^\mu_b C^\lambda_q \partial_{[\mu} C^r_{\lambda]} \}. \end{aligned}$$

Die Größe

$$(158) \qquad D'_q b_{ab} = N_{abq}$$

wird nach (118β) gleich

$$\overset{m}{H}{}_{(ab)q},$$

so daß auch diese Größe unabhängig von der Übertragung in X_n ist. Wird $\partial_{[\omega} B^c_{\mu]} = 0$, so wird erstens die Einspannung $X_{m'}$-bildend, zweitens werden alle Vektoren $\overset{c}{e}_\mu$ X_{n-1}-bildend, woraus folgt, daß die Maßvektoren

der V_n^m entstehen durch Schnitt der V_n^m mit den X_{n-1} dieser Vektoren. Der Operator D'_q geht dann laut (118) über in den Operator ∂_q und die Größe $\overset{mm'}{M}{}_{q\dot{b}\dot{a}}^{\cdot\cdot\,c}$ geht über in $\partial_q \Gamma_{ab}^{c}$.[14])

§ 8.

Schlußbemerkung.

Das Anwendungsgebiet der D-Symbolik ist durch obige Darlegungen keineswegs erschöpft. Namentlich haben wir festgestellt, daß die D-Symbolik großen Nutzen bringt bei der Theorie der Deformation und bei der Behandlung der höheren Krümmungen einer V_m in V_n.

---

[14]) Ein analoger Fall liegt z. B. vor in der unitären Geometrie, vgl. J. A. Schouten und D. v. Dantzig, Unitäre Geometrie, Math. Annalen **103** (1930), S. 319–346.

(Eingegangen am 11. 5. 1930.)

Charakterisierung der $n-1$-dimensionalen abgeschlossenen Mengen des R^n.

Von

Felix Frankl in Moskau.

In einer früheren Note [1]) wurde der Satz, daß im R^n jede $n-1$-dimensonale abgeschlossene Menge Gebiete des Raumes zerlegt [2]), für $n = 3$ bewiesen; er läßt sich unter Benützung von von Alexandroff [3]) bewiesenen Sätzen auch so formulieren: Unter den abgeschlossenen kompakten Teilmengen des R^n sind die im klassischen Sinn $n-1$-dimensionalen mit den nach Alexandroff $n-1$-dimensionalen identisch. Die $n-1$-dimensionalen abgeschlossenen Mengen des R^n werden also durch die Gesamtheit der folgenden beiden Eigenschaften charakterisiert:

a) sie enthalten keine inneren Punkte;

b) sie zerlegen mindestens ein Gebiet des R^n.

Wie wir gesehen haben, beruht die Hauptschwierigkeit des Beweises für $n = 3$ auf der Existenz von Knoten im R^3. Für $n \geqq 4$ läßt sich der Satz leichter beweisen, da es im R^n für $n \geqq 4$ keine Knoten gibt.

Zum Zwecke dieses Beweises wollen wir zunächst (in viel weiterem Umfang, als wir ihn brauchen) den Zusammenhang zwischen dem Dehnschen [4]) und dem mengentheoretisch-topologischen Isotopiebegriff [5]) herstellen. Dehns Behauptung, daß zwei in seinem Sinne isotope Komplexe auch im Sinne der mengentheoretischen Topologie isotop sind, ist in dieser Allgemeinheit vielleicht nicht ganz einfach zu beweisen. (Meines Wissens findet sich

---

[1]) Frankl u. Pontrjagin, Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie, Math. Annalen 102 (1930), S. 785.

[2]) Vgl. Urysohn, Fund. Math. 7, S. 135, Problem α; Alexandroff, Göttinger Nachrichten 6. VII. 1928, § 1, und Ann. of Math. 30, S. 166.

[3]) Alexandroff, Göttinger Nachrichten a. a. O. § 5.

[4]) Dehn-Heegaard, Enzyklopädieartikel, S. 164.

[5]) Siehe etwa Urysohn, Fund. Math. 7, S. 83, Fußnote 2.

in der Literatur noch kein Beweis.) Sehr einfach wird der Beweis jedoch, wenn man den Dehnschen Isotopiebegriff durch folgenden wenigstens a priori spezielleren Begriff ersetzt.

Sei $E = [\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i+1}]$ ein offener $i+1$-dimensionaler Simplex im R^n (im folgenden wird nur der Fall $i = 1$ gebraucht). Wir bezeichnen mit A die (abgeschlossene) Vereinigung derjenigen unter seinen i-dimensionalen Randsimplizes, die den Simplex $[\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_k]$ enthalten, und mit B die Vereinigung derer, die $[\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \ldots \alpha_{i+1}]$ enthalten. A und B haben den gemeinsamen Rand S. Sei nun K ein i-dimensionaler Komplex, der zu $\overline{E} - S$ fremd ist, so nennen wir $K + A$ und $K + B$ *elementar-isotop*. Zwei Komplexe, welche durch eine Kette von Elementar-Isotopien ineinander übergehen, nennen wir *kombinatorisch-isotop*. Den Komplex, der aus den Simplizes dieser Elementar-Isotopien besteht, nennen wir den *erzeugenden Komplex* der Isotopie.

Unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungsweise können wir nun beweisen:

Lemma 1. Zu einer beliebig kleinen polyedralen Umgebung U von $\overline{E} - S$ existiert ein Homöomorphismus von $\overline{U}$ auf sich selbst, der A in B überführt und alle Punkte des Randes von U fest läßt.

Daraus folgt sofort:

Lemma 1a. Jede kombinatorische Isotopie läßt sich als mengentheoretisch-topologische auffassen.

Beweis. Wir nehmen an, der R^{i+1}, in dem E liegt, habe die Gleichungen $x_{i+2} = x_{i+3} = \ldots = x_n = 0$. Wir verbinden nun einen inneren Punkt γ von $[\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_k]$ mit einem inneren Punkt δ von $[\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \ldots \alpha_{i+1}]$ durch die Strecke $\overline{\gamma\delta}$ und machen die Gerade, auf der sie liegt, zur x_{i+1}-Achse. In dem R^{n-i} mit den Gleichungen $x_1 = x_2 = \ldots = x_i = 0$ legen wir nun um $\overline{\gamma\delta}$ eine kleine polyedrale Umgebung P und bezeichnen die (offene) konvexe Hülle von $E + P$ mit U. U ist eine Umgebung von $\overline{E} - S$ und kann beliebig klein gemacht werden in dem Sinne, daß in jeder polyedralen Umgebung von $\overline{E} - S$ eine derartige Umgebung U liegt[6]). Die Schar der R^{n-i} von der Form $x_1 =$ konst., $x_2 =$ konst., ..., $x_i =$ konst. bezeichnen wir mit (α). Durch jeden Punkt des Raumes geht genau ein

---

[6]) Denn sei V irgendeine polyedrale Umgebung von $\overline{E} - S$ und X ein $n-1$-dimensionales Element ihrer Begrenzung. X hat schlimmstenfalls mit S einen Teil eines Elements von S gemein, etwa des Elements $Y = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i]$. Dann gibt es einen n-dimensionalen offenen Simplex $E' = [\alpha_0' \alpha_1 \ldots \alpha_i \alpha_{i+1}' \ldots \alpha_n']$ (wobei α_0' in der Nähe von α_0 und $\alpha_{i+1}', \ldots, \alpha_n'$ in der Nähe von α_{i+1} liegen) von der Eigenschaft, daß $\overline{E} - Y \subset E'$ und X zu E' fremd ist. Man kann nun P so wählen, daß es in E' liegt. Macht man dies für alle X, so gilt $U \subset V$.

R^{n-i} der Schar (α); wenn dieser zu $\overline{U}$ nicht fremd ist, so schneidet er entweder $A - S$ und $B - S$ in je einem Punkt oder er hat mit $\overline{U}$ nur einen Punkt gemein, der auf S liegt[7]). Wir konstruieren nun einen Homöomorphismus T von $\overline{U}$ auf sich selbst folgendermaßen: Sei π ein Punkt von $\overline{U}$, so legen wir durch ihn den R^{n-i} der Schar (α) und betrachten die Schnittpunkte $\alpha = R^{n-i} A$ und $\beta = R^{n-i} B$. Wir verlängern die gerichtete Strecke $\overline{\alpha\pi}$ bis zu ihrem Schnittpunkt ϱ mit dem Rand von U und ziehen die Strecke $\overline{\beta\varrho}$. Den Bildpunkt $\pi' = T(\pi)$ bestimmen wir auf der Strecke $\beta\varrho$ so, daß $\overline{\alpha\pi} : \overline{\pi\varrho} = \overline{\beta\pi'} : \overline{\pi'\varrho}$. Diese Abbildung ist tatsächlich ein Homöomorphismus von $\overline{U}$ auf sich selbst, der den Rand von U fest läßt und A in B überführt. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir werden nun leicht folgenden Hilfssatz beweisen:

Lemma 2. Sind in einem n-dimensionalen Intervall J $(n \geqq 4)$ zwei Punkte α und β seines Randes im Innern durch zwei singularitätenfreie Streckenzüge p und p' verbunden, so können p und p' durch eine Isotopie ineinander übergeführt werden, deren erzeugender Komplex bis auf die gemeinsamen Endpunkte von p und p' ganz im Innern von J liegt.

Daraus folgt nach Lemma 1 sofort

Lemma 2a. Es gibt einen Homöomorphismus von $\overline{J}$ auf sich selbst, der den Rand von J fest läßt und p in p' überführt.

Beweis. Wir durchlaufen p und p' gleichzeitig von α nach β und verbinden immer entsprechende Punkte von p und p' durch eine Strecke. Diese Strecken erzeugen ein Element mit dem Rand $p + p'$, welches im allgemeinen Singularitäten hat. Wir können es durch ein polyedrales Element mit demselben Rand ersetzen, wobei wir annehmen können, daß je zwei Kanten von Dreiecken dieses Komplexes einander nicht schneiden.

---

[7]) Denn der Durchschnitt $g = R^{n-i} \cdot R^{i+1}$ ist eine Gerade parallel zu $\overline{\gamma\delta}$. Wenn diese $A - S$ in α schneidet, so ziehen wir die Strecke $\overline{\gamma\alpha}$ und verlängern sie bis zum Schnittpunkt σ mit S. Wir betrachten nun das Dreieck $\gamma\delta\sigma$. Da die Gerade g zu $\overline{\gamma\delta}$ parallel ist, muß sie die Seite $\overline{\delta\sigma}$ in einem Punkte β schneiden. β liegt aber in $B - S$. – Hat g hingegen mit S einen Punkt σ gemein, so enthält g keinen weiteren Punkt von $\overline{E}$. Denn gäbe es einen solchen Punkt τ, dann läge er entweder auf einem Randelement von E und $g = \overline{\sigma\tau}$, läge mithin auf einem R^i, der $\overline{\gamma\delta}$ (in γ oder δ) schneidet, könnte also nicht zu $\overline{\gamma\delta}$ parallel sein. Oder aber τ läge im Innern von E; ist dann Y ein Element von S, auf dem σ liegt, so bestimmen Y und τ einen R^i, der γ von δ trennt, also $\overline{\gamma\delta}$ schneidet. Also könnte auch in diesem Falle $g = \overline{\sigma\tau}$ nicht zu $\overline{\gamma\delta}$ parallel sein. – R^{n-i} und Y bestimmen nun eine Hyperebene R^{n-1} von der Eigenschaft, daß $\overline{E} + \overline{P} - Y$ ganz auf einer Seite von R^{n-1} liegt; zu jedem Punkt τ von $R^{n-i} - \sigma$ können wir daher eine von R^{n-1} sehr wenig abweichende Hyperebene R_1^{n-1} bestimmen, welche durch Y geht und τ von $\overline{E} + \overline{P} - Y$ trennt; mit anderen Worten, τ liegt außerhalb einer abgeschlossenen konvexen Umgebnng von $E + P - S$, mithin außerhalb $\overline{U}$, was zu beweisen war.

Dieser Komplex erzeugt offenbar eine Homotopie[8]) zwischen p und p'. Jedem seiner Dreiecke entspricht eine Elementarhomotopie, analog unseren Elementar-Isotopien. Ist eine solche keine Isotopie, so können wir sie zu einer Isotopie machen, indem wir das Dreieck durch ein benachbartes Element mit demselben Rand ersetzen; denn eine Gerade und eine Ebene, welche sich im R^n $(n \geqq 4)$ zueinander in allgemeiner Lage befinden, schneiden einander nicht. Wir erhalten also tatsächlich eine Isotopie zwischen p und p', welche alle Bedingungen des Satzes erfüllt.

Nun beweisen wir leicht unseren

Satz. Wenn eine abgeschlossene kompakte Teilmenge F des R^n $(n \geqq 4)$ kein Gebiet zerlegt, so ist sie höchstens $n-2$-dimensional im klassischen Sinn.

Beweis. Wir zerlegen den R^n in polyedrale Elemente so, daß i dieser Elemente höchstens ein $n-i+1$-dimensionales Randelement gemein haben. Diese Zerlegung bezeichnen wir mit I. Wir wählen sie so, daß keiner ihrer Eckpunkte in F liegt. Zu jeder Kante k der Zerlegung bestimmen wir ein n-dimensionales Intervall J_k, welches zu allen von k verschiedenen Kanten fremd ist und den Durchschnitt $k \cdot F$ im Innern enthält. Die J_k sollen alle zueinander fremd sein. Den Durchschnitt $k \cdot J_k$ nennen wir k'. Nun gibt es in J_k einen Streckenzug k'' mit denselben Endpunkten wie k', der F nicht trifft; wir führen k' und k'' in J_k durch einen Homöomorphismus von $\bar{J}_k$ auf sich selbst ineinander über, der den Rand fest, läßt und machen das für jedes k. Dadurch erhalten wir einen Homöomorphismus des Raumes auf sich selbst, der die Zerlegung I in eine Zerlegung II überführt. Der Durchschnitt von je n Elementen dieser Zerlegung hat mit F keinen Punkt gemein. Da II beliebig fein gewählt werden kann, ist F nach dem Pflastersatz höchstens $n-2$-dimensional. — Dieser Beweis gilt selbstverständlich auch für $n = 2$.

[8]) Dehn-Heegaard, Enzyklopädieartikel, S. 164. Die Homotopie unterscheidet sich von der Isotopie nur dadurch, daß $\bar{E} - S$ mit K Punkte gemein haben darf.

(Eingegangen am 22. 11. 1929.)

Veranschaulichung Nicht-Archimedischer Geometrie.

Von

Hans Mohrmann in Darmstadt.

In seinen Grundlagen der Geometrie[1]) hat Hilbert zwei von ihm so genannte Nicht-Archimedische Geometrien aufgestellt, eine Pascalsche und eine Nicht-Pascalsche. Beide enthalten nur eine abzählbar-unendliche Menge von Punkten; und die erste ist überdies so einfach, daß man sich, soweit dies in Dingen der analysis infinitorum überhaupt möglich ist, ohne Schwierigkeit ein *Schaubild* von ihr machen kann. Dabei darf man sich freilich nicht darauf versteifen, mit dem Begriff der Zahl den Begriff der Länge einer ausgedehnten Strecke zu verbinden. Betrachtet man aber die Zahl als *Ordinalzahl* (*Nummer*), was man am deutlichsten zum Ausdruck bringt, indem man auf Kongruenz-Axiome verzichtet, also nur projective („affine") Eigenschaften der Gebilde ins Auge faßt, so läßt sich auch eine Nicht-Archimedische Geometrie jedenfalls so weit veranschaulichen, daß ihre Eigentümlichkeiten *sinnfällig* zutage treten.

Eine solche Versinnlichung scheint uns nun deshalb von grundsätzlicher Bedeutung zu sein, weil vor allem Pasch[2]) mit nachhaltiger Wirkung die Ansicht vertreten hat, es komme den Stetigkeitsaxiomen der Geometrie gegenüber der Erfahrung eine andere Stellung zu, als den übrigen Axiomen. Nicht zuletzt hieraus sind die großen Anstrengungen zu erklären, die einige Axiomatiker gemacht haben, um „die Geometrie", wie sie sagen, ohne Stetigkeits-Axiome zu begründen, womit sie indessen nur meinen können, daß sie diese erst zuletzt hinzunehmen wollen.

Wir möchten dagegen die Meinung vertreten, daß die Stetigkeitsaxiome der Geometrie[3]) keinen anderen Rang einnehmen, als die Axiome des „*Zwischen*":

[1]) § 12 und § 34.

[2]) Math. Annalen **30** (1887), S. 129.

[3]) Diesen gibt man alsdann mit F. Klein und H. Weyl am einfachsten die Form: jedem Punkte einer Strecke entspricht eine *reelle* Zahl eines Intervalls und umgekehrt. Die Sonderstellung der *reellen* Zahlen gegenüber allgemeineren „Zahlen", die aber noch den sogenannten *Körperpostulaten* der modernen Algebra genügen, und damit

(Fortsetzung der Fußnote [3]) auf nächster Seite.)

die Forderung, daß zwischen irgend zwei voneinander verschiedenen Punkten A und B (einer Strecke) ein von beiden verschiedener Punkt C liege, *also* zwischen A und C ein ebensolcher Punkt D, und so weiter *ohne Ende* scheint mir unsrer Erkenntnis hinsichtlich Erfahrung und Anschauung nicht weniger zuzumuten, als die Forderung, daß die reellen Zahlen ausreichen sollen, die Punkte einer Strecke zu numerieren. Bei einer *Begründung* der Geometrie (im Gegensatz zu einer Untersuchung der Tragweite der Folgerungen, die man aus gewissen Gruppen von Axiomen ziehen kann), liegt jedenfalls kein Grund vor, die Stetigkeits-Axiome an das Ende des Axiomen-Systems zu rücken, und sich damit den Aufbau der Geometrie unnötig zu erschweren.

Nun enthalten die Hilbertschen Nicht-Archimedischen Geometrien, wie wir schon sagten, nur eine abzählbar-unendliche Menge von Elementen, so daß gerade *der* Teil der Forderung der Stetigkeit, den wir soeben berührten, und der uns nicht weniger plausibel erschien, als die Forderung des erwähnten Axioms des „Zwischen", daß nämlich die reellen Zahlen ausreichen sollen, die Punkte einer Strecke zu numerieren, hier insofern nicht zur Geltung kommt, als die Hilbertschen Nicht-Archimedischen Zahlen (unter Aufgabe ihrer Größenordnung) abzählbar sind.

Der *Zweck* unserer Arbeit ist daher ein doppelter:

1. wollen wir (in engster Anlehnung an Hilbert) eine Nicht-Archimedische Geometrie betrachten, deren Elemente eine *nicht-abzählbare* Menge bilden; und

2. wollen wir (in den schon charakterisierten Grenzen) ein *Schaubild* dieser Geometrie geben.

---

die bevorzugte Stellung der (gewöhnlichen) reellen Zahlen hinsichtlich der *Geometrie* wird dadurch charakterisiert, daß der geordnete Körper der reellen Zahlen (und im wesentlichen nur dieser — vgl. Haupt, Einführung in die Algebra, Leipzig 1929, Bd. II, S. 607 u. S. 383) *stetig* ist.

Allgemein wird man eine linear geordnete Menge diskreter Elemente („Punkte einer Geraden") dann und nur dann als *stetig* (im Sinne der Geometrie) bezeichnen dürfen, wenn

a) die Menge einen Körper K bildet, und

b) jeder Schnitt (im Dedekindschen Sinne) in K durch ein Element von K erzeugt wird.

Das *Dedekindsche „Prinzip"* in seiner ursprünglichen Form für *beliebige* linear geordnete dichte Mengen ausgesprochen (vgl. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 4. Aufl., Braunschweig 1912, S. 11) *allein genügt nicht* zur Charakterisierung der Stetigkeit in der Geometrie, da „Lücken" dichter Mengen ohne die Forderung der Körpereigenschaft immer durch Hinzunahme („Schöpfung") neuer Elemente geschlossen werden können (vgl. Hausdorff, Mengenlehre, 2. Aufl. 1927, S. 53).

Unsere vierte Figur bringt die geschilderten Verhältnisse sinnfällig zum Ausdruck.

1. Eine Menge von Elementen z, die den von Hilbert so genannten *linearen* Axiomen der Verknüpfung und Anordnung (den linearen projektiven Axiomen ohne Stetigkeitsforderung) genügen, wollen wir Elemente einer *„Zahlen"-Linie* nennen; eine Menge von Punkten, die den *linearen* und *ebenen* Axiomen der Verknüpfung und Anordnung genügen, wollen wir Punkte einer Fläche oder auch kurz *Fläche* (Ebene) nennen; und die in ihr enthaltenen (sie konstituierenden) „geraden Linien" *g-Linien* (geodätische Linien).

Mittels eines eigentlichen Dreiecks (OAB) einer solchen Fläche und ihrer g-Linien einerseits, der Elemente einer Zahlen-Linie andrerseits kann man auf vielfach-unendlich viele Weisen *Koordinaten* x, y nach Art der projektiven Cartesischen Koordinaten einführen[1]), durch die Punkte der Fläche im Innern und auf den Seiten OA und OB des Dreiecks dargestellt werden (Fig. 1): indem man dem Punkte O ein beliebiges Paar von Elementen (x_0, y_0) zuweist usw. $(x_0 < x_1 < x_2)$.

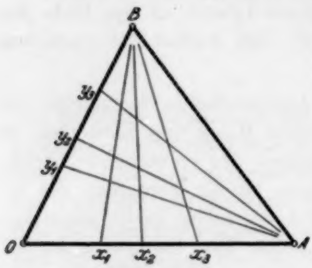


Fig. 1.

Koordinaten dieser Art wollen wir *allgemeine* Cartesische Koordinaten nennen. Diese Koordinaten brauchen keineswegs *alle* inneren Punkte des Dreiecks (OAB) zu erfassen. Wir werden vielmehr sehen, daß wir mit Nicht-Archimedischen Koordinaten Punkte *nicht* fassen können, die wir mit reellen (gewöhnlichen) Cartesischen Koordinaten beschreiben können *und umgekehrt*.

Bestehen die Koordinaten $x = X$ und $y = Y$ aus der Gesamtheit der nicht-negativen *reellen* Zahlen und ist $X_0 = 0$ und $Y_0 = 0$, so wollen wir von *gewöhnlichen* Koordinaten sprechen. Man kann die von den so erklärten gewöhnlichen Koordinaten X, Y erfaßten Punkte unter dem Bilde eines Quadranten einer *Euklidischen* Ebene betrachten, die mit einem gewöhnlichen rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystem versehen ist, und die wir *Anschauungsebene* nennen wollen.

Gehören die Koordinaten x, y anderen zulässigen Bereichen an, d. h. sind sie Elemente einer (allgemeinen) „Zahlen"-Linie, und können wir die durch sie erfaßten Punkte (P) unserer Fläche zu den durch die gewöhnlichen Koordinaten erfaßten „gewöhnlichen" Punkten in eine solche Beziehung setzen, daß jeder gewöhnliche Punkt Häufungspunkt für die Menge der Punkte (P) ist, d. h., daß in jedem noch so kleinen Kreise

$$(X - A)^2 + (Y - B)^2 = \varepsilon^2 \qquad (X, Y, A, B, \varepsilon \text{ reell}, \ |\varepsilon| > 0)$$

Punkte der Menge (P) liegen, so wollen wir die Menge (P) *augendicht* nennen.

[1]) Vgl. Math. Annalen **102** (1929), S. 533.

2. Wir betrachten jetzt zwecks „arithmetischer" Beschreibung der Punkte im Innern des Dreiecks (OAB) unserer Ausgangsfläche eine Menge Nicht-Archimedischer Zahlen. Diese „komplexen" Zahlen sollen dem Rationalitätsbereich $R(r, t)$ angehören, wo r *jede* beliebige *reelle* Zahl und t einen Parameter bedeutet, die also aus r, t hervorgehen, indem man die vier elementaren Rechnungsoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division eine endliche Anzahl von Malen anwendet. Dabei heißt eine Zahl a des Körpers $R(r, t)$ größer oder kleiner als eine ebensolche Zahl b

$$a \gtrless b,$$

je nachdem die Differenz

$$c = a - b,$$

als (rationale) Funktion von t betrachtet, für genügend große positive Werte von t stets positiv oder stets negativ ausfällt.

Da unser Körper $R(r, t)$ die Null enthält, wollen wir auch hier dem Punkte O die Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ zuordnen und zur arithmetischen Beschreibung der Punkte im Innern unseres Dreiecks (OAB) die *Gesamtheit* der *positiven* Zahlen von $R(r, t)$ verwenden. Das kann auf vielfach-unendlich viele Weisen geschehen. In *jedem einzelnen* Falle wollen wir diejenigen Mengen von Punkten (x, y), deren Koordinaten einer linearen Gleichung der Form:

$$\gamma \equiv ax + by + c = 0$$

genügen, wo die Koeffizienten a, b, c ebenfalls dem Körper $R(r, t)$ angehören, und a und b nicht beide Null sind, als γ-*Linien* bezeichnen.

Von den Koordinatenlinien

$$x = a \quad \text{und} \quad y = b$$

abgesehen, fällt im allgemeinen keine γ-Linie mit einer g-Linie zusammen.

Da die Koordinaten des Schnittpunktes zweier solcher γ-Linien rationale Funktionen der Koeffizienten ihrer Gleichungen, und dual die Koeffizienten der Gleichung der Verbindungs-γ-Linie zweier Punkte rationale Funktionen der Koordinaten dieser Punkte sind, so erkennt man sofort, daß die Punkte und γ-Linien dieser *Nicht-Archimedischen Geometrie* sämtlichen (auch den räumlichen) Axiomen der Verknüpfung und Anordnung (projektiven Axiomen ohne Stetigkeitsforderung) genügen. Aus dem gleichen Grunde erkennt man auch ohne Mühe, daß in unserer Nicht-Archimedischen Geometrie der (für ein Paar von γ-Linien passend [5]) ausgesprochene) *Pascalsche Satz* gilt.

---

[5]) Vgl. Mohrmann, Einführung in die Nicht-Euklidische Geometrie, Leipzig 1930, S. 37.

3. Wir wollen nunmehr zeigen, daß die durch unsere Nicht-Archimedischen Koordinaten x, y erfaßten Punkte des Dreiecks (OAB) in dem erklärten Sinne (Nr. **1**) *augendicht* liegen (können)[*]). Zu diesem Zwecke müssen wir unsere Nicht-Archimedischen Koordinaten x, y zu den gewöhnlichen Cartesischen Koordinaten X, Y in passender Weise in Beziehung setzen. Wir dürfen nur sagen: *in Beziehung setzen*; denn eine *Abbildung* des einen Systems auf das andere ist unter unseren Voraussetzungen, selbst bei Beschränkung auf komplexe Zahlen aus der *abzählbaren* Menge des Bereichs $R(1, t) \equiv R(t)$ *unmöglich*, wie unmittelbar aus der Definition des „Größer"- und „Kleiner"seins unserer Nicht-Archimedischen Zahlen hervorgeht.

Hieraus darf man nun aber nicht schließen, daß es unmöglich sei, sich ein (physisches, graphisches) *Schaubild* unserer Nicht-Archimedischen Geometrie zu machen, vergleichbar dem, das wir uns von Gebilden der Euklidischen Geometrie zu machen pflegen. Denn man erkennt leicht, daß sich die Koordinaten x, y und X, Y *so* einführen lassen (Nr. **1**), daß sich viel mehr Punkte decken, als in einem solchen Schaubilde markiert werden können, ohne daß deshalb die Eigentümlichkeiten der Nicht-Archimedischen Geometrie verloren gingen.

Offenbar genügt es, um unser Ziel zu erreichen, die Zuordnung der Punkte auf einer Achse des Koordinatensystems, etwa auf der Achse OA soweit durchzuführen, daß man jeden ihrer Punkte als Häufungspunkt der Punktmenge unserer Nicht-Archimedischen Geometrie erkennt. Dies kann auf vielfach-unendlich viele Weisen geschehen. Wir treffen unsere Wahl so, daß in unserem Schaubild in der früher (Nr. **1**) erklärten Anschauungsebene, wenigstens *stückweise* Strecken von Nicht-Archimedischen γ-Linien

$$\gamma \equiv ax + by + c = 0$$

geradlinige Strecken oder Bögen von Kurven 2. Ordnung (Hyperbeln) entsprechen. Zu diesem Zwecke genügt es, wie man unschwer erkennt, die komplexen Zahlen der Form

$$r t^k \qquad (k \text{ reell-rat., ganz})$$

methodisch anzuordnen, da die Verteilung der übrigen Zahlen nach ihrer Größe gemäß der Forderung des „Zwischen"-Liegens für unser (physisches, graphisches) Schaubild irrelevant ist.

Wir verfahren so:

1. Zunächst ordnen wir plangemäß dem Punkte O den Nullpunkt der X-Skala und denjenigen der x-Skala zu, dem Punkte A den Wert ∞;

[*]) Das gilt auch von der *abzählbaren* Menge der Punkte der Hilbertschen Nicht-Archimedischen Geometrie, der unsere nachgebildet ist.

2. weisen wir den Punkten mit den Euklidischen Abszissen

$$X = 2k + 3 \qquad (k = -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

die Nicht-Archimedischen Abszissen

$$x = t^k$$

zu:

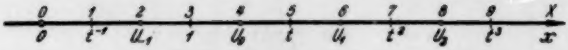


Fig. 2.

(Die Punkte $X = 2k + 4$ bezeichnen wir mit U_k; sie sollen der Menge x *nicht* angehören);

3. stellen wir uns auf einer Euklidischen Strecke der Länge 2 eine *projektive Skala* her, die a) sämtliche positiven reellen Zahlen r enthält,

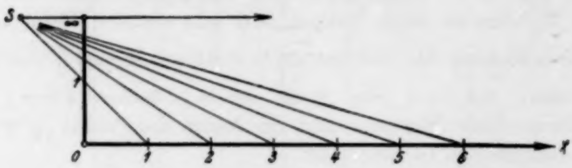


Fig. 3.

b) die Endpunkte der Strecke zu Randpunkten hat und c) für die die Zahl 1 im Mittelpunkte der Strecke liegt und weisen mit Hilfe dieser projektiven Skala den komplexen Zahlen

$$x = r t^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; \quad r > 0)$$

ihre Plätze an, indem wir diese Skala jedesmal *so* auf die X-Achse legen, daß der Mittelpunkt der Trägerstrecke auf einen Punkt mit ungerader Abszisse

$$X = 2k + 3$$

fällt, die Endpunkte also auf die Punkte

$$U_{k-1} \quad \text{und} \quad U_k$$

zu liegen kommen;

4. endlich weisen wir noch den Punkten

$$x = r t^{-k} \qquad (k = 2, 3, \ldots; \quad r > 0)$$

ihre Plätze an. Zu diesem Zwecke projizieren wir die Euklidische Halbgerade $\overline{4\,\infty}$ in der sub 3 (Fig. 3) charakterisierten Weise *so* auf die Strecke $\overline{2\,0}$,

daß der Punkt $X = 5$ auf den Punkt $X = 1$ fällt und ordnen weiter jedem Punkte P^*, der einem Punkte P mit $x = r\,t^k$ entspricht, als Abszisse x^* den reziproken Wert von x zu:

$$x^* = \frac{1}{x}$$

in Übereinstimmung damit, daß dem Punkte

$$x = t \qquad \text{der Punkt} \qquad x^* = t^{-1}$$

entsprechen muß (Fig. 2).

Auf diese Weise erkennt man unmittelbar, daß *jeder* Punkt der g-Linie OA (X-Achse $\equiv x$-Achse) Häufungspunkt für die Menge x (in dem erklärten Sinne) ist; das gilt insbesondere auch für die der Menge x *nicht* angehörenden Punkte U_k.

4. Fügen wir nunmehr der positiven Hälfte der x-Achse durch Spiegelung der X-Achse an ihrem Nullpunkte O eine negative Hälfte hinzu und weiter durch Drehung der X-Achse um O durch den Winkel $\frac{\pi}{2}$ eine y-Achse, so ist evident, daß auch jeder Punkt der Euklidischen *Ebene* (X, Y) in dem erklärten Sinne Häufungspunkt der Menge der Punkte (x, y) unserer Nicht-Archimedischen Geometrie ist.

Das genügt, um das graphische Bild einer beliebigen Nicht-Archimedischen „geraden Linie" (γ-Linie)

$$\gamma \equiv a\,x + b\,y + c = 0$$

zu zeichnen. Wir wählen die γ-Linie (Fig. 4)

$$x + 2\,y = 2,$$

welche die Eigenschaften unserer Nicht-Archimedischen Geometrie nicht weniger deutlich veranschaulicht, als irgendeine andere γ-Linie.

Zur Erläuterung Nicht-Archimedischer Besonderheiten heben wir hervor: 1. Während x die Strecke der Euklidischen Länge 4 durchläuft, deren Mittelpunkt in O liegt, dabei beständig wächst, ja sogar von negativen zu positiven Werten übergeht, wandert der zugeordnete Punkt im Schaubild, trotz $y = 1 - \frac{x}{2}$ auf der *horizontalen* Geraden $Y = 3$. 2. Die *Schaubilder* zweier voneinander verschiedener γ-Linien können unendlich viele Punkte miteinander gemein haben, z. B. zwei γ-Linien mit nur (gewöhnlichen) reellen Koeffizienten ihrer Gleichungen und $a \cdot b > 0$ die Punkte (Ecken im allgemeinen)

$$Y = -X = \pm\, 2\,(k + 1) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

aber keiner der zuletzt genannten Punkte ist ein Punkt (x, y) unserer Nicht-Archimedischen Geometrie:

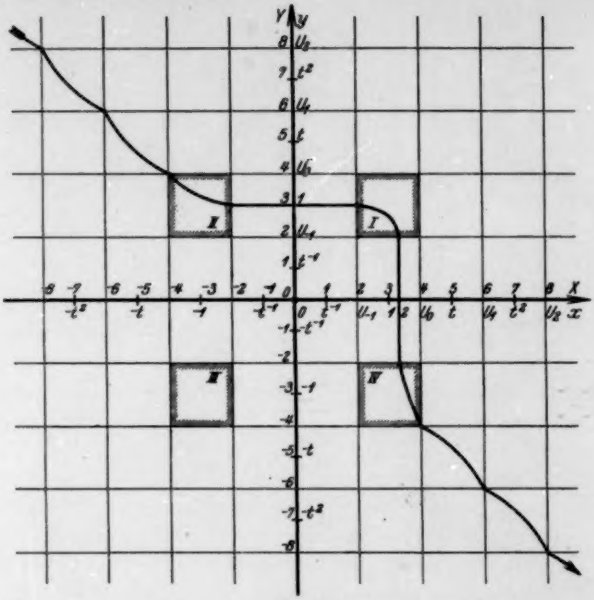


Fig. 4.

(Die *stark* ausgezogene Linie — im Bi-Komplexen kongruente Stücke gleichseitiger Hyperbeln, im Bi-Reellen nicht-kongruente Stücke verschiedener[7]) Hyperbeln und im Reell-Komplexen Stücke von geraden Linien — ist das Schaubild der γ-Linie

$$\gamma \equiv x + 2\,y - 2 = 0\,.$$

Die *fein* ausgezogenen Parallelen zu den Koordinatenachsen enthalten *keinen* Punkt (x, y) unserer Nicht-Archimedischen Geometrie.)

Darmstadt, den 15. Januar 1930.

---

7) Die Quadrate müssen einzeln aufeinander abgebildet werden. Für das Quadrat $[x > 0,\ y < 0]$ $(x, y$ reell) z. B. lauten die Transformationsformeln:

$$X = 2 + \frac{2\,x}{x+1},$$

$$Y = -2 - \frac{2\,y}{y-1}.$$

(Eingegangen am 4. 2. 1930.)

Herrn Julius v. Sz. Nagy zur Erwiderung.

Von

Hans Mohrmann in Darmstadt.

Eine Kritik des Herrn Nagy (diese Annalen **103**, S. 502) nötigt mich zu einer Abwehr.

In meiner Arbeit (Ann. **92**, S. 58 ff.) gab ich gelegentlich einer Erwiderung auf eine frühere Arbeit von Nagy *beiläufig* eine Klassifikation „*der* $2k^2+1$ *hinsichtlich den Zügen und den auf den Ovalen gelegenen Doppelpunkten verschiedenen Arten von Kurven* $(3k+1)$*-ter Ordnung vom Maximalindex mit k im Endlichen liegenden Ovalen*". (Bd. **92**, S. 67.)

In seiner neuen Arbeit (Bd. **103**) gibt Herr Nagy eine Klassifikation derselben Kurven, bei der er auch die gegenseitige Lage je zweier Züge der Kurven berücksichtigt (S. 503), wodurch er natürlich mehr Fälle erhält. Eine solche Klassifikation vorzunehmen ist Herr Nagy gewiß berechtigt, aber er darf deshalb meine Klassifikation nicht als „nicht vollständig" bezeichnen. Es ist dies geradeso, als wollte man eine Klassifikation der Kegelschnitte in der abgeschlossenen projektiven Ebene $(x_1 : x_2 : x_3)$ für unvollständig erklären, weil in der offenen projektiven Ebene (x, y) mehr Fälle zu unterscheiden sind.

Hannover, den 31. August 1930.

(Eingegangen am 1. 9. 1930.)

721/7/57 — V/12/6